Optimización No Lineal.

paula.castro@epn.edu.ec

Lunes 9 de mayo de 2022.

Contenido.

1. Introducción y ejemplos.
    - 1.1 Ejemplos clásicos y aplicaciones
    - 1.2 Conceptos preeliminares (conceptos de análisis)

} derivación: direccional, Fréchet, Goteâux

2. Problemas sin restricciones.
    - 2.1 Introducción al análisis convexo
    - 2.2 Optimización sin restricciones, condiciones de optimalidad.
    - 2.3 Método de descenso (Globalmente convergente)
    - 2.4 Método de Newton y sus variantes (localmente convergente)
    - 2.5 Métodos Quasi-Newton
    - 2.6 Método del gradiente conjugado
3. Problemas con restricciones
    - 3.1 Optimización con restricciones de caja: generalmente son convexas
    - 3.2 Métodos de Newton generalizados
    - 3.3 Optimización con restricciones generales (igualdad y desigualdad)
    - 3.4 Condiciones de calificación } tipos de conos (LICQ)
    - 3.5 Conceptos de dualidad
4. Métodos de penalización } $\min f(x)$ sar $g(x) \leq 0$ $\Rightarrow$ $\min f(x) \sim \lambda g(x)$

Criterios de calificación

Prueba 3.5 pts

Examen 3.5 pts

Deberes 1 pt

Exposiciones 1.5 pt

Questionarios 0.5 pt

10 puntos

Bibliografía. (Consultar en el sílabo)

Capítulo 1: Introducción y ejemplos

Sección 1.1. Ejemplos clásicos

- Problema isoperimétrico: lo que se plantea es hallar una curva que encierre (el) la mayor área posible para un perímetro dado

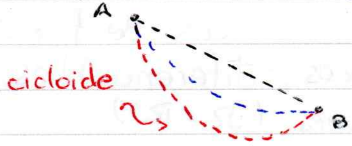
$\underbrace{\text{iso}}_{\text{igual}}\underbrace{\text{perimétrico}}_{\text{perímetro}}$

$$p^2 \geq 4\pi S \tag{1}$$

la ecuación (1) es conocida como desigualdad isoperimétrica

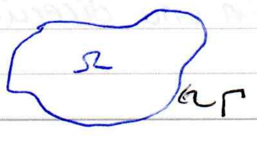
- Problema de la braquistocrona: encontrar una curva por la cual se va de A a B en el menor tiempo posible.

$\underbrace{\text{braquisto}}_{\text{más corto}}\underbrace{\text{crona}}_{\text{tiempo}}$



Una de las aproximaciones para resolver este problema fue realizada por Leibniz y se basa en aproximar la curva por rectas. y esta idea fue retomada tiempo después por Euler y sirvió de base para desarrollar la teoría del cálculo de variaciones

Problema de calentamiento óptimo. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio acotado y sea Γ su frontera. Podemos actuar sobre su frontera fijando una temperatura exterior $\mu(x)$. El objetivo consiste en acercarnos a una temperatura deseada



$$y_\Omega = y_\Omega(x) \qquad x \in \Omega$$

El planteamiento del problema sería el siguiente

$$\min \; J(y,u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \underbrace{(y(x) - y_{\Omega}(x))^2}_{} dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma} u^2(x)\, dx$$

sujeto a ← solución ⤴ ↑ quiero acercarme a la temperatura deseada ↳ buscamos minimizar el costo del control

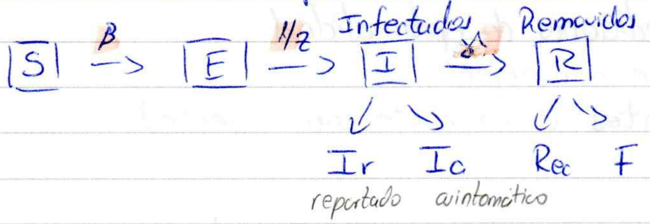
$$-\Delta y = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \alpha(x)(u - y) \quad \text{en } \Gamma$$

↳ coeficiente de transferencia de calor en la frontera

$u_a \leq u(x) \leq u_t$

- Problema: Estimación de parámetros del modelo de propagación del SARS-CoV-2

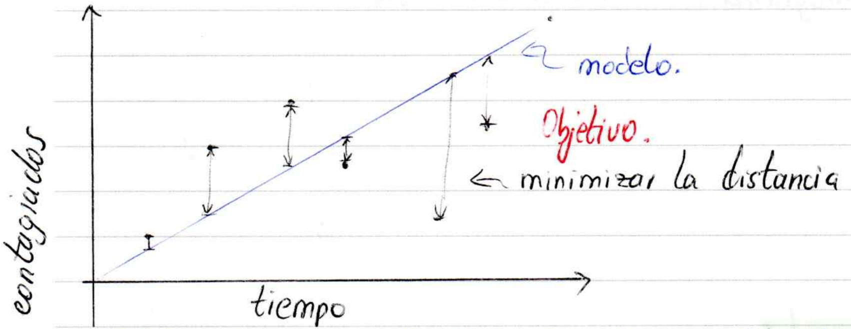


(dividimos la población)

β = tasa de transmisión
z = periodo de latencia
γ = tasa de recuperación
} parámetros desconocidos

$$(*)\left\{\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta I S \\ \frac{dE}{dt} &= \beta I S - \frac{1}{z}E \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{z}\cdot E - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned}\right\} \text{Solución } S, E, I, R$$

El objetivo es identificar los parámetros desconocidos de tal manera que la solución del modelo se acerque a los datos observados



$P = (\beta, \gamma, z)^T$, P^b = información de conocimiento previo de los parámetros

$$\min \sum (I(t) - I_{obs}(t))\, \underset{\uparrow}{C_i^{-1}}\, (I(t) - I_{obs}(t)) + (P - P_B)^T B^{-1} (P - P_b)$$

matriz de varianza y covarianza (además error)

s.a. modelo $(*)$
+ condiciones iniciales

De manera general, un problema de optimización tiene la siguiente forma

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\min_{x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3} f(x)$$

Los problemas de optimización se clasifican de acuerdo a las características de f o Ω. Así, existen problemas de optimización lineal, no lineales, convexos, diferenciables, no diferenciables, con restricciones ($\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$) y sin restricciones ($\Omega = \mathbb{R}^n$)

Martes 10 de mayo de 2022

Sección 1.2 Preeliminares - Revisión de conceptos de análisis

Definición 1.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f: \Omega \to \mathbb{R}$, decimos que f tiene derivada direccional en un punto $x_0 \in \Omega$ y en una dirección $h \in \mathbb{R}^n$ si el siguiente límite existe

$$f'(x_0; h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

Notemos que si $h = 0$, entonces $f'(x_0; h) = 0$. Notaciones $f(x_0, h)$, $D_h f(x_0)$

Definición 1.2. Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base canónica de $\mathbb{R}^n$; para $i=1,\dots,n$, la derivada parcial en la dirección x_i se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f'(x_0;e_i) = D_{e_i} f(x_0)$$

Ejemplo: Sea

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1^2\left(1+\frac{1}{x_2}\right) & \text{si } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_2 = 0 \end{cases}$$

Notemos que f no es continua en $(0,0)$; sin embargo, tiene derivada direccional en dicho punto.

Si $h_2 \neq 0$

$$f'((0,0);(h_1,h_2)) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(h_1,h_2)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, t^2 h_1^2\left(1+\frac{1}{th_2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} t h_1^2 \left(1+\frac{1}{th_2}\right) = \frac{h_1^2}{h_2}$$

- Si $h_2 = 0$ $\quad f'((0,0);(h_1,h_2)) = 0$

Luego, es fácil ver que $f'((0,0);(h_1,h_2))$ no es una función continua.
Lo anterior ejemplifica que la existencia de derivada direccional en todas las direcciones o derivadas parciales no implica continuidad. Así mismo podemos observar que la linealidad no es una propiedad que en general posean las derivadas direccionales

Definición 1.3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f:\Omega \to \mathbb{R}$, si f tiene derivada direccional en un punto $x_0 \in \Omega$ en toda dirección $h \in \mathbb{R}^n$, es decir, si el siguiente límite existe

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t}$$

Si adicionalmente, la aplicación $h \mapsto f'(x_0;h)$ es lineal y continua, decimos que f es Gâteaux diferenciable. Notaremos a esta aplicación $Df(a)$, $D_G f'(a)$, $f'_G(x_0)$

Definición 1.4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f:\Omega \to \mathbb{R}$, decimos que f es Fréchet diferenciable si existe una aplicación lineal y continua (Λ), tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \Lambda(h)}{\|h\|} = 0$$

$\Lambda:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Esta aplicación se denomina la derivada de Fréchet de f en x_0 y está únicamente determinada. La notaremos

$$df(x_0) = \Lambda, \quad f'(x_0)$$

Se verifican las siguientes implicaciones

$$\begin{tikzcd}
\text{f: Fréchet diferenciable en x_0} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{f es Gâteaux diferenciable en x_0} \arrow[r, Rightarrow] & \text{f es diferenciable direccionalmente en $h \in \mathbb{R}^n$} \\
\text{f es continua en x_0} & &
\end{tikzcd}$$

Introducimos a continuación el vector gradiente de f en x_0

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Notemos que

$$f'(x_0)h = d f(x_0)\cdot h = d\, f(x_0)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot df(x_0)e_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = h^T \nabla f(x_0)$$

Luego, el gradiente puede ser visto como el representante de Riesz de la derivada de $f(x_0)$

Observación 1.1. Decimos que $f:\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función $\mathcal{C}'(\Omega)$ si la función es diferenciable y su derivada es continua

Definición 1.5. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $f:\Omega \to \mathbb{R}$, supongamos que f tiene primera derivada en una vecindad de x_0 y que además las derivadas parciales poseen derivadas parciales, entonces decimos que f tiene segunda derivada en x_0. Las derivadas parciales mixtas respecto a x_i y x_i se notan $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$

La matriz $n\times n$ de segundas derivadas de f en x_0

$$Hf(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i x_i}\right)_{ij}$$

se denomina matriz hessiana de f en x_0

Teorema 1.1. **-Schwarzs-** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f:\Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en x_0 si para $i\neq j$ las derivadas parciales mixtas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

existen en una vecindad abierta y son continuas en x_0, entonces se verifica la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x_0)$$

Propiedad 1.2. Si es que todas las segundas derivadas parciales de f existen y son continuas en Ω, diremos que f es de clase C^2

Una propiedad importante de las funciones diferenciables es que pueden ser aproximadas usando su derivada; en efecto, de la (definición 1.4) tendríamos lo siguiente

$$f(x_0+h) = f(x_0) \quad f'(x_0)h + o(\|h\|) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Alternativamente, tomando $h = x - x_0$

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)^T \nabla f(x_0) + o(\|h\|)$$

para todo x en una vecindad de x_0

Teorema 1.2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f:\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y $h \in \mathbb{R}^n$ un vector dado, entonces

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\cdot h}_{h^T \nabla f(x_0)} + r(h)$$

$r(h) \to o(\|h\|)$ usando la notación de Landau.

$$\to \frac{1}{2} h^T Hf(\underset{x_0+th.}{x_0+th})h \qquad t \in (0,1)$$

$o(\|h\|)/\|h\| \to 0$ si $\|h\| \to 0$

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot h}{\|h\|} = \frac{o(\|h\|)}{\|h\|}$$

Capitulo 2: Problemas sin restricciones

Sección 2.1. Introducción al análisis convexo

En esta sección estudiaremos conceptos básicos del análisis convexo que son importantes para la optimización.

Definición 2.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, se dice que Ω es convexo si para todo $x, y \in \Omega$ y para todo $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in \Omega$$

Algunos ejemplos de conjuntos convexos

- En $\mathbb{R}$ los intervalos abiertos y cerrados son conjuntos convexos
- Hiperplano afín $H = \{ x \in \mathbb{R}^n : s^T x = r \}$

En efecto, sean $x \in H$ y $\lambda \in [0,1]$

P.D. $x\lambda + (1-\lambda) y \in H$

$$s^T(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda s^T x + (1-\lambda) s^T y = \lambda r + (1-\lambda) r = r$$

- Subespacio afín. Sea $b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \}$$

Sean $x, y \in H$ y $\lambda \in [0,1]$. P.P. $x\lambda + (1-\lambda) y \in V$

$$\begin{aligned} A(x\lambda + (1-\lambda)y) &= \lambda A x + (1-\lambda) A y \\ &\leq \lambda b + (1-\lambda) b = b \\ &\Rightarrow A(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq b. \end{aligned}$$

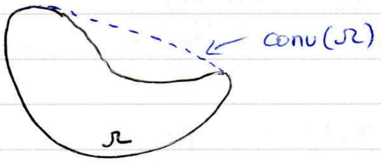
Así, el conjunto V es un conjunto convexo

- Sean S_1 y S_2 dos conjuntos convexos, entonces $S_1 \cap S_2$ es convexo.

Definición 2.2. Sea Ω un conjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$, definimos la envolvente convexa de Ω, notada por $\operatorname{conv}(\Omega)$ al conjunto de todas las combinaciones convexas de Ω i.

$x \in \operatorname{conv}(\Omega)$ si y solo si $x = \sum_{k=1}^{L} \lambda_k x_k$ con $\sum_{k=1}^{L} \lambda_k = 1$ con $\lambda_i \in [0,1]$ $\forall i$ y $x_i \in \Omega$ $\forall i = 1, \dots, L$.

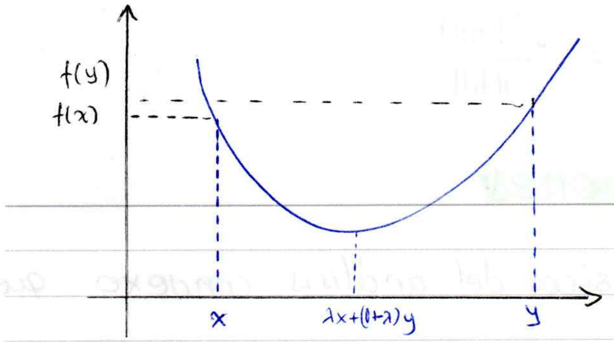
Alternativamente, se puede definir la envolvente convexa de Ω como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a Ω



Definición 2.3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f: \Omega \to \mathbb{R}$ la función se dice convexa si

$\forall x, y \in \Omega$ y $\lambda \in [0,1]$, se verifica que

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



Una función se dice estrictamente convexa si se verifica la desigualdad estrictamente, es decir

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

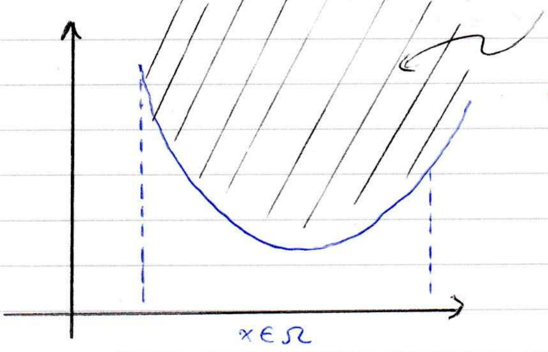
Una función f se dice uniformemente convexa si existen $\lambda\in[0,1]$ y $\mu>0$ tales que para todo $x, y\in\Omega$

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\mu\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$$

Viernes 13 de mayo de 2022.

Def 2.4. Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ convexo no vacío, $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. El epígrafo de f notado por $epi(f)\subset\mathbb{R}^{n+1}$, definido por

$$epi(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} : x\in\Omega,\ y\geq f(x)\}.$$



Teo 2.1. Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y no vacío, y una función $f:\Omega\to\mathbb{R}$, decimos que f es una función convexa si y solo si $epi(f)$ es un conjunto convexo.

Demostración (teo 2.1)

($\Rightarrow$) Supongamos que f es convexa. Vamos a demostrar que $epi(f)$ es convexo. Sean entonces, $(x_1,y_1), (x_2,y_2)\in epi(f)$ y $\lambda\in[0,1]$. P.D. $\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)\in epi(f)$

P.D. $(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\in epi(f)$

(i) $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\Omega$ ✓ (Ω es convexo)

(ii) P.D. $\lambda y_1+(1-\lambda y_2)\geq f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$.

Sabemos que $y_1\geq f(x_1)$, $y_2\geq f(x_2)$

$\lambda y_1\geq\lambda f(x_1)$ y $(1-\lambda)y_2\geq(1-\lambda)f(x_2)$

$\Rightarrow \lambda y_1+(1-\lambda)y_2\geq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\geq f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$

de la convexidad de f.

Así, por (i) y (ii) se tiene el resultado.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $epi(f)$ es convexo. P.D. f es una función convexa. Tomemos para ello, $(x_1,f(x_1)), (x_2,f(x_2))\in epi(f)$, luego, $\lambda\in[0,1]$, tenemos lo siguiente

$$\lambda(x_1,f(x_1))+(1-\lambda)(x_2,f(x_2))\in epi(f)$$

$$(\underbrace{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}_{x}, \underbrace{\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)}_{y})\in epi(f)$$

$x\in\Omega$, $y\geq f(x) \Leftrightarrow \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\geq f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$,

luego, f es una función convexa

Teo 2.2. Los siguientes enunciados se verifican.

(i) Sean $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, con Ω convexo y $\alpha\geq0$, se tiene que αf es convexa

(ii) Sea f_1, f_2 funciones convexas definidas sobre el convexo $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, se sigue que f_1+f_2 es convexa.

(iii) Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$ una familia de funciones convexas (definidas sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$), $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$, se tiene que

↑

debe

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$$

es una función convexa.

Demostración (teo 2.2)

i) Sean $x, y \in \Omega$ y $\lambda \in [0,1]$ Luego αf es una función convexa

P.D. $\alpha f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \alpha \lambda f(x_1) + \alpha (1-\lambda) f(x_y)$

$$\alpha f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \alpha [\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_y)]$$
$$= \lambda \alpha f(x) + (1-\lambda) \alpha f(y)$$

ii) $(f_1 + f_2)(\lambda x + (1-\lambda) y) = f_1(\lambda x + (1-\lambda) y) + f_2(\lambda x + (1-\lambda) y)$

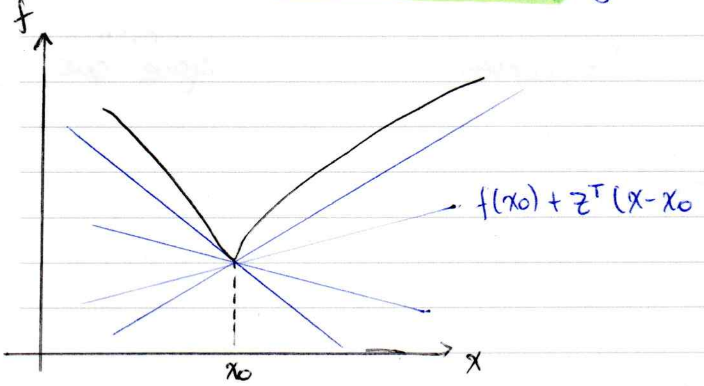
$$\leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y) + \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)$$
$$= \lambda (f_1(x) + f_2(x)) + (1+\lambda)(f_1 + f_2)(y)$$

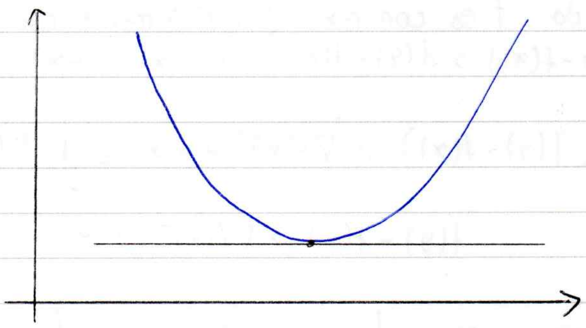
luego, $f_1 + f_2$ es una función convexa.

Def 2.5. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo y $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una función convexa, $z \in \mathbb{R}^n$ es un subgradientes de f en $x_0 \in \Omega$, si

$$f(x) \geq f(x_0) + z^T (x - x_0) \qquad \forall x \in \Omega.$$

El conjunto de todos los subgradientes de f en x_0 se denomina subdiferencial de f en x_0, $\partial f(x_0)$, y es un conjunto convexo.





Observación 2.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y no vacío y $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una función convexa. Supongamos que f es diferenciable en $x_0 \in \text{int}(\Omega)$. Se verifica entonces que

$$\partial f(x_0) = \{ \nabla f(x_0) \}$$

Teo. 2.3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y no vacío y convexo, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable ($f \in C^1(\Omega)$), entonces

(i) f es convexa si y solo si $\forall x, y \in \Omega$

$$\nabla f(x)^T (y - x) \leq f(y) - f(x) \qquad (1).$$

(ii) f es estrictamente convexa si y solo si $\forall x, y \in \Omega$ con $x \neq y$

$$\nabla f(x)^T (y - x) < f(y) - f(x) \qquad (2)$$

debe -> (iii) f es uniformemente convexa si y solo si existe $\mu > 0$ tal que para todo $x, y \in \Omega$

cambiemos de carrera ♡

$$\nabla f(x)^T (y - x) + \mu \| y - x \|^2 \leq f(y) - f(x) \qquad (3)$$

Demostración:

(i) ($\Rightarrow$) Asumamos que f es convexa, entonces $\forall x, y \in \Omega$ y $\lambda \in [0,1]$, se tiene lo siguiente

$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq \frac{(1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) - f(x)}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda (f(y) - f(x))}{\lambda} = f(y) - f(x)$$

Tomando el límite cuando $\lambda \to 0$

$$f'(x; y - x) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x)$$

Como f es $C'(\Omega)$,

$$f'(x;y-x) = f'(x)(y-x) = \nabla f(x)^T(y-x)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x)^T(y-x) \leq f(y)-f(x)$$

$\Leftarrow$ Recíprocamente, asumamos que (1) se verifica. Para $x,y \in \Omega$, $\lambda \in [0,1]$, consideremos

$$x_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda y \in \Omega.$$

Debemos probar que f es convexa, i.e.,

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - f(x_\lambda) \geq 0$$

Notando $-f(x_\lambda) = -\lambda f(x_\lambda) - (1-\lambda)f(x_\lambda)$, tenemos que

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - f(x_\lambda) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - \lambda f(x_\lambda) - (1-\lambda)f(x_\lambda)$$

$$= (1-\lambda)[f(x)-f(x_\lambda)] + \lambda[f(y)-f(x_\lambda)]$$

usando (1) $$\geq (1-\lambda)\nabla f(x_\lambda)^T(x-x_\lambda) + \lambda \nabla f(x_\lambda)^T(y-x_\lambda)$$

$$= \nabla f(x_\lambda)^T((1-\lambda)(x-x_\lambda) + \lambda(y-x_\lambda))$$

$$= \nabla f(x_\lambda)^T((1-\lambda)x + \lambda y - x_\lambda) = 0$$

(ii) $\Rightarrow$ Supongamos que f es estrictamente convexa. Sea $x,y \in \Omega$ con $x \neq y$ y $z = \frac{x+y}{2}$ se sigue que

$$f(z) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

$$f(z) - f(x) < \frac{1}{2}\left(f(y) - f(x)\right) \qquad [*]$$

Por otro lado, f es convexa (estrictamente convexa implica convexa), de (i) se sigue que

$$\frac{1}{2}(f(y)-f(x)) > f(z) - f(x) \geq \nabla f(x)^T(z-x)$$

$$\frac{1}{2}(f(y)-f(x)) > \nabla f(x)^T(z-x) = \frac{1}{2}\nabla f(x)^T(y-x)$$

$$f(y) - f(x) > \nabla f(x)^T(y-x)$$

$\Leftarrow$ El recíproco se verifica de la misma forma que (i)

Lunes, 16 de mayo de 2022

¿abierto? ¿$x_0 \in int(\Omega)$?

Proposición * Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f:\Omega \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \Omega$. Si f es diferenciable en x_0 y si $f'(x_0,h)$ existe para todo h, entonces $f'(x_0,h) = f'(x_0)\cdot h$.

Demostración

Como f es diferenciable, tomemos $t \in \mathbb{R}$ y supongamos $h \neq 0$

$$\frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} = \frac{f'(x_0)th}{t} + \frac{o(\|th\|)\|h\|}{t\|h\|}$$

$$= \frac{\cancel{t}f'(x_0)h}{\cancel{t}} + \frac{o(\|th\|)}{\|th\|}\|h\|$$

luego, si $t \to 0$, entonces

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)h + \lim_{t\to 0}\frac{o(\|th\|)}{\|th\|}\|h\|$$

$$\Rightarrow f'(x_0,h) = f'(x_0)h$$

Teorema 2.4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y convexo y $f:\Omega \to \mathbb{R}$ $(f \in C^2(\Omega))$, entonces

i) f es convexa si y solo si la matriz hessiana $Hf(x)$ es semidefinida positiva, para todo $x \in \Omega$, i.e.,

$$d^T Hf(x)\, d \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n \qquad (4)$$

i) f es estrictamente convexa si y solamente si la matriz Hessiana es definida positiva, para todo $x \in \Omega$, i.e.

$$d^T Hf(x)\, d > 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \qquad (5)$$

iii) f es uniformemente convexa si y sólo si es uniformemente definida positiva para todo $x \in \Omega$. i.e., $\exists \mu > 0$

$$d^T Hf(x) d \geq \mu \|d\|^2 . \qquad \forall d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Nota: Ω es un conjunto abierto o se requiere que $x \in int(\Omega)$.

Demostración

i) ($\Rightarrow$) Supongamos que f es convexa y $x \in \Omega$, $d \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Ya que Ω es abierto, existe $\tau = \tau(x,d) > 0$ tal que

$$x + td \in \Omega \qquad \forall t \in [0,1]$$

Utilizando la expansión de Taylor (de orden 2)

$$f(x+td) - f(x) - \nabla f(x)^T (td) = \frac{1}{2} (td)^2 Hf(x)(td) + o(\|td\|^2)$$

De (1) (teo 2.3) tenemos que $f(x+td) - f(x) - \nabla f(x)^T (td) \geq 0$

$$0 \leq \frac{t^2}{t^2} d^T Hf(x) d + o\frac{(\|td\|^2)}{t^2\|d|^2} \|d\|^2 = d^T Hf(x) d + o\frac{(\|td|^2)}{\|td\|^2} . \|d\|^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq d^T Hf(x) d \qquad si \ t \to 0$$

$\Leftarrow$ Recíprocamente, aplicando nuevamente la fórmula de Taylor (con resto diferencial) se sigue lo siguiente

$$f(y) - f(x) = \nabla f(x)^T (y-x) + \underbrace{\frac{1}{2} (y-x)^T Hf(x + \xi(y-x))(y-x)}_{\geq 0} \quad con \ \xi \in [0,1]$$

$$\geq \nabla f(x)^T (y-x)$$

Finalmente, aplicando el (teo. 2.3 ~ i) tenemos la convexidad de f.

ii) Supongamos que la matriz Hessiana es definida positiva, luego para x, y con $x \neq y$ y usando el teorema de Taylor, se sigue que

$$f(y) - f(x) = \nabla f(x)(y-x) + \underbrace{\frac{1}{2}(y-x)^T Hf(x + \xi(y-x))(y-x)}_{> 0}$$

luego $\Leftrightarrow$ $f(y) - f(x) > \nabla f(x)^T (y-x)$

Finalmente, aplicando el (teo 2.3 ~ ii) se concluye que f es convexa.

Sección 2.2 Optimización sin restricciones. (Condiciones de optimalidad)

En esta sección estudiaremos estudiaremos los problemas de optimización sin restricciones, es decir, cuando el conjunto admisible es todo $\mathbb{R}^n$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función suave o regular (diferenciable). Consideramos

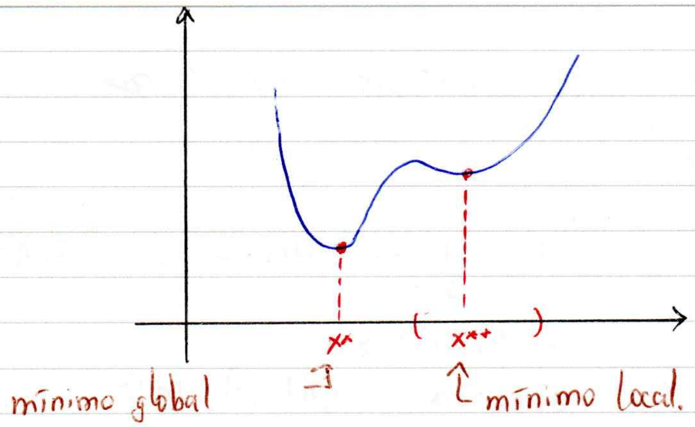
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \qquad (2.1)$$

f recibe el nombre de función objetivo. Buscamos condiciones sobre f para (i) garantizar la existencia de un mínimo.

(ii) mostrar que este mínimo es único, al menos, localmente.

También queremos caracterizar estos puntos, luego necesitamos (iii) determinar condiciones suficientes y necesarias para que un punto sea considerado mínimo. Los puntos que verifiquen las condiciones necesarias serán los candidatos a mínimo luego, las condiciones suficientes nos permitirán verificar que, en efecto, uno o varios de los puntos hallados minimiza la función objetivo.

Definición 2.6. Un elemento $x^* \in \mathbb{R}^n$ se dice solución global del problema (2.1) si
$$f(x^*) \leq f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
Adicionalmente, x^* se dice solución local si existe una vecindad de x^*, notada $V(x^*)$, tal que
$$f(x^*) \leq f(x) \qquad \forall x \in V(x^*)$$



Proposición 2.1. Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dada, entonces existe una sucesión minimizante de f. Es decir, existe $(x_n)_n \subseteq \Omega$ tal que
$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \inf_{x \in \Omega} f(x)$$

Demostración

Supongamos que $\inf_{x \in \Omega} f(x) > -\infty$, es decir, existe z tal que
$$z = \inf_{x \in \Omega} f(x).$$

De la definición de inf, $z \leq f(x)$, $\forall x \in \Omega$. Ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar una sucesión $(x_n) \subseteq \Omega$ tal que
$$z \leq f(x_n) \leq z + 1/n \qquad [*]$$
Dicha sucesión existe, ya que caso contrario
$$f(x_n) > z + 1/n$$
luego $z + 1/n > z$ sería una cota inferior más grande lo cual contradice la definición de $z = \inf_{x \in \Omega} f(x)$

Luego, tenemos $(x_n) \subseteq \Omega$ tal que $[*]$ se verifica, tomando en lo anterior y gracias al teorema del sánduche se sigue que
$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = z = \inf_{x \in \Omega} f(x).$$
▨

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión minimizante de f. Si $(x_n)_n$ (o una subsucesión de $(x_n)_n$) converge a $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\bar{x}$ sería un mínimo de f.
En efecto,
$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \inf_{x \in \Omega} f(x)$$
luego,
$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = f(\bar{x}).$$

Ahora, aunque la existencia de una sucesión minimizante esté garantizado, esta podría no converger (incluso tomando subsucesiones), luego es necesario imponer restricciones sobre f para garantizar la existencia de un mínimo.

Definición 2.7. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f se dice coerciva o radialmente no acotada si
$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Teo. 2.5. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y coerciva, entonces f alcanza un mínimo global

Demostración

Sea $(x_n)_n$ una sucesión minimizante de f

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) =: z$$

de la coercividad de f se sigue que $(x_n)_n$ está acotada.

En efecto, si razonamos por el absurdo y suponemos que $\|x_n\| \to +\infty$, como f es coerciva de (2.2)

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$$

lo cual contradice que $(x_n)_n$ es una sucesión minimizante. Ahora, como $(x_n)_n$ está acotada tiene una subsucesión convergente, i.e., existe $(x_{n_k})_k \subseteq (x_n)_n$ tal que

$$x_{n_k} \to \bar{x}, \qquad k \to +\infty.$$

Consecuentemente, de la continuidad de f,

$$\inf_{x\in\Omega} f(x) = \lim f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$$

y $x^* = \bar{x}$ es un mínimo global.

Teorema 2.6. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\Omega)$ y $x^*\in\mathbb{R}^n$ un mínimo local de f, entonces se verifica que

Condiciones necesarias de optimalidad. de prime y segundo orden.

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Si adicionalmente, f es $C^2(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$H f(x^*) \; \underbrace{[\nabla^2 f(x^*)]}_{\text{notación}} \text{ es semidefinida positiva.}$$

Martes, 17 de mayo de 2022.

Demostración (teorema 2.6)

Sea $u\in\mathbb{R}^n$ dado, de la optimalidad de x^* sabemos que para t suficientemente pequeño

$$0 \leq f(x^*+tu) - f(x^*) \quad \leftarrow \text{de la condición de optimalidad}$$

dividiendo para t a ambos lados y tomando el límite cuando $t\to 0$, se tiene que

$$0 \leq \lim_{t\to} \frac{1}{t}\left[f(x^*+tu) - f(x^*)\right] = f'(x^*, u) = \nabla f(x^*)^T u$$

Puesto que lo anterior se cumple también para $-u\in\mathbb{R}^n$, se sigue que

$$0 \leq \nabla f(x^*)^T(-u)$$
$$0 \geq \nabla f(x^*)^T(u)$$

luego, se concluye que $\nabla f(x^*)^T u = 0$, para todo u; así

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Parte 2) Supongamos por contradicción que $\nabla^2 f(x^*)$ no es semidefinida positiva, entonces existe $p\in\mathbb{R}^n$ tal que

$$p^T \nabla^2 f(x^*) p < 0$$

Puesto que $\nabla^2 f(x^*)$ es continua en una vecindad de x^*, entonces existe $\tau>0$ tal que

Por Taylor, sabemos que para todo $\hat{t}\in]0,\tau]$ y algún $\xi\in]0,\hat{t}]$ se tiene que

$$f(x^*+\hat{t}p) = f(x^*) + \underbrace{\hat{t}\nabla f(x^*)^T p}_{=0} + \underbrace{\hat{t}^2/2\; p^T \nabla f(x^*+2p)p}_{<0} < f(x^*)$$

Es decir

$$f(x^*+tp) \leq f(x^*)$$

lo que contradice la optimalidad de x^*

Teorema 2.7 Sean $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y x^* un punto estacionario de f (i.e. $\nabla f(x^*)=0$). Supongamos además que $\nabla^2 f(x^*)$ es continua en una vecindad de x^* y ~~además~~ $\nabla^2 f(x^*)$ es definida positiva. Entonces x^* es un mínimo local estricto.

Condiciones suficientes de prime orden

Demostración
Gracias a la continuidad del $\nabla^2 f(x^*)$, existe $r>0$ tal que $\nabla^2 f(x)$ siga siendo definido positivo para todo $x \in D$, donde

$$D = \{ z : \|z - x^*\| < r \}$$

Tomemos ahora $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|p\| < r$ y $t \in (0,1)$, se tiene que

$$x^* + p \in D \sim \|x^* + p - x^*\| < r$$

$$x^* + tp \in D \sim \|x^* + tp - x^*\| = t\|p\| < r.$$

Luego, aplicando Taylor

$$f(x^*+p) = f(x^*) + \underbrace{\nabla f(x^*)^T p}_{=0} + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x^* + tp)\, p$$

$$= f(x^*) + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x^* + tp)\, p$$

para $x^* + tp \in D$, y consecuentemente $p^T \nabla^2 f(x^* + tp) p > 0$, luego

$$f(x^* + tp) > f(x^*)$$ ▨

Los 2 teoremas anteriores nos dan criterios para hallar puntos estacionarios y para determinar si son mínimos o no. A continuación estableceremos criterios para determinar si estos puntos son únicos. Lo haremos usando el concepto de convexidad

Teorema 2.8. a) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces todo mínimo local es también un mínimo global

b) Si además, f es diferenciable, entonces todo punto estacionario es un mínimo global de f.

Demostración

a) Supongamos por contradicción que x^* es un mínimo local pero no global; es decir, existe $z \in \mathbb{R}^n$, tal que $f(z) < f(x^*)$. De la convexidad de f se sigue que $\forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda z + (1-\lambda)x^*) < \lambda \underbrace{f(z)}_{< f(x^*)} + (1-\lambda) f(x^*)$$

$$= \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(x^*) = f(x^*) \qquad [*]$$

Pero $\lambda z + (1-\lambda)x^* = x^* + \lambda(z - x^*) \in V(x^*)$, luego $(*)$ contradice la optimalidad local de x^*

b) Asumamos por contradicción que x^* no es un mínimo global, es decir, existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(z) < f(x^*)$$

Como $\nabla f(x^*)^T (z - x) = f'(x^*; z - x^*)$

↳ suponiendo que f es tal que $f'(x,\cdot)$ existe para todas las direcciones

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x^* + \lambda(z - x^*)) - f(x^*)}{\lambda}$$

$$\leq \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda f(z) + (1-\lambda) f(x^*) - f(x^*)}{\lambda} = f(z) - f(z^*) < 0$$

lo cual contradice la estacionariedad de x^* ▨

Ejemplos

1) Consideremos

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$$

Notemos en primer lugar que f es coerciva; en efecto, escribiendo

$$f(x,y) = (x^4 + y^4)\left(1 - \frac{4xy}{x^4 + y^4}\right)$$

podemos notar que si $\|(x,y)\| \to +\infty$, entonces $x^4 + y^4 \to +\infty$ y $4xy/(x^4+y^4) \to 0$ y consecuentemente $f(x,y) \to +\infty$, luego por definición; f es coerciva, continua y así, por el teorema ~2.5; f alcanza un mínimo global. Para hallar los puntos estacionarios

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ -4x + 4y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(x^3 = y)$, $(y^3 = x)$. Así, $y = -1, 1, 0$ y los puntos estacionarios son
$(-1,-1)$, $(1,1)$, $(0,0)$. (Candidatos a mínimo)

Para verificar cual de estos puntos es un mínimo, utilizaremos las condiciones suficientes de segundo orden

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

En los puntos $(-1,-1)$ y $(1,1)$ esta matriz es definida positiva, luego $f(-1,-1) = f(1,1)$ son mínimos de f y

$$f(-1,-1) = f(1,1) = -2$$

2) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x \mapsto g(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x$ diferenciable con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y definida positiva y $b \in \mathbb{R}^n$. Muestre que g tiene un mínimo global y caracterizemoslo

Como A es definida positiva, se tiene que

$$x^T A x \geq \lambda \|x\|^2$$

con $\lambda > 0$ el menor valor propio de la matriz A

$$g(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x \geq \lambda \|x\|^2 + b^T x,$$

luego, se sigue $g(x) \to +\infty$ si $\|x\| \to +\infty$, es decir, g es coerciva.

- $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica

$$\|x\|^2 = x^T x = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$(x^T x)' = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix} = 2x$$

- $(x^T A x)' = 2Ax$

$$x^T A x = (x_1, \dots, x_n) \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & & & a_{nn} \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}^{x}$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \dots + x_n(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \dots + 2a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ 2a_{1n}x_1 + 2a_{2n}x_2 + \dots + 2a_{nn}x_n \end{pmatrix}}_{2Ax} = 2Ax$$

Para hallar los puntos estacionarios

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ 2a_{1n}x_1 + 2a_{2n}x_2 + \cdots + 2a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

igualdad de vectores

$$\begin{matrix} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \\ 2a_{1n}x_1 + 2a_{2n}x_n + \cdots + 2a_{nn}x_n = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2Ax = b \\ \Longleftrightarrow Ax = b \\ \Rightarrow x = A^{-1}b \end{matrix}$$

¿A inversible?

Viernes, 20 de mayo de 2022

- $\nabla g(x) = Ax + b = 0 \Rightarrow x = A^{-1}b$ (A es invertible por ser simétrica definida positiva
- $\nabla^2 g(x) = A > 0$

por la condición suficiente de 2do orden tenemos que $x = A^{-1}b$ es un mínimo global de g.

③ $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 - y + 9$

Calculemos

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + x + 2y \\ 2x + y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y = 1 - 2x$. Luego

$$0 = x^2 + x + 2 - 4x = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

$x_1 = 2, \quad x_2 = 1$

$y_1 = -3, \quad y_2 = -1 \qquad (2,-3) \quad (1,-1)$ son puntos estacionarios

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(2,-3) = \begin{pmatrix} & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ es definida positiva. Luego de $(2,-3)$ es mínimo de f

- $\nabla^2 f(1,-1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ los valores propios $\lambda_1 = -0{,}23 < 0 \qquad \lambda_2 = 4.23 > 0$ verificar

luego la matriz es indefinida y $(1,-1)$ es un punto de ensilladura.

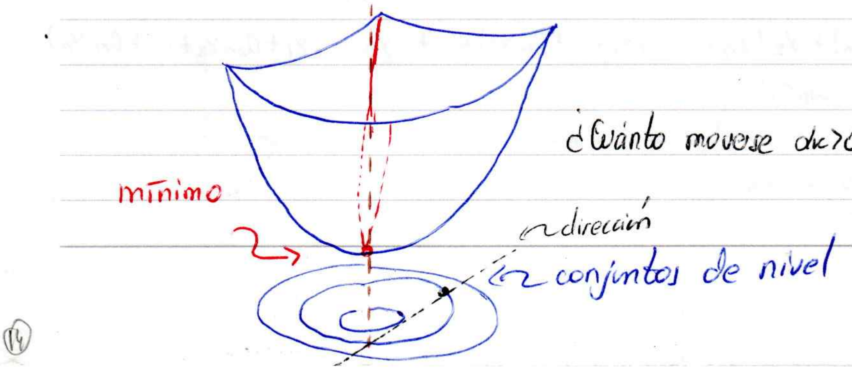
Sección 2.3 Métodos de descenso.

En general, los métodos de optimización parten de un punto inicial x_0 y utilizando la información de 1er y 2do orden nos movemos en una dirección que conduzca a un mayor valor (objetivo) de la función objetivo.

Una vez elegida la dirección hace falta decidir cuanto nos movemos en ella.

La idea básica de los métodos de descenso consiste en encontrar en una iteración x_k, una dirección de descenso p_k y un paso de descenso α_k tales que pase lo siguiente

$$f(x_k + \alpha_k p_k) < f(x_k) \qquad \alpha_k > 0$$



¿Cuánto moverse $\alpha_k > 0$?

Una primera idea es buscar una dirección que satisfaga lo siguiente:

$$\nabla f(x_k)^T p_k < 0 \qquad \forall k$$

En efecto, usando Taylor, se tiene que

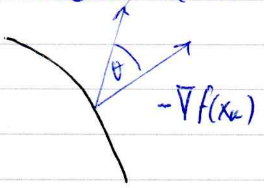
$$f(x_k+\alpha_k p_k) = f(x_k) + \underbrace{\alpha_k \nabla f(x_k)^T p_k}_{<0} + o\,(\underbrace{\|\alpha_k p_k\|)}_{\longrightarrow 0}$$

$$< f(x_k) \qquad \qquad \alpha_k \text{ suficientemente pequeño}$$

De manera más general, la dirección de descenso p_k debe satisfacer la siguiente condición

$$-\nabla f(x_0)^T p_k > \eta \, \|\nabla f(x_k)\| \, \|p_k\| \quad \text{Condición del ángulo.} \qquad (2.3)$$

para $\eta \in \,]0,1[$. La condición (2.3) implica que el coseno del ángulo formado por p_k y $\nabla f(x_k)$ es menor a un valor η



$$\cos(\theta) \; \frac{-\nabla f(x_0)^T p_k}{\|\nabla f(x_k)\| \, \|p_k\|} > \eta$$

La idea es que p_k no se alEje «mucho» de la dirección de menos el gradiente. La elección más natural, es aquella que conduzca al mayor descenso de la función objetivo

$$f(x_k+\alpha_k p_k) \approx f(x_k) + \underbrace{\alpha \nabla f(x_k)^T p_k}_{<0} < f(x_k)$$

Tomando $\alpha = 1$, se busca entonces resolver

$$\min_{\|p\|=1} \nabla f(x)^T p \qquad (2.4)$$

Teorema 2.4. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable y $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x) \neq 0$. Entonces el problema (2.4) tiene solución única.

$$p = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} \qquad (2.5)$$

Demostración Sea θ el ángulo formado entre los vectores $\nabla f(x)$ y p, tendríamos que

$$\nabla f(x)^T p = \cos\theta \, \|\nabla f(x)\| \, \|p\|$$

$$[*] \quad \nabla f(x)^T p = \|\nabla f(x)\| \cos\theta$$

De [*] podemos concluir que $\nabla f(x)^T p$ alcanzará su valor mínimo si $\cos\theta = -1$, i.e.,

$$\nabla f(x)^T p = -\|\nabla f(x)\|$$

El valor de para el cual lo anterior se verifica es

$$p = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$$

▨

Consecuentemente, cualquier dirección de la forma

$$p_k = -\alpha_k \nabla f(x_k) \qquad \alpha_k > 0$$

corresponden a una dirección del profundo descenso.

Una vez escogida la dirección es necesario escoger α_k

El paso ideal es

$$\alpha_k = \operatorname*{argmin}_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha_k p_k) \qquad (2.7)$$

Si (2.7) es fácil de resolver tomaremos α_k tal que verifique

$$\frac{d}{d\alpha_k} f(x_k + \alpha_k p_k) = 0$$

Ejemplo. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, calcular el valor exacto de α para el siguiente problema

$$\min_x f(x) = \|Ax - b\|^2$$

Sean x_k y p_k fijos pero arbitrarios, entonces

$$f(x_k + \alpha p_k) = \|A(x_k + \alpha p_k) + b\|^2$$

$$\frac{d}{d\alpha} f(x_k + \alpha p_k) = 2\,(A(x_k + \alpha_k p_k) - b, Ap_k)$$

$$= 2\,[(A(x_k + \alpha_k p_k), Ap_k) - (b, Ap_k)]$$

$$= 2\,[(Ax_k + \alpha Ap_k, Ap_k) - (b, Ap_k)]$$

$$= 2\,[(Ax_k, Ap_k) + \alpha(Ap_k, Ap_k) - (b, Ap_k)]$$

$$\alpha = \frac{(b, \Delta p_k) - (\Delta x_k, \Delta p_k)}{(\Delta p_k, \Delta p_k)}$$

De manera general, resolver (2.7) es demasiado costoso. En su lugar, se escogen los pasos de acuerdo a una estrategia de búsqueda lineal.

En general, se requiere que los α_k satisfagan las siguientes propiedades

$$f(x_k + \alpha_k p_k) < f(x_k) \qquad (2.8)$$

$$f(x_k+\alpha_k p_k) - f(x_k) \to 0 \Rightarrow \frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|} \to 0 \qquad (2.9)$$

condición de factibilidad, de la búsqueda lineal

Un algoritmo de descenso globalmente convergente es el siguiente

Algoritmo de descenso. (Algoritmo 1)

1. Escoger $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y fijemos $k=0$
2. Repetimos hasta un determinado criterio de parada
   - 2.1 Escogemos una dirección p_k tal que se cumpla la condición del ángulo (2.3)
   - 2.2 Determinar o hallar α_k tal que se cumpla (2.8) y (2.9)
   - 2.3 Actualizar $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ y hacemos $k = k+1$

Teorema 2.10. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C' continuamente diferenciable y acotada inferiormente y sean $\{x_k\}$, $\{p_k\}$ y $\{\alpha_k\}$ generadas por el algoritmo (1), entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \nabla f(x_n) = 0$$

y todo punto de acumulación o límite es un punto estacionario de f.

Viernes, 27 de mayo de 2022.

Demostración (teorema 2.10)

Parte 1) Notemos que la sucesión $(f(x_k))_k$ es decreciente por (2.8) y acotada inferiormente por hipótesis, entonces converge a un valor $\hat{f}$. Luego,

$$0 \leq \|f(x_k+\alpha_k p_k) - f(x_k)\| \leq \|f(x_k+\alpha_k p_k) - \hat{f}\| + \|\hat{f} - f(x_k)\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

$$\therefore\ f(x_k+\alpha_k p_k) - f(x_k) \to 0.$$

Así, gracias a la condición (2.9) se sigue que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|} = 0.$$

Ahora, ya que p_k verifica la condición del ángulo (2.3), existe $\eta \in (0,1)$ tal que

$$0 \leq \eta \|\nabla f(x_k)\| \leq -\frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|}, \quad k \to +\infty.$$

De donde, se sigue que

$$\|\nabla f(x_k)\| \to 0, \quad k\to+\infty \qquad \text{(Usando el teorema del sánduche)}$$

parte 2) Sea $\hat{x}$ un punto de acumulación de $(x_k)_k$, así

$$x_k \to \hat{x},$$

luego, como f es C', entonces

$$\nabla f(\hat{x}) = \lim_{k\to+\infty} \nabla f(x_k) = 0,$$

es decir, se tiene que

$$\nabla f(\hat{x}) = 0. \qquad \square$$

Ahora, basándonos en las ideas que nos llevan a necesitar (2.8) y (2.9); definimos una estrategia de búsqueda lineal, la más popular o usada se conoce como la regla de Armijo.

Regla de Armijo

Dada una dirección p_k de f en x_k, vamos a escoger

$$\alpha_k \in \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \dots\} = \{\tfrac{1}{2^i} : i \in \mathbb{N}_0\}$$

funciona numéricamente

tal que

$$(2.10) \qquad f(x_k + \alpha_k p_k) - f(x_k) \leq \gamma \alpha_k \nabla f(x_k)^T p_k \qquad \text{con } \gamma \in (0,1) \quad (\gamma = 1 \cdot e^{-4})$$

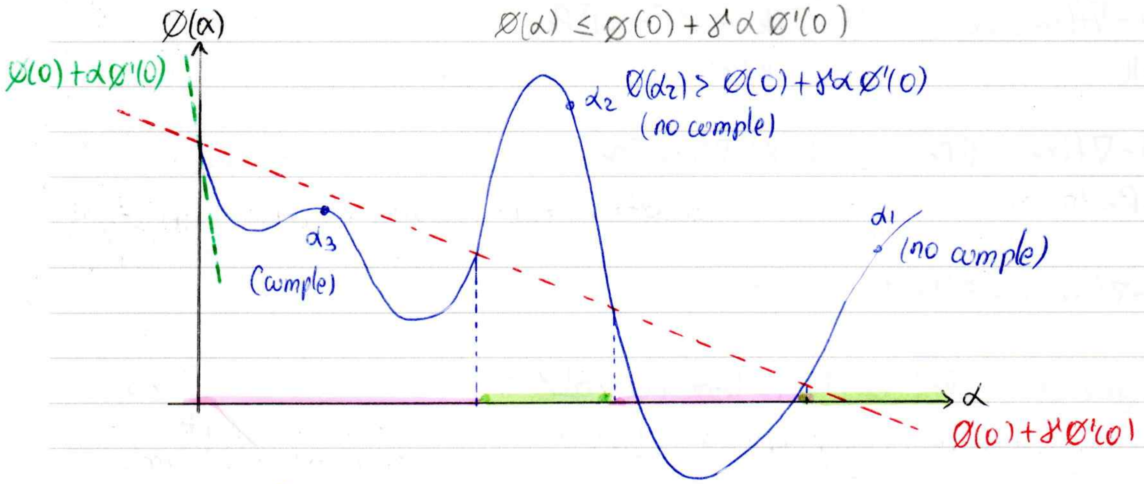
De manera general, $\alpha_k \in \{1, \beta, \beta^2, \beta^3, \dots\}$, $\beta \in (0,1)$. Vamos a definir la función

$$\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$$

luego $\phi'(\alpha) = f'(x_k + \alpha p_k) \cdot p_k$, $\phi'(0) = f'(x_k) p_k = \nabla f(x_k)^T p_k$. Así, alternativamente (2.10) toma la siguiente forma

$$\phi(\alpha) - \phi(0) \leq \gamma \alpha \phi'(0)$$

$$\phi(\alpha) \leq \phi(0) + \gamma \alpha \phi'(0)$$



Lema 2.1. Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supongamos que ∇f es continuo en una vecindad V tal que $x \in V$. Dados $\gamma \in (0,1)$ de descenso de f. Entonces existe $\hat{\alpha} > 0$ tal que

$$f(x + \alpha p) - f(x) \leq \gamma \alpha \nabla f(x)^T p \qquad \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha}]$$

Demostración

Para $\alpha = 0$, la condición se cumple trivialmente. Asumamos por tanto que $\alpha > 0$. Tomando α suficientemente pequeño tal que

$$x + \alpha p \in V$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x + \alpha p) - f(x)}{\alpha} - \gamma \nabla f(x)^T p = \nabla f(x)^T p - \gamma \nabla f(x)^T p = \underbrace{(1 - \gamma)}_{>0} \underbrace{\nabla f(x)^T p}_{<0} < 0$$

(p es dirección de descenso)

De la continuidad del ∇f, lo anterior se verificará también $\forall \alpha\,]0, \hat{\alpha}]$ con $\hat{\alpha} > 0$ suficientemente pequeño, es decir

$$f(x + \alpha p) - f(x) - \gamma \alpha \nabla f(x)^T p < 0 \qquad \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha}[$$

Teorema. 2.11 Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, supongamos que ∇f es uniformemente continua en un conjunto de nivel $N_0 = \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$. Si las iteraciones generadas por el algoritmo-1 $(\alpha_k), (x_k), (p_k)$ con $(\alpha_k)_k$ escogidos según la regla de Armijo, satisfacen lo siguiente

$$\|p_k\| \geq \frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|} \qquad \left(\text{ej: } p_k = -\nabla f(x_k) \right)$$

Entonces, $(\alpha_k)_k$ satisfacen (2.9)

Lunes, 30 de mayo de 2022.

Demostración (teorema ~ 2.11)

Por contradicción. Asumamos que existe un conjunto infinito $K \subseteq \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x_k + \alpha_k p_k) - f(x_k) \to 0 \quad \text{y} \quad \frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|} \leq -\varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

En efecto, $\left| \frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|} \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, luego $-\varepsilon < \frac{|\nabla f(x_k)^T p_k|}{\|p_k\|}$ $\boxed{1}$

Ahora, por hipótesis

$$\|p_k\| \geq -\frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|} \geq \varepsilon > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por otro lado, del teorema del valor medio se sigue que

$$f(x+h) - f(x) = \nabla f(x+sh)^T h, \qquad s \in (0,1)$$

Luego

$$\frac{f(x_k+\alpha_k p_k) - f(x_k)}{\|\alpha_k p_k\|} - \frac{\alpha_k \gamma \nabla f(x_k)^T p_k}{\|\alpha_k p_k\|}$$

regla de Armijo

$$= \frac{\nabla f(x_k+\tau_k p_k)^T \alpha_k p_k}{\alpha_k \|p_k\|} - \frac{\alpha_k \gamma \nabla f(x_k)^T p_k}{\alpha_k \|p_k\|} \qquad \tau_k \in (0, \alpha_k)$$

$\pm \frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|}$

$$= \frac{[\nabla f(x_k+\tau_k p_k) - \nabla f(x_k)]^T p_k}{\|p_k\|} + \frac{\nabla f(x_k)^T p_k - \gamma \nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|}$$

$$\leq \frac{\|\nabla f(x_k+\tau_k p_k) - \nabla f(x_k)\| \, \|p_k\|}{\|p_k\|} + (1-\gamma) \underbrace{\frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|}}_{\leq -\varepsilon}$$

Cauchy- Swarzs

por [1]

$$\leq \|\nabla f(x_k+\tau_k p_k) - \nabla f(x_k)\| - \varepsilon(1-\gamma) \qquad [2]$$

De la continuidad uniforme del gradiente (∇f) en N_0, tenemos que

Continuidad uniforme
$(\forall \hat{\varepsilon} > 0)(\forall x \in N_0)(\exists \rho > 0)$ tal que $\forall y$ $\|x-y\| < \rho \Rightarrow \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| < \hat{\varepsilon}$

existe $\rho > 0$, independiente de x_k tal que

$$\|\nabla f(x_k+d) - \nabla f(x_k)\| < (1-\gamma)\varepsilon \qquad \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \|d\| < \rho \qquad [3]$$

En particular, tomando $d = \alpha_k p_k$, con $k \in K$ tales que $\|d\| < \rho$, se verificaría, la condición de Armijo. En efecto, usando [3] en la desigualdad [2],

$$\frac{f(x_k+\alpha_k p_k) - f(x_k)}{\|\alpha_k p_k\|} - \frac{\alpha_k \gamma \nabla f(x_k)^T p_k}{\|\alpha_k p_k\|} \leq (1-\gamma)\varepsilon - \varepsilon(1-\gamma) = 0.$$

Luego,

$$f(x_k+\alpha_k p_k) - f(x_k) \leq \gamma \alpha_k \nabla f(x_k)^T p_k,$$

es decir, la condición de Armijo se verifica; así, el α_k hallado es el «mejor» valor para la regla de Armijo. Por otro lado, como $\alpha_k \in (1, \beta, \beta^2, \dots)$ con $\beta \in (0,1)$ se tiene que $\alpha_k = 1$ o $\alpha_k \leq \beta$, existe entonces $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\beta^n < \alpha_k \leq \beta^{n-1}.$$

Dividiendo para β

$$\beta^{n-1} < \frac{\alpha_k}{\beta} =: \hat{\alpha}_k$$

y como $\beta < 1$, se sigue que $\hat{\alpha}_k > \alpha_k$.
Por otra parte, necesariamente

$$\frac{\alpha_k}{\beta} \|p_k\| = \hat{\alpha}_k \|p_k\| > \rho$$

Pues, de no serlo $\hat{\alpha}_k$ verificaría también la condición de Armijo y α_k ya no sería el «mejor» valor para la regla de Armijo. Resumiendo, tenemos que $\forall k \in K$ tal que

$$\alpha_k \|p_k\| \geq \min\{\rho\beta, \varepsilon\} =: \delta \qquad [**]$$

↳ $\alpha_k = 1$ caso que no había sido considerado ya

ya que $\|p_k\| \geq \varepsilon$

y

$$f(x_k) - f(x_k+\alpha_k p_k) \geq -\gamma \alpha_k \nabla f(x_k)^T p_k = \gamma \overbrace{\left(-\frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|}\right)}^{\geq \varepsilon} \underbrace{\|p_k\| \alpha_k}_{\geq \delta} \geq \gamma \varepsilon \delta$$

Consecuentemente

$$f(x_k+\alpha_k p_k) - f(x_k) \to 0 \qquad k \to +\infty.$$

☐

lo cual contradice [1].

Otra estrategia de búsqueda lineal está dada por las condiciones de Wolfe

$$f(x_k+\alpha_k p_k) - f(x_k) \leq \gamma \alpha_k \nabla f(x_k)^T p_k, \tag{2.11}$$

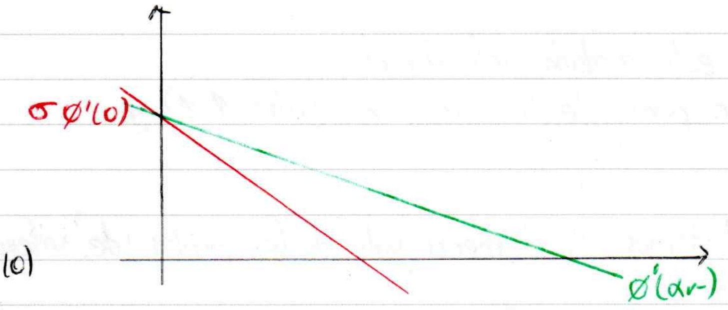
$$\nabla f(x_k+\alpha_k p_k)^T p_k \geq \sigma \nabla f(x_k)^T p_k \tag{2.12}$$

con $0<\gamma<\sigma<1$. La regla de Armijo (2.11) garantiza una disminución en cada iteración en la función objetivo; sin embargo, en ocasiones esta regla se cumple para valores suficientemente (muy) pequeños de α_k, lo que puede provocar que el algoritmo funcione lentamente.
La condición (2.12) se conoce como condición de curvatura y garantiza que la pendiente de la función

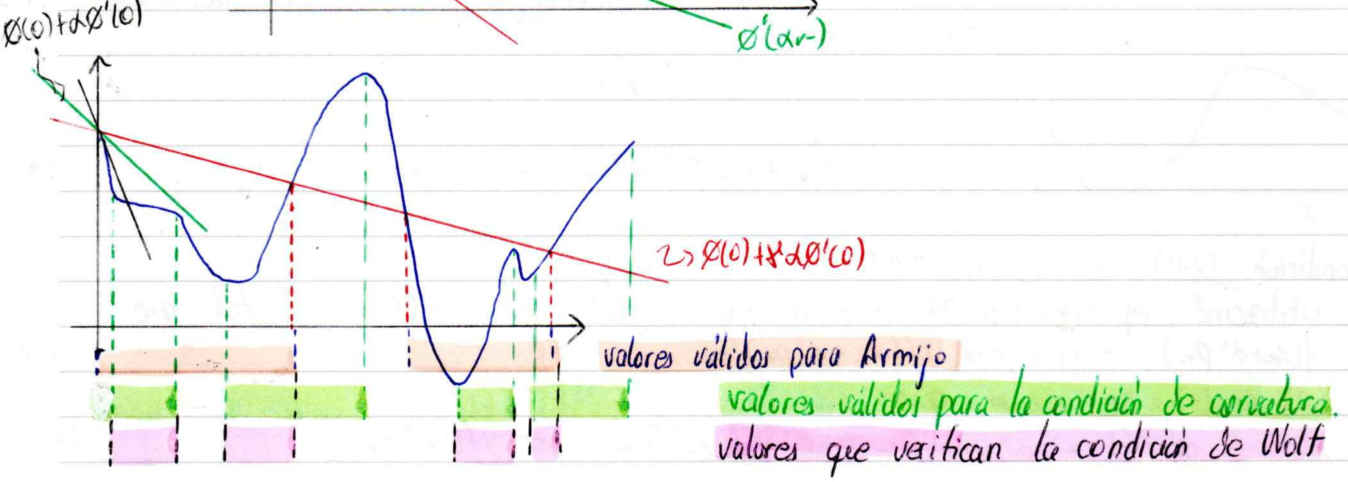
$$\phi(\alpha) = f(x_k+\alpha p_k) \tag{2.12.*}$$

sea menos negativa en α_k que en 0

$$\phi(\alpha_k) \geq \sigma \phi'(0), \qquad \gamma<\sigma<1$$



En este gráfico ø'(α.) tiene pendiente menos negativa (más horizontal que ø'(0)



Una versión más fuerte que las condiciones de Wolf reemplaza a las condiciones de curvatura (2.12) por

$$|\nabla f(x_k+\alpha_k p_k)^T p_k| \leq \sigma |\nabla f(x_k)^T p_k| \tag{2.13}$$

Con (2.13) tampoco se le permite a la pendiente ser demasiado positiva; en conjunto las condiciones (2.11) y (2.13) se conocen como condiciones de Wolf fuertes, y tienen como objetivo, garantizar que el paso α_k esté en una vecindad del mínimo local

Lema 2.2. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y sea p_k una dirección de descenso en x_k. Si f es acotada inferiormente a lo largo del rayo $\{x_k+\alpha p_k\}$ con $\alpha>0$. Entonces, si $0<\gamma<\sigma<1$ existen intervalos de pasos lineales que satisfacen las condiciones de Wolfe (2.11) y (2.12) y las condiciones de Wolfe fuertes (2.11) y (2.13).

Martes, 31 de mayo de 2022.

Ejercicio 4

$$\|p\|_A = \sqrt{p^T H^T H p} = \|Hp\|_{\mathbb{R}^n} = 1$$

$$\nabla f(x)^T p = \nabla f(x)^T H^{-1} H p = \left[(H^{-1})^T \nabla f(x)\right]^T Hp$$

$$\text{cs} \geq -\|H^{-T}\nabla f(x)\|_{\mathbb{R}^n} \|Hp\|_{\mathbb{R}^n} = -\|H^{-T}\nabla f(x)\| \leftarrow \text{cota inferior.}$$

$$= - \frac{\| H^{-T} \nabla f(x) \|^2}{\| H^{-T} \nabla f(x) \|} = \frac{- [H^{-T} \nabla f(x)]^T [H^{-T} \nabla f(x)]}{\| H^{-T} \nabla f(x) \|}$$

[*]

$$= - \nabla f(x)^T \frac{(H^{-1} (H^{-1})^T \nabla f(x))}{\| H^{-T} \nabla f(x) \|}$$

Para que valor de p, [*] se verifica

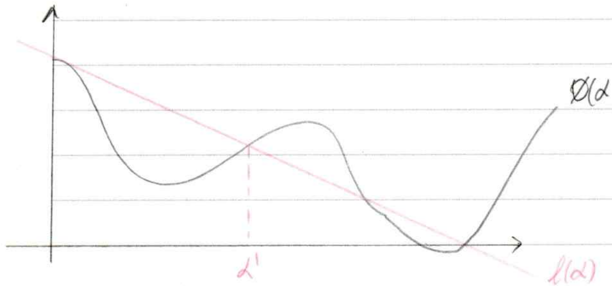
$$p = - \frac{H^T (H^{-1})^T \nabla f(x)}{\| H^{-T} \nabla f(x) \|}$$

$$\|p\|_A = \|H p\|_{\mathbb{R}^n} = \frac{\| H^{-T} \nabla f(x) \|}{\| H^{-T} \nabla f(x) \|} = 1.$$

Demostración (lema 2.2) $\to$ Wolf débil (2.11) (2.12)

P.D. Existen intervalos de pasos lineales que cumplen $\to$ Wolf fuerte (2.11) (2.13)

Puesto que (de (2.12.*)) $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ está acotada inferiormente $\forall \alpha$ y $0 \leq \gamma' \leq \sigma < 1$, existe al menos un punto de intersección entre $\phi(\alpha)$ y $\ell(\alpha) = f(x_k) + \alpha \gamma' \nabla f(x_k)^T p_k$



Notemos α', el menor valor de los puntos de intersección de α

$$\ell(\alpha') = \phi(\alpha')$$

$$f(x_k) + \gamma' \alpha' \nabla f(x_k)^T p_k = f(x_k + \alpha' p_k), \quad (0)$$

de donde, la condición (2.11) se verifica $\forall \alpha \in (0, \alpha')$.

Por otro lado, utilizando el teorema del valor medio integral, existe $\alpha'' \in (0, \alpha')$ tal que

$$f(x_k + \alpha' p_k) - f(x_k) = \alpha' \nabla f(x_k + \alpha'' p_k)^T p_k \quad (1)$$

Reemplazando, (0) en (1), se sigue que

$$\alpha' \nabla f(x_k + \alpha'' p_k)^T p_k = \alpha' \underbrace{\nabla f(x_k)^T p_k}_{<0} > \sigma \nabla f(x_k)^T p_k \quad ②$$

$$\gamma' \nabla f(x_k)^T p_k > \sigma \nabla f(x_k)^T p_k$$

Consecuentemente, α'' satisface (2.11) y (2.12) de manera estricta. Más que eso, gracias a la continuidad de ∇f las desigualdades anteriores se verificarán también en una vecindad de α'', dicha vecindad corresponde al intervalo buscado.

Para Wolfe fuerte, puesto que $\nabla f(x_k)^T p_k < 0$, de (2) se sigue que

$$| \nabla f(x_k + \alpha p_k)^T p_k | < \sigma | \nabla f(x_k)^T p_k |$$

Lo cual, conjuntamente con la continuidad del ∇f implican el resultado

Teorema 2.12. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y sea ∇f uniformemente continua en el conjunto de nivel $N_0 = \{ x : f(x) \leq f(x_0) \}$. Supongamos que N_0 es compacto, entonces $\{\alpha_k\}$ escogidos con la estrategia de Wolfe satisfacen la condición de factibilidad de la búsqueda lineal

Demostración

De la condición (2.11) y ya que p_k es una dirección de descenso, se tiene que

$$f(x_k + \alpha_k p_k) - f(x_k) \leq \gamma' \alpha_k \underbrace{\nabla f(x_k)^T p_k}_{<0} < 0 \quad \forall k$$

luego, $x_k \in N_0$ ($f(x_{k+1}) \leq f(x_k) \leq f(x_{k-1}) \leq \cdots \leq f(x_0)$)

Usando la compacidad de N_0 y dado que f es continua, sabemos que alcanzará su mínimo, de donde, f está acotada inferiormente
Y podemos utilizar el resultado del Lema 2.2, es decir, existen intervalos en los que se cumplen las condiciones de Wolfe.

Para probar (2.9) utilizaremos un argumento de contradicción, i.e., asumiremos que existe $K \subset \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x_k + \alpha_k) - f(x_k) \longrightarrow 0 \quad y \quad \frac{-\nabla f(x_k)^T p_k}{\| p_k \|} \geqslant \varepsilon \qquad (1)$$

De (2.12) y utilizando C.S.

$$\begin{aligned} \|p_k\| \, \|\nabla f(x_k + \alpha_k p_k) - \nabla f(x_k)\| &\geqslant (\nabla f(x_k + \alpha_k p_k) - \nabla f(x_k))^T p_k \\ &\geqslant \sigma \nabla f(x_k)^T p_k - \nabla f(x_k)^T p_k \\ &= -(1-\sigma) \nabla f(x_k)^T p_k \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x_k + \alpha_k p_k) - \nabla f(x_k)\| &\geqslant (1-\sigma) \left(- \frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|} \right) \\ &\overset{\text{de } (1)}{\geqslant} (1-\sigma) \varepsilon \end{aligned}$$

Por otro lado, de la continuidad uniforme de ∇f en N_0, existe $\beta > 0$ (independiente x_k) tal que

$$\|\nabla f(x_k + \alpha_k p_k) - \nabla f(x_k)\| \leq (1-\sigma)\varepsilon^{(3)} \quad \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \|d\| \leq \beta$$

De aquí concluimos que $\alpha_k \|p_k\| > \beta$, ya que caso contrario (3) se verificaría, lo cual contradice (2). Por tanto $\forall k \in K$ se sigue que

$$\alpha_k \|p_k\| > \beta$$

Por tanto, (usando (2.11))

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x_k + \alpha_k p_k) &\geqslant - \alpha_k \gamma \nabla f(x_k)^T p_k \frac{\|p_k\|}{\|p_k\|} \\ &= \gamma \underbrace{\alpha_k \|p_k\|}_{> \beta} \underbrace{\left(- \frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|p_k\|} \right)}_{\geqslant \varepsilon} \geqslant \gamma \delta \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

de donde $f(x_k + \alpha_k p_k) - f(x_k) \not\to 0$ lo que contradice (0).

Ejemplo. Implementar el método del descenso profundo para el siguiente problema

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$x_0 = (2,1)$

$p_k = -\nabla f(x_k)$ Notemos que $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$

$p_0 = -\nabla f(x_0) = -(2(2), 2(1)) = (-4,-2)$

$\alpha_1 = x_0 + \alpha_0 p_0 = (2,1) + \alpha_0(-4,-2)$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \min_{\alpha > 0} f(x_0 + \alpha p_0) = \min f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \min_{\alpha > 0} f((2-\alpha 4, 1 - 2\alpha)) = \min_{\alpha > 0} (2-\alpha 4)^2 + (1-2\alpha)^2 \\ &= (4 - 16\alpha + \alpha^2 16) + (1 - 4\alpha + 4\alpha^2) = 5 - 20\alpha + 20\alpha^2 \\ &\Rightarrow 40\alpha - 20 = 0 \Rightarrow \alpha = 1/2 \end{aligned}$$

$\therefore x_1 = (2,1) + 1/2(-4,-2) = (2,1) - (2,1) = (0,0)$

Así $\nabla f(x_1) = 0$.

Viernes, 3 de junio de 2022.

Sección 2.4 Métodos de Newton y sus variaciones

Las direcciones de descenso pueden tener varias formas una familia especial está formada por direcciones de la forma

$$p_k = - H_k^{-1} \nabla f(x_k) \qquad [*]$$

dónde $\{H_k\}$ es una sucesión de matrices simétricas y definidas positivas tales que para $(0 < m < M)$

$$m \|q\|^2 \leq q^T H_k q \leq M \|q\|^2 \qquad \forall k \ \forall q \in \mathbb{R}^n \qquad [2.14]$$

Notemos que las direcciones de este tipo verifican la condición del ángulo

$$-\frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{\|\nabla f(x_k)\| p_k} \geq \eta$$

Simétrica ^ Definida positiva => Inversa

En efecto, tenemos que

$$\frac{-\nabla f(x_k)^T p_k}{\|\nabla f(x_k)\|\,\|p_k\|} = \frac{-\nabla f(x_k)^T H_k^{-1} \nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|\,\|H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|}$$

$$= \frac{[H_k H_k^{-1} \nabla f(x_k)^T]\, H_k^{-1}\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|\,\|H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|}$$

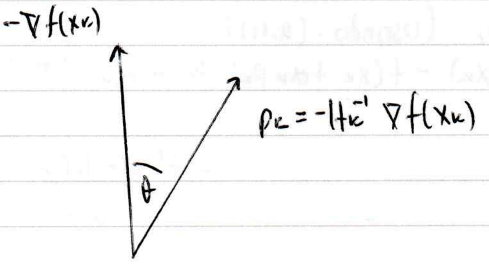
$$= \frac{[H_k^{-1}\nabla f(x_k)]^T H_k^{T} (H_k^{-1}\nabla f(x_k))}{\|H_k H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|\,\|H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|}$$

$$\geq \frac{m\,\|H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|^2}{\|H_k H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|\,\cancel{\|H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|}} = \frac{m\,\|H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|}{\|H_k H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|}.$$

Por otro lado

$$\|H_k H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|^2 = (H_k H_k^{-1}\nabla f(x_k))^T (H_k H_k^{-1}\nabla f(x_k))$$
$$= H_k^{-1}\nabla f(x_k)^T H_k^{T} H_k (H_k^{-1}\nabla f(x_k))$$
$$< M^2 \|H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|^2$$

$\text{Sup}\quad q^T H q \leq M\|q\|^2 \qquad q^T H^T H q \leq M^2 \|q\|^2$



Luego:

$$\frac{1}{\|H_k H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|} \geq \frac{1}{M\,\|H_k^{-1}\nabla f(x_k)\|}$$

De donde

$$\frac{-\nabla f(x_k)^T p_k}{\|\nabla f(x_k)\|\,\|p_k\|} \geq \frac{m}{M} = n$$

2.4.1. Métodos de Newton.

En esta sección estudiaremos un método de descenso cuyas direcciones se definen como la solución de un sistema no lineal, resuelto con el método de Newton

Se trata de optimizar la función $f(x_k+p_k)$ en cada iteración x_k respecto a la dirección p. Suponiendo que f es suficientemente regular para realizar la expansión de Taylor de orden 2, obtenemos el siguiente método cuadrático.

$$q(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + 1/2\, p^T \nabla^2 f(x_k)\, p. \qquad [2.15]$$

El minimizante de [2.15] (derivando respecto a p) cumple que

$$\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)\, p = 0 \qquad \nabla^2 f(x_k) p = -\nabla f(x_k)$$
$$p_k = -(\nabla^2 f(x_k))^{-1}\nabla f(x_k) = -H_k^{-1}\nabla f(x_k) \qquad [2.16]$$

} fórmula actualización de Newton

La ecuación [2.16] corresponde a la ecuación de Newton para resolver

$$\nabla f(x) = 0.$$

Iteración clásica del método de Newton para resolver $F(x)=0$

$$F'(x)\,\delta_x = -F(x)$$

Asumiendo que $\nabla^2 f(x)$ satisface [2.14] se obtendrá que el método converge. En general, sin embargo a pesar de que ∇f es definido positivo en el mínimo, nada garantiza que lo sea a lo largo de las iteraciones.

Observemos

$$\nabla^2 f(x_k) = \nabla^2 f(x_*) + [\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*)]$$

Se obtiene una condición alternativa asumiendo la positividad de $\nabla^2 f(x^*)$ y Lipchitz continuidad de $\nabla^2 f$ en una vecindad de x^*

Teorema 2.13. Sea x^* una solución local de f ($\min f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$) con $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (C^2) y sea $\nabla^2 f$ lipchitz continua en una vencidad V de x^* y

$$p^T \nabla^2 f(x^*) p \geq k\|p\| \qquad \forall p \in \mathbb{R}^n$$

para $k>0$. Luego, existe una constande $\rho>0$ tal que si $\|x_0 - x^*\| < \rho$, entonces

a) Las iteraciones de Newton dadas por

$$x_{k+1} = x_k - \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k) \qquad [2.17]$$

convergen a x^*.

b) Existe $\hat{c}>0$ tal que

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \hat{c}\, \|x_k - \hat{x}\|^2 \quad \Big\} \text{ convergencia cuadrática} \qquad (2.18)$$

Demostración

De la forma de las iteraciones (2.17) y ya que x^* es un punto estacionario, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\| &= \|x_k - \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k) - x^*\| \\
&= \|(\nabla^2 f(x_k))^{-1} [\nabla^2 f(x_k)(x_k - x^*) - \nabla f(x_k) + \nabla f(x^*)]\| \\
&\leq \|\nabla^2 f(x_k)^{-1}\| \, \|\nabla f(x^*) - \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_k - x^*)\|
\end{aligned}$$

Luego, del teorema del valor medio integral exist $t \in (0,1)$, tal qe.

[*] $$g(b) - g(a) = \int_0^1 g'(\alpha + t(b-a))(b-a)\,dt$$

$$\nabla f(x^*) - \nabla f(x_k) = \int_0^1 \nabla^2 f(x_k + t(x^* - x_k))(x^* - x_k)\,dt$$

De donde

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(x^*) - \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_k - x^*)\| &= \left\| \int_0^1 [\nabla^2 f(x_k + t(x^* - x_k)) - \nabla^2 f(x_k)](x_k - x^*)\,dt \right\| \\
&\leq \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k + t(x^* - x_k)) - \nabla^2 f(x_k)\|\,dt \; \|x_k - x^*\| \\
&\leq \int_0^1 L\|x^* - x_k\|\,dt \; \|x_k - x^*\| \\
&= L\|x_k - x^*\|^2 \int_0^1 t\,dt \\
&= L\|x_k - x^*\|^2 \, t^2/2 \Big|_0^1 \\
&= L/2 \, \|x_k - x^*\|^2
\end{aligned}$$

De aquí,

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq L/2 \, \|\nabla^2 f(x_k)^{-1}\| \, \|x_k - x^*\|^2 \qquad [1]$$

Además ya que $\nabla^2 f(x^*)$ es definida positiva, entonces existe $(\nabla^2 f(x_k))^{-1}$!

Así, tomando

$$\rho = \frac{1}{2L\|(\nabla^2 f(x_k))^{-1}\|}$$

Lema Von Neuman Sea $\|\cdot\|$ consistente. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|A\| < 1$, entonces $I - A$ es no singular y

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k,$$

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ no singular y $\|A^{-1}(B - A)\| < 1$, entonces:

$$B^{-1} = \sum_{k=0} (I - A^{-1}B)^k A^{-1} \quad y \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(B-A)\|}$$

En la demostración del [teorema 2.13] tomamos

$$B = \nabla^2 f(x_0) \qquad y \qquad A = \nabla^2 f(x^*)$$

Ahora, ya que $\|x^* - x_0\| < \rho$ implica que

$$\begin{aligned} \|(\nabla^2 f(x^*))^{-1}(\nabla^2 f(x_0) - \nabla^2 f(x^*))\| &\leq \|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \, \|\nabla^2 f(x_0) - \nabla^2 f(x^*)\| \\ &\leq L \|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \, \|x_0 - x^*\| \\ &\leq L \|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \rho \\ &= L \|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \frac{1}{2L\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\|} < \frac{1}{2} < 1 \end{aligned} \quad [2]$$

Luego, utilizando el lema de Von Newman se tiene que

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 f(x_0)^{-1}\| &\leq \frac{\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\|}{\Delta} \quad \text{con } \Delta = 1 - \|(\nabla^2 f(x^*)^{-1})(\nabla^2 f(x_0) - \nabla^2 f(x^*))\| \\ &< 1 - \frac{1}{2} \qquad \text{por } [2] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

luego

$$\frac{1}{\Delta} < 2$$

De dónde,

$$\|(\nabla^2 f(x_0)^{-1}\| \leq 2 \|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \quad [3]$$

Usando este resultado en [1]

$$\begin{aligned} \|x_1 - x^*\| &\leq \frac{L}{2} \|\nabla^2 f(x_0)^{-1}\| \, \|x^* - x_0\|^2 \\ &= \frac{L}{2} \|\nabla^2 f(x_0)^{-1}\| \, \|x^* - x_0\| \rho \\ &\leq \frac{L}{2} 2 \|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \, \|x^* - x_0\| \frac{1}{2L\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\|} = \frac{1}{2} \|x^* - x_0\| \end{aligned}$$

Lunes, 6 de junio de 2022.

(Continuación de la demostración)

$$\|x_1 - x^*\| \leq 1/2 \|x^* - x^0\|$$

Utilizando un método inductivo

$$\|x_k - x^*\| \leq \rho \Rightarrow \|x_{k+1} - x^*\| \leq 1/2 \|x_k - x^*\|$$

Y, por tanto, $x_k \to x^*$. $(\|x_1 - x^*\| < 1/2 \|x_0 - x^*\|, \ \|x_2 - x^*\| < (1/2)^2 \|x_0 - x^*\|$

(Aquí concluye la demostración de a) $\qquad 0 \leq \|x_n - x^*\| < (1/2)^n \|x - x^*\| \to 0$

Parte b) $\exists \hat{c} > 0$ tal que $\|x_{k+1} - x^*\| \leq \hat{c} \|x_k - x^*\|^2$

Procediendo de manera similar a [3], tenemos que

$$\|(\nabla^2 f(x_k))^{-1}\| \leq 2 \|(\nabla^2 f(x^*))^{-1}\| \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad [*]$$

De donde, de [1], tendría que

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &\leq L/2 \, \|(\nabla^2 f(x_k))^{-1}\| \, \|x_k - x^*\|^2 \\ &\leq \underbrace{L \, \|(\nabla^2 f(x^*))^{-1}\|}_{= C} \, \|x_k - x^*\|^2 \qquad \text{por } [*] \\ &= C \|x_k - x^*\|^2 \end{aligned}$$

Así, tomando $\hat{C} = L \|(\nabla^2 f(x^*))^{-1}\|$, se verifica el resultado deseado. □

Definición 2.8. (Nociones de velocidad de convergencia)

Sean $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x^* \in \mathbb{R}^n$, luego

a) $x_k \to x^*$ q-cuadráticamente si

$x_k \to x^*$ $\exists\ \kappa > 0$ tal que $\|x_{k+1} - x^*\| \leq \kappa \|x_k - x^*\|^2$;

$$\|x_{k+1} - x^*\| = O(\|x_k - x^*\|^2)$$

b) $x_k \to x^*$ q-superlinealmente de orden $\alpha > 1$ si $x_k \to x^*$ y existe $\kappa > 0$ tal que

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \kappa \|x_k - x^*\|^\alpha$$

c) $x_k \to x^*$ q-superlinealmen si

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 0$$

(eq. $\exists\ \varepsilon_k > 0$ tal que $\varepsilon_k \searrow 0$ tal que $\|x_{k+1} - x^*\| \leq \varepsilon_k \|x_k - x^*\|$, i.e.

$$\|x_{k+1} - x^*\| = o(\|x_k - x^*\|)$$

d) $x_k \to x^*$ q-linealmente con factor $\rho \in (0,1)$ si

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \rho \|x_k - x^*\|$$

Definición 2.9. Un algoritmo es q-cuadráticamente (q-superlinealmente convergente, etc.) convergente si genera una sucesión (x_k) que converge a x^* q-cuadráticamente (q-superlinealmente, etc.) dada una iteración inicial x_0 suficientemente cerca a x^*.

De las definiciones anteriores y el [teorema 2.13] tenemos que el método de Newton es q-cuadráticamente localmente convergente.
Para obtener una convergencia para puntos iniciales arbitrarios se considera una estrategia de globalización. Una posibilidad es escoger las direcciones de Newton que verifiquen

$$-\nabla f(x_k)^T d_k \geq \min\{\rho_1, \rho_2 \|d_k\|^p\} \|d_k\|^2 \qquad [2.19]$$

con ρ, ρ_1 y $\rho_2 > 0$.
Si (2.19) no se verifica, se toma la dirección del profundo descenso
Esto, junto con una estrategia de búsqueda lineal da lugar al siguiente algoritmo.

Algoritmo 2 (Newton globalizado)

```
1. Escoger $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in (0,1)$, $\gamma \in (0,1)$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, $p > 0$, $k = 0$.
2. Repetimos hasta un determinado criterio de parada
    2.1. Calcular $d_k$ resolviendo la fórmula de actualización de Newton
             $\nabla^2 f(x_k) d_k = -\nabla f(x_k)$
         si
             $\nabla f(x_0)^T d_k \geq \min\{\rho_1, \rho_2 \|d_k\|^p\} \|d_k\|^2$
         entonces $p_k = d_k$.
         Caso contrario $p_k = -\nabla f(x_k)$
    2.2. Calcular la longitud del paso $\alpha_k$ con la regla de Armijo
    2.3 Actualiza $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$,    $k = k+1$
```

Teorema 2.14. Sea $f \in C^2$, el algoritmo 2 se detiene en $\nabla f(x_k) = 0$ o genera una sucesión $(x_k)_k$ cuyos puntos de acumulación son puntos estacionarios de f.

2.4.2. Métodos tipo Newton

En varios problemas no es posible o es muy costoso calcular la Hessiana en cada iteración. En su lugar se construyen aproximaciones de la Hessiana que son utilizadas para calcular direcciones de descenso. Si las matrices satisfacen determinadas condiciones la convergencia q-superlineal del algoritmo se verifica.
Para determinar estas condiciones analizaremos el método de

Newton $\underset{(\nabla f(x))}{F(x)=0}$ con F suficientemente regular.

Lema 2.3. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable tal que F( ) y $F(\bar{x})$ invetible, para algún $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces existen constantes $\varepsilon \geq 0$ y $\gamma > 0$ tales que

$$\|F(x)\| \geq \gamma \|x - \bar{x}\| \qquad \forall x \in B_\varepsilon(\bar{x})$$

Demostración

Notemos que

$$\|x - \bar{x}\| = \|F'(\bar{x})F'(\bar{x})^{-1}(x - \bar{x})\| \leq \|F'(\bar{x})^{-1}\| \, \|F'(\bar{x})(x - \bar{x})\|$$

Tomando

$$\gamma = \frac{1}{2\|F'(x)^{-1}\|} \iff 2\gamma = \frac{1}{\|F'(x)^{-1}\|}$$

$$2\gamma\|x - \bar{x}\| = \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|F'(x)^{-1}\|} \leq \frac{\|F'(x)^{-1}\| \, \|F'(\bar{x})(x - \bar{x})\|}{\|F(x)^{-1}\|}$$

$$2\gamma\|x - \bar{x}\| \leq \|F'(\bar{x})(x - \bar{x})\| \qquad [1]$$

Por otro lado, como F es diferenciable, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|F(x) - F(\bar{x}) - F'(\bar{x})(x - \bar{x})\| \leq \gamma\|x - \bar{x}\| \qquad \forall x \in B_\varepsilon(\bar{x}) \qquad [*]$$

De [1] y ya que $F(\bar{x}) = 0$, se sigue que $\forall x \in B_\varepsilon(\bar{x})$

$$\begin{aligned} 2\gamma\|x - \bar{x}\| &\leq \|F(x) - (F(x) - F(\bar{x}) - F'(\bar{x})(x - \bar{x}))\| \\ &\leq \|F(x)\| + \|F(x) - F(\bar{x}) - F'(\bar{x})(x - \bar{x})\| \\ &\leq F(x) + \gamma\|x - \bar{x}\| \end{aligned}$$

de donde

$$\gamma\|x - \bar{x}\| \leq F(x)$$

y el resultado se verifica.

Lunes 13 de junio de 2022

Corrección de la prueba 1.

P.1.a) $\nabla f(x) = Cx + b$, $\nabla^2 f(x) = C$ es estrictamente convexa pues C es definida positiva. (0.05pt)

b) $\hat{\alpha} > 0$ (0.25pt)

$$f(x + \alpha p) = b^T(x + \alpha p) + \frac{1}{2}(x + \alpha p)^T C (x + \alpha p)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = b^T b + x^T C p + a p^T C p = 0 \implies \hat{\alpha} = -\frac{\nabla f(x)^T p}{p^T C p}$$

Como p es dirección de descenso $\nabla f(x)^T p < 0$ y $p^T C p > 0$, entonces $\hat{\alpha} > 0$.

c) $f(x + \hat{\alpha} p) - f(x) = b^T x + \hat{\alpha} b^T p + \frac{1}{2} x^T C x + \hat{\alpha} x^T C p + \frac{\hat{\alpha}^2}{2} p^T C p - b^T x - \frac{1}{2} x^T C x$ (0.4pt)

$$\begin{aligned} &= \hat{\alpha}(b^T + x^T C)p + \frac{\hat{\alpha}^2}{2} p^T C p \\ &= -\frac{(\nabla f(x)^T p)^2}{p^T C p} + \frac{1}{2}\frac{(\nabla f(x)^T p)^2}{(p^T C p)^2}(p^T C p) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{(\nabla f(x)^T p)^2}{p^T C p} = \frac{1}{2}\hat{\alpha}\nabla f(x)^T p \end{aligned}$$

Para $\gamma = 1/2$, la regla de armijo se verifica con igualdad y también para $\gamma \in]0, 1/2[$

Ejercicio 2.

$$
\begin{aligned}
p^T \nabla^2 f(x)\, p &= p^T \nabla^2 f(x^*) p + p^T (\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(x^*) p \\
&\geq \lambda_s \|p\|^2 - p^T (\nabla^2 f(x^*) - \nabla^2 f(x)) p \\
&\geq \lambda_s \|p\|^2 - \|p\|^2 \| \nabla^2 f(x^*) - \nabla^2 f(x) \| \\
&\geq \lambda_s \|p\|^2 - \|p\|^2 L \| x^* - x \| \\
&= \|p\|^2 (\underbrace{\lambda_s - L \| x - x^* \|}_{¿>0?})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p^T Q p &\leq \|p\| \, \|Qp\| \\
&\leq \|p\| \, \|Q\| \, \|p\| = \|p\|^2 \|Q\| \\
&\Rightarrow - p^T Q p \geq - \|Q\| \, \|p\|^2
\end{aligned}
$$

$$L\|x - x^*\| - \lambda_s < 0 \Rightarrow \|x - x^*\| < \lambda_s / L =: \rho$$

Ejercicio 3.

$$\nabla f(x_k) - \nabla f(\bar{x}) = \int_0^1 \nabla^2 f(\bar{x} + \tau(x_k - \bar{x})) \, (x_k - \bar{x})\, d\tau \qquad \|a\|\|b\| \geq a^T b$$

$$\Rightarrow \| \nabla f(x_k) - \underbrace{\nabla f(\bar{x})}_{=0} \| = \| \int_0^1 \nabla^2 f(\bar{x} + \tau(x_k + \bar{x})) (x_k - \bar{x}) d\tau \|$$

$$\Rightarrow \| \nabla f(x_k) \| \, \|x_k - \bar{x}\| = \| \int_0^1 \nabla^2 f(\bar{x} + \tau(x_k - \bar{x})) (x_k - \bar{x}) d\tau \| \, \|x_k - \bar{x}\|$$

$$\geq (x_k - \bar{x})^T \int_0^1 \nabla^2 f(\bar{x} + \tau(x - \bar{x})) (x_k - \bar{x})\, d\tau$$

Notemos que $\bar{x}, x_k \in N_0$, como N_0 es convexo, entonces $\bar{x} + \tau (x_k - \bar{x}) \in N_0$. Así

$$(x_k - \bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x} + \tau (x_k - \bar{x})) (x_k - \bar{x}) \geq m \| x_k - \bar{x} \|^2$$

y de la monotonía de la integral

$$\int_0^1 (x_k - \bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x} + \tau(x_k - \bar{x}))(x_k - \bar{x}) \geq m \| x_k - \bar{x} \|^2 \cancel{\int_0^1 \tau}$$

luego

$$\| \nabla f(x_k) \| \, \| x_k - \bar{x} \| \geq m \| x_k - \bar{x} \|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \| \nabla f(x_k) \| \geq m \|x_k - x\| \geq 0$$

Utilizando el teorema del Sanduche o estricción, entonces $\| \nabla f(x_k) \| \to 0$

$$\|x_k - x\| \to 0 \Rightarrow x_k \to x$$

Ejercicio 4.

Notemos que $\|\cdot\|$ es convexa y además $g(x) = x^2$ ($g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$). De donde $f = g(\|\cdot\|)$ la composición de dos funciones convexas con la función externa creciente entonces es convexa.

Por otro lado, sabemos que todo punto estacionario es un mínimo global, basta por tanto caracterizar los puntos estacionarios

$$\nabla f(x)^T v = (Ax - b, Av)$$

$$\nabla f(x^*)^T v = (Ax^* - b, Av) = (A^T A x^* - A^T b, v),$$

y como $A^T A x^* - A^T b = 0$, entonces

$$\nabla f(x^*) = 0$$

- $A^T A$ rango completo $\Rightarrow A^T A$ es invertible

$$A^T A x = A^T b \quad \text{tieme solución única.}$$

Del literal anterior, x^* es solución única del problema (0.1)

O

Consideremos el sistema no lineal $F(x) = 0$ y supongamos que los incrementos s_k se calculan de la siguiente manera

$$H_k s_k = - F(x_k), \qquad x_{k+1} = x_k + s_k \tag{2.20}$$

donde $H_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son invertibles.

Observemos ahora que condiciones deben verificar las matrices H_k de la sucesión $(H_k)_k$ para garantizar la convergencia q-superlineal del esquema iterativo (2.20).

Teorema 2.15. Sea $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable y $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ tal que $F'(\bar{x})$ sea invertible. Si la sucesión $(x_k)_k$ generada por (2.20) converge a $\bar{x}$ con $\bar{x}\neq x_k$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Entonces, los siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $(x_k)_k$ converge q-superlinealmente a $\bar{x}$ y $F(\bar{x})=0$

b) $\|(H_k - F'(\bar{x}))(x_{k+1}-x_k)\| = o(\|x_{k+1}-x_k\|)$

c) $\|(H_k - F'(x_k))(x_{k+1}-x_k)\| = o(\|x_{k+1}-x_k\|)$

Observación: Las condiciones b y c, reciben el nombre de condiciones de Dennis-Moré

Demostración

Del teorema del valor medio, existe $t\in(0,1)$ tal que

$$F(x_{k+1}) = F(x_k) + \int_0^1 F'(x_k + t(x_{k+1}-x_k))(x_{k+1}-x_k)\,dt$$

de (2.20)

$$-F(x_k) = H_k s_k = H_k(x_{k+1}-x_k)$$

$$F(x_{k+1}) = \int_0^1 [F'(x_k+t(x_{k+1}-x_k)) - F'(\bar{x})](x_{k+1}-x_k)\,dt - H_k(x_{k+1}-x_k) + F'(\bar{x})(x_{k+1}-x_k) \qquad [2.21]$$

b) => a)

De [2.21], se sigue que

$$\|F(x_{k+1})\| \le \int_0^1 \|F'(x_k+t(x_{k+1}-x_k)) - F'(\bar{x})\|\,dt\;\|x_{k+1}-x_k\| + \underbrace{\|H_k(x_{k+1}-x_k) - F'(\bar{x})(x_{k+1}-x_k)\|}_{\text{por hipótesis } = o(\|x_{k+1}-x_k\|)}$$

Queremos probar que $\int \|\cdot\|\,dt\,\|x_{k+1}-x_k\|$ es un $o(\|x_{k+1}-x_k\|)$

$$\frac{\int_0^1 \|F'(x_k+t(x_{k+1}-x_k))\|\,dt\;\cancel{\|x_{k+1}-x_k\|}}{\cancel{\|x_{k+1}-x_k\|}} \to 0$$

Cuando $x_k \to \bar{x}$ utilizando la continuidad de F'. Es decir, se sigue que

$$\|F(x_{k+1})\| = o(\|x_{k+1}-x_k\|)$$

$$\|F(x_{k+1})\| \le o(\|x_{k+1}-x_k\|) + o(\|x_{k+1}-x_k\|)$$

$$\le \xi_k\|x_{k+1}-x_k\| + \eta_k\|x_{k+1}-x_k\|$$

$$\Rightarrow \|F(x_{k+1})\| \le \bar{\xi}_k\|x_{k+1}-x_k\|$$

$$\hookrightarrow \bar{\xi}_k \to 0.$$

$$\therefore \|F(x_{k+1})\| = o(\|x_{k+1}-x_k\|) \qquad x_k \to \bar{x}$$

de donde $\exists\ \varepsilon_k \downarrow 0$ y $N>0$ tales que

$$0 \le \|F(x_{k+1})\| \le \varepsilon_k\|x_{k+1}-x_k\| \qquad \forall k>N$$

es decir

$\lim\limits_{k\to+\infty} F(x_k)=0$ pero $x_k \to \bar{x}$, luego por la unicidad del límite

$$\lim_{k\to+\infty} F(x_k) = F(\bar{x}) = 0.$$

Martes, 14 de junio de 2022.

- continuación de la demostración-

Para verificar la velocidad de convergencia. Notemos que como $F'(\bar{x})$ es invertible, del [Lema 2.3], existen $\delta>0$ tales que

$$\|F(x_{k+1})\| \ge \delta\|x_{k+1}-\bar{x}\|$$

para k suficientemente grande tal que $\varepsilon_k \le \delta/2$

$$\|x_{k+1}-\bar{x}\| \leq 1/\gamma \|F(x_{k+1})\| \leq \varepsilon_k/\gamma \|x_{k+1}-x_k\|$$
$$\leq \varepsilon_k/\gamma \|x_{k+1}-\bar{x}\| + \varepsilon_k/\gamma \|x_k-\bar{x}\|$$
$$\leq \frac{1}{2} \|x_{k+1}-\bar{x}\| + \frac{\varepsilon_k}{\gamma} \|x_k-\bar{x}\|$$

$$\Rightarrow 1/2 \|x_{k+1}-\bar{x}\| \leq \varepsilon_k/\gamma \|x_k-\bar{x}\|$$
$$\Rightarrow \|x_{k+1}-\bar{x}\| \leq \underbrace{\frac{2\varepsilon_k}{\gamma}}_{=\hat{\varepsilon}_k \searrow 0} \|x_k-\bar{x}\|$$

Lo cual implica que $\|x_{k+1}-\bar{x}\| = \theta(\|x_k-\bar{x}\|)$ [Probamos la caracterización de la parte c definición 2.8]

a) => b)

$$\|x_k-\bar{x}\| \leq \|x_{k+1}-x_k\| + \underbrace{\|x_{k+1}-\bar{x}\|}_{\leq 1/2 \|x_k-\bar{x}\|}$$

De donde, se tiene que $\|x_k-\bar{x}\| \leq 2\|x_{k+1}-x_k\|$ [1]. Por otro lado, ya que $x_k \to \bar{x}$, la sucesión pertenece a una bola alrededor de $\bar{x}$. Luego,

$$\|F(x_{k+1})\| = \|F(x_{k+1})-F(\bar{x})\| \leq \sup_{x\in B} \|F'(x)\| \|x_{k+1}-\bar{x}\|$$ } teo 1.8 Ambrosetti   teo valor medio [2]

Consecuentemente, usando [1] y [2] en la expresión [2.21]

$$\|(H_k-F'(\bar{x}))(x_{k+1}-x_k)\| \leq \|F(x_{k+1})\| + \int_0^1 \|F'(x_k+t(x_{k+1}-x_k))-F(\bar{x})\| dt \; \|x_{k+1}-x_k\|$$

[usando 2] $\leq L\|x_{k+1}-\bar{x}\| + \theta(\|x_{k+1}-x_k\|)$

[De la convergencia q-superlineal] $\leq L\varepsilon_k\|x_k-\bar{x}\| + \theta(\|x_{k+1}-x_k\|)$

[usando 1] $\leq \underbrace{2L\varepsilon_k}_{=\hat{\varepsilon}_k>0}\|x_{k+1}-x_k\| + \theta(\|x_{k+1}-x_k\|) = \theta(\|x_{k+1}-x_k\|)$

lo que termina la demostración.

b) => c) De [b] ya que $x_k \to \bar{x}$, se tiene que

sumamos y restamos $F'(\bar{x})$

$$\|(H_k-F'(x_k))(x_{k+1}-x_k)\| = \|H_k(x_{k+1}-x_k) - F'(x_k)(x_{k+1}-x_k) - F'(\bar{x})(x_{k+1}-x_k) + F'(\bar{x})(x_{k+1}-x_k)\|$$
$$\leq \|(H_k-F'(\bar{x}))(x_{k+1}-x_k)\| + \|(F'(\bar{x})-F'(x_k))(x_{k+1}-x_k)\|$$
$$\leq \underbrace{\|(H_k-F'(\bar{x}))(x_{k+1}-x_k)\|}_{=\theta(\|x_{k+1}-x_k\|)} + \underbrace{\|F'(\bar{x})-F'(x_k)\|}_{\leq\varepsilon \text{ por la continuidad, tomando } \varepsilon=\varepsilon_k \text{ con } (\varepsilon_k)\searrow 0}\|x_{k+1}-x_k\| \quad [*]$$

Luego, en [*] por definición de θ, se tiene otro θ y sumandos, se sigue el resultado.

c) => b) (Similar a la anterior)

Supongamos que

$$\|(H_k-F'(x_k))(x_{k+1}-x_k)\| = \theta(\|x_{k+1}-x_k\|).$$

Así, notemos que

$$\|(H_k-F'(\bar{x}))(x_{k+1}-x_k)\| = \|H_k(x_{k+1}-x_k) - F'(\bar{x})(x_{k+1}-x_k) + F'(x_k)(x_{k+1}-x_k) - F'(x_k)(x_{k+1}-x_k)\|$$
$$\leq \|(H_k-F'(x_k))(x_{k+1}-x_k)\| + \|(F'(x_k)-F'(\bar{x}))(x_{k+1}-x_k)\|$$
$$\leq \theta(\|x_{k+1}-x_k\|) + \|F'(x_k)-F'(\bar{x})\| \|x_{k+1}-x_k\|$$
$$\leq \theta(\|x_{k+1}-x_k\|) + \varepsilon_k\|x_{k+1}-x_k\|$$
$$= \theta(\|x_{k+1}-x_k\|) + \theta(\|x_{k+1}-x_k\|)$$
$$= \theta(\|x_{k+1}-x_k\|) \checkmark$$

☐

El teorema anterior se verifica en particular si $x_k \to \bar{x}$ y $H_k \to F'(\bar{x})$, entonces (b) y (c) se verifican:

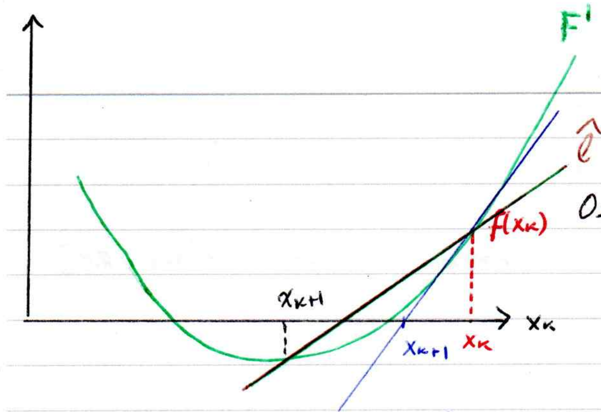
$$\|(H_k-F'(\bar{x}))(x_{k+1}-x_k)\| \leq \underbrace{\|H_k-F'(\bar{x})\|}_{\varepsilon_k\searrow 0 \text{ ya que } H_k\to F'(\bar{x})} \|x_{k+1}-x_k\| = \theta(\|x_{k+1}-x_k\|)$$

Viernes, 17 de junio de 2022.

Sección 2.5 Métodos Cuasi-Newton

En general, la matriz Hessiana es muy costosa o difícil de calcular en cada iteración. En su lugar, se propone construir aproximaciones de $\nabla^2 f$ en cada iteración x_k

Se busca obtener matrices definidas positivas que generen una dirección de descenso y que converjan más rápidamente que el método del descenso más profundo.



La idea del método de Newton es aproximar $f(x_{k+1})$ con $\ell(x_{k+1})$.

$$\ell(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

$$x = x_{k+1}$$

$$0 = \ell(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$-F(x) = F'(x_k)\,(x_{k+1} - x_k)$$

$$x_{k+1} - x_k = -(F'(x_k))^{-1} F(x_k)$$

La idea es usar otra recta $\hat{\ell}$ que aproxime a la recta ℓ y cuya pendiente sea cercana a f'. Así

$$m_{\hat{\ell}}^{k} = \frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

donde $m_{\hat{\ell}}^{k}(x_{k+1} - x_k) = F(x_{k+1}) - F(x_k)$. La idea de los métodos Cuasi-Newton consiste en construir una aproximación H_k de la Hessiana utilizando ecuaciones tipo secante

$$H_{k+1} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{d_k} = \underbrace{\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)}_{y_k} \qquad \text{Condición Cuasi-Newton [2.22]}$$

la ecuación [2.22] se conoce como condición Cuasi-Newton. Aquí estamos considerando una sucesión $\{H_k\}$ de matrices que aproximan $\nabla^2 f$ en cada iteración x_k

Consideremos ahora la expansión de Taylor de una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2 veces diferenciable en una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x) \approx \nabla f(x_{k+1}) + \nabla^2 f(x_{k+1})(x_k - x_{k+1})$$

Considerando $x = x_k$ y tomando $d_k = x_{k+1} - x_k$ y $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ se sigue que

$$\nabla^2 f(x_{k+1})^{-1} \underbrace{(\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k+1}))}_{-y_k} \approx \underbrace{(x_k - x_{k+1})}_{-d_k}$$

$$\underbrace{\nabla^2 f(x_{k+1})^{-1}}_{B_{k+1}} y_k \approx d_k \quad / \quad B_{k+1} y_k = d_k \qquad \text{Condición Cuasi-Newton [2.23]}$$

Observemos que $B_{k+1} = H_{k+1}^{-1}$, luego [2.23] también representa una condición cuasi-newton. Adicionalmente, notemos que si multiplicamos [2.22] por d_k^T

$$d_k^T H_{k+1} d_k = d_k^T y_k$$

de donde si $d_k^T y_k > 0$ entonces se obtendría que la matriz H_{k+1} es definida positiva. La expresión $d_k^T y_k$ se denomina condición de curvatura

Algoritmo 3 - Método Cuasi-Newton

1. Fijar $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $H_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $0 < \varepsilon < 1$, $k = 0$
2. Repetimos hasta verificar un criterio de parada $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$
   - 2.1 Calculamos

     $H_k d_k = -\nabla f(x_k)$ Si $H_k = \nabla^2 f$ Newton, si $H_k = Id$ descenso $(d_k = -\underset{= H_k^{-1}}{B_k} \nabla f(x_k))$
   - 2.2. Buscar $\alpha_k > 0$ con una estrategia de búsqueda lineal y actualizamos

     $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
   - 2.3 Actualizar H_{k+1} tal que verifique [2.22] (o tal que verifique [2.23])
   - 2.4 Tomar $k = k+1$ y volver al paso 2.

Es usual tomar $H_0 = I$, donde $d_0 = -\nabla f(x_0)$ es una dirección de descenso. Así mismo, aunque las condiciones Cuasi-Newton se deben verificar no son suficientes para garantizar que las matrices que se generan sean unívocamente determinadas.

Subsección 2.5.1. Actualización SR1 (Symmetric Rank-One)

La actualización de tipo SR1 consiste en construir la matriz H_{k+1} a partir de una modificación de la matriz H_k, de tal manera que se preserve su simetría.

La modificación de rango 1 consiste en sumar a la matriz H_k, una matriz de rango 1.

$$H_{k+1} = H_k + \gamma_k u_k u_k^T \qquad [2.24]$$

con $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $\|u_k\| = 1$ ($u_k \in \mathbb{R}^n$). Usando esta expresión en [2.22] se tiene que

$$y_k \underset{[2.22]}{\overset{}{=}} H_{k+1} d_k = (H_k + \gamma_k u_k u_k^T) d_k = H_k d_k + \gamma_k u_k \underbrace{u_k^T d_k}_{\in\mathbb{R}}$$
$$= H_k d_k + \gamma_k (u_k^T d_k) u_k$$

de donde

$$y_k - H_k d_k = \gamma_k (u_k^T d_k) u_k \qquad [a]$$

- Analicemos el caso, $y_k - H_k d_k = 0$

$$y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \Rightarrow \nabla f(x_{k+1}) = y_k + \nabla f(x_k)$$
$$= H_k d_k + \nabla f(x_k)$$
$$= -\nabla f(x_k) + \nabla f(x_k) = 0$$

(de la iteración del algoritmo 3)

- Caso contrario $y_k - H_k d_k \neq 0$, de [a] y ya que $\gamma_k(u_k^T d_k) \in \mathbb{R}$, el vector u_k está en la misma dirección que el vector $y_k - H_k d_k$, es decir existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que

$$u_k = \sigma (y_k - H_k d_k)$$

Así, en conjunto se tiene que

$$y_k - H_k d_k = \gamma_k (u_k^T d_k) u_k = \gamma_k (d_k^T u_k) u_k$$
$$= \gamma_k \sigma^2 \underbrace{(d_k^T (y_k - H_k d_k))}_{\in\mathbb{R}} (y_k - H_k d_k)$$

lo cual se verifica si y solamente si

$$\gamma_k \sigma^2 = (d_k^T (y_k - H_k d_k))^{-1}$$

Consecuentemente, reemplazando esto en [2.24]

$$H_{k+1} = H_k + \gamma_k \sigma^2 (y_k - H_k d_k)(y_k - H_k d_k)^T$$
$$= H_k + \frac{(y_k - H_k d_k)(y_k - H_k d_k)^T}{(y_k - H_k d_k)^T d_k} \qquad [2.25]$$

Con una construcción similar aplicada a la matriz B_k podemos obtener la fórmula de actualización de la matriz inversa B_k como sigue

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(d_k - B_k y_k)(d_k - B_k y_k)^T}{(d_k - B_k y_k)^T y_k} \qquad [2.26]$$

A pesar de que la construcción de las matrices de rango 1 es fácil, las actualizaciones del tipo SR1 presentan algunos inconvenientes.

- Las direcciones obtenidas no necesariamente son de descenso
- El denominador $(y_k - H_k d_k)^T d_k$ puede tomar valores muy pequeños lo que puede dar problemas en su implementación numérica.

(1959) (1964)

Subsección 2.5.2. DFP (Davidson - Fletcher - Powell)

La actualización DFP para la matriz B_k consiste en tomar la fórmula simétrica de rango 2 la cual se obtiene al sumar 2 matrices de rango 1.

$$B_{k+1} = B_k + \gamma_k u_k u_k^T + \beta_k v_k v_k^T$$

donde $u_k, v_k \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_k, \beta_k \in \mathbb{R}$. Reemplazando esto en [2.23]

$$B_{k+1} y_k = B_k y_k + \gamma_k u_k u_k^T y_k + \beta_k v_k v_k^T y_k = d_k$$

Es claro que tanto u_k, v_k no son únicamente determinados y una elección válida es tomar

$$u_k = d_k \quad \text{y} \quad v_k = B_k y_k$$

Reemplazando en lo anterior se sigue que

$$B_k y_k + \gamma_k d_k d_k^T y_k + \beta_k B_k y_k y_k^T B_k y_k = d_k$$

$$\gamma_k = \frac{1}{d_k^T y_k} \qquad \beta_k = -\frac{1}{y_k^T B_k y_k}$$

Así, la fórmula de actualización DFP es

$$B_{k+1} = B_k + \frac{d_k d_k^T}{d_k^T y_k} - \frac{B_k y_k (B_k y_k)^T}{y_k^T B_k y_k} \qquad [2.27].$$

Lunes 20 de junio de 2022.

Teorema 2.16. La actualización del DFP generada por [2.27] es definida positiva si y solo si $d_k^T y_k > 0$ $[\, (x_{k+1} - x_k)^T (\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)) > 0 \,]$

Demostración

Supongamos que $d_k^T y_k > 0$ probemos por inducción

$$z^T B z > 0 \qquad \forall z \neq 0 \qquad [*]$$

Claramente B_0 es definida positiva por construcción $(B_0 = I)$. Supongamos ahora que $[*]$ se verifica para algún $k \geq 0$ probemos que

$$z^T B_{k+1} z > 0 \qquad \forall z \neq 0$$

Notemos que, como B_k es definida positiva, tiene una factorización de Cholesky, es decir, existe L_k una matriz triangular inferior tal que

$$B_k = L_k L_k^T$$

Notemos por $a = L_k^T z$; $b = L_k^T y_k$ con esta notación y usando la actualización DFP se tiene que

$$z^T B_{k+1} z = z^T \left(B_k + \frac{d_k d_k^T}{d_k^T y_k} - \frac{B_k y_k (B_k y_k)^T}{y_k^T B_k y_k} \right) z = a^T a + \frac{(z^T d_k)^2}{d_k^T y_k} - \frac{(a^T b)^2}{b^T b}$$

$$= z^T \left(L_k L_k^T + \frac{d_k d_k^T}{d_k^T y_k} - \frac{L_k L_k^T y_k (L_k L_k^T y_k)^T}{y_k^T L_k L_k^T y_k} \right) z$$

$$= z^T \left(L_k L_k^T z + \frac{d_k d_k^T z}{d_k^T y_k} - \frac{L_k L_k^T y_k (L_k L_k^T y_k)^T z}{y_k^T L_k L_k^T y_k} \right)$$

$$= z^T L_k L_k^T z + \frac{\overbrace{z^T d_k}^{\in\mathbb{R}} \overbrace{d_k^T z}^{\in\mathbb{R}}}{d_k^T y_k} - \frac{z^T L_k L_k^T y_k (L_k L_k^T y_k)^T z}{y_k^T L_k L_k^T y_k}$$

$$= \underbrace{(L_k z)^T}_{a^T} \underbrace{(L_k^T z)}_{a} + \frac{(z^T d_k)(z^T d_k)}{d_k^T y_k} - \frac{(L_k z^T)(L_k^T y_k)((L_k^T y_k)^T L_k^T) z}{(L_k y_k^T)^T (L_k^T y_k)}$$

$$= a^T a + \frac{(z^T d_k)^2}{d_k^T y_k} - \frac{(a^T b)(a^T b)^2}{b^T b} = a^T a + \frac{(z^T d_k)^2}{d_k^T y_k} - \frac{(a^T b)^2}{b^T b} \qquad [**].$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$a^T a - \frac{(a^T b)^2}{b^T b} > 0 \qquad [***]$$

En efecto

$$(a^T a)^2 \leq \|a\|^2 \|b\|^2 \quad \Rightarrow \quad a^T a - \frac{(a^T b)^2}{b^T b} \geq \overset{\|a\|^2}{a^T a} - \frac{\|a\|^2 \|b\|^2}{\|b\|^2} = 0$$

Además, como B_k es simétrica, se debe verificar la condición de curvatura, i.e., $d_k^T y_k > 0$. Luego

$$\frac{(z^T d_k)^2}{d_k^T y_k} \geq 0$$

Finalmente reemplazando esto y $[***]$ en $[**]$ se tiene que $z^T B_{k+1} z \geq 0$. Para concluir esta implicación debemos probar que al menos uno de los términos de $[**]$ es estrictamente positivo. Ahora, tomando $z \neq 0$, $[***]$ se verifica con igualdad si y solo si a es paralelo a b. En efecto

$$a^T a - \frac{(a^T (\alpha a))^2}{\alpha^2 a^T a} = a^T a - \frac{\alpha^2 (a^T a)^{\cancel{2}}}{\alpha^2 \cancel{(a^T a)}} = 0$$

De la forma de los vectores a y b $(a = L_k^T z)$, $b = L_k^T y_k)$ lo anterior implica que z es paralelo al y_k, i.e., $\beta \neq 0$ tal que

$$z = \beta y_k$$

Así,

$$\frac{(z^T d_k)^2}{d_k^T y_k} = \frac{\beta^2 (y_k^T d_k)^2}{d_k^T y_k = (y_k^T d_k)} = \beta^2 (d_k^T y_k) > 0.$$

Así, cuando z es paralelo a y_k [**] toma la forma

$$z^T B_{k+1} z = \frac{(z^T d_k)^2}{d_k^T y_k} > 0$$

lo cual prueba el resultado.

Ahora, notemos que la demostración considera z paralelo a y_k. Por lo tanto, falta argumentar ¿Qué sucede cuando z no es paralelo a y_k?

La segunda implicación se obtiene de una forma similar a la anterior ☐

Definición 2.10. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ notemos

$$\hat{A} = A + uv^T$$

Si $\hat{A}$ es no singular, entonces

$$(\hat{A})^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \qquad [2.28]$$

A [2.28] se la conoce como la fórmula de invesión de Sheman-Horrison-Woodbry.

Más aún, [2.28] puede ser extendida a una versión matricial. Sean $U, V \in \mathbb{R}^{n\times p}$ con $1 \leq p \leq n$. Luego,

$$\hat{A} = A + UV^T$$

si A es no singular, entonces

$$(\hat{A})^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I + V^T A^{-1} U)^{-1} V^T A^{-1} \qquad [2.29]$$

La demostración se encuentra en Nocedal-Wright pp 603

Usando [2.29] podemos calcular la actualización de la matriz H_k ($H_{k+1}^{-1} = B_{k+1}$). En efecto, reescibiendo [2.27] en la forma

$$\underbrace{B_{k+1}}_{\hat{A}} = \underbrace{B_k}_{A} + \underbrace{[B_k y_k \;\; d_k]}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} -(y_k^T B_k y_k)^{-1} & 0 \\ 0 & (d_k^T y_k)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (B_k y_k)^T \\ d_k^T \end{bmatrix}}_{V^T}$$

y notando que $B_{k+1}^{-1} = H_{k+1}$, se sigue que

$$H_{k+1} = H_k [B_k y_k \;\; d_k] \left[I + \begin{bmatrix} -(y_k^T B_k y_k)^{-1} & 0 \\ 0 & (d_k^T y_k)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (B_k y_k)^T \\ d_k^T \end{bmatrix} H_k [B_k y_k \;\; d_k] \right]^{-1}$$

$$\vdots \qquad \times \begin{bmatrix} -(y_k^T B_k y_k)^{-1} & 0 \\ 0 & (d_k^T y_k)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (B_k y_k)^T \\ d_k \end{bmatrix} H_k$$

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(y_k - H_k d_k)^T d_k}{(y_k^T d_k)^2} y_k y_k^T + \frac{(y_k - H_k d_k) y_k^T + y_k (y_k - H_k d_k)^T}{y_k^T d_k}$$

Subsección 2.5.3 BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)

La actualización BFGS es de rango 2 y se obtiene de manera similar a la actualización DFD pero usando la actualización para la matriz H_k, es decir, la condición Quasi-Newton [2.22].

$$H_{k+1} = H_k + \gamma_k u_k u_k^T + \sigma_k v_k v_k^T$$

con $\gamma_k, \sigma_k \in \mathbb{R}$, $u_k, v_k \in \mathbb{R}^n$ cantidades a ser deteminadas. Tomemos

$$u_k = y_k \;, \qquad v_k = H_k d_k$$

reemplazando estos valores en [2.22] tenemos

$$H_{k+1} d_k = H_k d_k + \underbrace{\boxed{\gamma_k}}_{\frac{1}{y_k^T d_k}} y_k y_k^T d_k + \underbrace{\boxed{\sigma_k}}_{-\frac{1}{d_k^T H_k d_k}} (H_k d_k)(H_k d_k)^T d_k = y_k$$

Así la fórmula de actualización BFGS queda definida de la siguiente manera

$$H_{k+1} = H_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T d_k} - \frac{H_k d_k d_k^T H_k}{d_k^T H_k d_k} \qquad [2.30]$$

De manera similar a lo realizado para el método la actualización B_{k+1} ($B_{k+1} = H_{k+1}^{-1}$) usando las fórmulas de Sherman-Morrison-Woodbury

$$\underbrace{H_{k+1}}_{\hat{A}} = \underbrace{H_k}_{A} + \underbrace{[H_k d_k \;\; y_k]}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} (d_k^T H_k d_k)^{-1} & 0 \\ 0 & y_k^T d_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k^T H_k \\ y_k^T \end{bmatrix}}_{V^T}$$

$\vdots$

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(d_k - B_k y_k) d_k^T + d_k (d_k - B_k y_k)^T}{d_k^T y_k} - \frac{(d_k - B_k y_k)^T y_k}{(d_k^T y_k)^2} d_k d_k^T \qquad [2.31]$$

Algoritmo 4 - BFGS-

1. Inicializar $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k=0$, $\overset{(B_0 = I)}{B_0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, definida positiva, $\varepsilon > 0$
2. Repetir hasta verificar un criterio de parada $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$
    - 2.1 Calcular $p_k = -B_k \nabla f(x_k)$ ($H_k p_k = -\nabla f(x_k)$)
    - 2.2. Hallar $\alpha_k > 0$ usando el método de Wolfe
    - 2.3 Actualizar $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
    - 2.4 Calcular $d_k = x_{k+1} - x_k$
    - 2.5. Calcular $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$
    - 2.6 Actualizar B_{k+1} usando [2.31] (H_{k+1} utilizando [2.30])
    - 2.7. Hacer $k = k+1$ y volver al paso 2

Martes 21 de junio de 2022

Teorema 2.17. a) Sea $y_k^T d_k \neq 0$ y $d_k^T H_k d_k \neq 0$ entonces las matrices H_{k+1} generadas con la actualización BFGS [2.30] son simétricas y satisfacen la ecuación [2.22]

b) Si además H_k es definida positiva y $y_k^T d_k > 0$, entonces H_{k+1} es definida positiva.

Demostración

a) La simetría de H_{k+1} se sigue por construcción del método; en efecto

$$H_{k+1}^T = \underbrace{H_k^T}_{H_k} + \gamma_k \underbrace{(u_k u_k^T)^T}_{u_k u_k^T} + \sigma_k \underbrace{(v_k v_k^T)^T}_{v_k v_k^T} = H_{k+1}$$

Además, $H_{k+1} d_k = H_k d_k + \dfrac{y_k y_k^T d_k}{y_k^T d_k} - \dfrac{H_k d_k d_k^T H_k d_k}{d_k^T H_k d_k} = y_k$

luego, [2.22] se verifica.

b) Como H_k es definida positiva, podemos hallar una matriz invertible tal que

$$H_k = R_k^T R_k.$$

Luego

$$z^T H_{k+1} z = z^T H_k z + \frac{\overbrace{z^T y_k}^{\in\mathbb{R}} \overbrace{y_k^T z_k}^{\in\mathbb{R}}}{y_k^T d_k} - \frac{\overbrace{z^T H_k d_k}^{\in\mathbb{R}} \overbrace{(H_k d_k)^T z}^{\in\mathbb{R}}}{d_k^T H_k d_k}$$

$$= z^T H_k z + \frac{(z^T y_k)^2}{y_k^T d_k} - \frac{(z^T H_k d_k)^2}{d_k^T H_k d_k} \qquad [*]$$

donde,

$$(z^T H_k d_k)^2 = (z^T R_k^T R_k d_k)^2 \overset{C.S.}{\leq} \|R_k z\|^2 \|R_k d_k\|^2$$

$$= (R_k z)^T (R_k z) (R_k d_k)^T (R_k d_k)$$

$$= z^T \underbrace{R_k^T R_k}_{H_k} z \; d_k^T \underbrace{R_k^T R_k}_{H_k} d_k = z^T H_k z \; d_k^T H_{k+1} d_k$$

Utilizando el hecho de que H_k es definida positiva y con $z \neq 0$ (o con $d_k \neq 0$), se sigue que $(z^T H_k d_k)^2 > 0$. Reemplazando lo último en [*] y usando el hecho de que $y_k^T d_k > 0$ concluimos que

$$z^T H_{k+1} z > \underbrace{z^T H_k z}_{>0} + \underbrace{\frac{(z^T y_k)^2}{y_k^T d_k}}_{\geq 0}.$$

Lema 2.3. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Si B_k es definida positiva y se calcula α_k mediante la estrategia de Wolfe en el algoritmo BFGS, entonces $y_k^T d_k > 0$ y B_{k+1} es definida positiva.

Demostración

> Iteración BFGS

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$

$d_k = \alpha_k p_k$

> Wolfe

$\nabla f(x_{k+1})^T p_k \geq \sigma \nabla f(x_k)^T p_k$

$$
\begin{aligned}
y_k^T d_k &= (\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k))^T (x_{k+1} - x_k) \\
&= (\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k))^T \alpha_k p_k \\
&= \alpha_k [\nabla f(x_{k+1})^T p_k - \nabla f(x_k)^T p_k] \\
&\geq \alpha_k [\sigma \nabla f(x_k)^T p_k - \nabla f(x_k)^T p_k] \\
&= \underbrace{-\alpha_k}_{\leq 0} \underbrace{(1-\sigma)}_{>0} \underbrace{\nabla f(x_k)^T p_k}_{<0} > 0
\end{aligned}
$$

es dirección de descenso

Supongamos ahora que B_k es definida positiva. De la relación $H_k = B_k^{-1}$ se sigue que H_k es definida positiva, ya que $y_k^T d_k > 0$, utilizando el teorema anterior, tenemos que H_{k+1} es definida positiva. Luego $B_{k+1} = (H_{k+1})^{-1}$ también lo será, lo que prueba el resultado.

A continuación estudiaremos la convergencia del método BFGS para ello consideraremos los siguientes supuestos.

Supuestos 3.1. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada

a) f es C^2 en cualquier conjunto convexo

b) $\exists m, M > 0$ con $m < M$ tales que $\forall x \in N_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$. se verifique que

104

$$m\|u\|^2 \leq u^T \nabla^2 f(x) u \leq M \|u\|^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \forall x \in N_0 \qquad [2.32]$$

Notemos que (ii) implica que f es uniformemente convexa. [Teo 2.4 - (iii)] y $\nabla^2 f(x)$ es definida positiva en N_0. Ademas, N_0 es convexo, f tiene un minimizador $x^* \in N_0$

Viernes, 1 de julio de 2022.

Notemos por $\overline{\nabla^2} = \int_0^1 \nabla^2 f(x_k + \tau d_k)\, d\tau$.

De la fórmula de Taylor, tenemos

$$y_k = \overline{\nabla^2 f_k}\, d_k \qquad [a]$$

En efecto,

$$\nabla f(x_k + d_k) = \nabla f(x_k) + \underbrace{\int_0^1 \nabla^2 f(x_k + \tau d_k)\, d_k\, d\tau}_{\overline{\nabla^2 f_k}}$$

$d_k = x_{k+1} - x_k$

$x_{k+1} = d_k + x_k$

De donde, [a] se verifica. De aquí y usando [2.32] se verifican las siguientes expresiones

$$\frac{y_k^T d_k}{\|d_k\|^2} \underset{\text{de [a]}}{=} \frac{d_k^T \overline{\nabla^2 f_k}\, d_k}{\|d_k\|^2}$$

de [2.32], tenemos las siguientes cotas

$$m \leq \frac{\dfrac{d_k^T \overline{\nabla^2 f_k}\, d_k}{\|d_k\|^2}}{\dfrac{y_k^T d_k}{\|d_k\|^2}} \leq M \qquad [2.33]$$

y, consecuentemente

$$\frac{1}{M} \leq \frac{\|d_k\|^2}{y_k^T d_k} \leq \frac{1}{m} \qquad [b]$$

Por otro lado, ya que

$$\frac{\|y_k\|^2}{d_k^T y_k} = \frac{d_k^T (\overline{\nabla^2 f_k})(\overline{\nabla^2 f_k}) d_k}{d_k^T \overline{\nabla^2 f_k}\, d_k} = \frac{d_k^T (\overline{\nabla^2 f_k})^2 d_k}{d_k^T \overline{\nabla^2 f_k}\, d_k}$$

$$= \frac{\underbrace{d_k^T \overline{\nabla^2 f_k}^{1/2}}_{z_k^T} \overline{\nabla^2 f_k} \underbrace{(\overline{\nabla^2 f_k}^{1/2} d_k)}_{z_k}}{\underbrace{(d_k^T \overline{\nabla^2 f_k}^{1/2})}_{z_k^T}\underbrace{(\overline{\nabla^2 f_k}^{1/2} d_k)}_{z_k}}$$

Luego, tomando $z_k = \overline{\nabla^2 f_k}^{1/2} d_k$

$$= \frac{z_k^T \overline{\nabla^2 f_k} z_k}{\underbrace{z_k^T z_k}_{\|z_k\|^2}} \Rightarrow [2.32] \leq M \qquad [2.34]$$

Finalmente, de [a] se sigue que $(y_k = \overline{\nabla^2 f_k} d_k$ o $(\overline{\nabla^2 f_k})^{-1} y_k = d_k)$

$$\| y_k \| \leq \| \overline{\nabla^2 f_k} \| \| d_k \| \quad , \quad \| d_k \| \leq \| (\overline{\nabla^2 f_k})^{-1} \| \| y_k \|$$

$$\underbrace{d_k^T y_k \leq \|d_k\| \|y_k\|}_{C.S.} \Rightarrow \frac{1}{\|d_k\| \|y_k\|} \leq \frac{1}{d_k^T y_k}$$

Luego,

$$\frac{\|y_k\|^2}{\|d_k\| \cancel{\|y_k\|}} \leq \frac{\|y_k\|^2}{d_k^T y_k} \overset{\text{de } [2.34]}{\leq} M \Rightarrow \frac{\|y_k\|}{\|d_k\|} \leq M$$

Así mismo, de [b]

$$\frac{\|d_k\|^2}{\|d_k\| \|y_k\|} \leq \frac{\|d_k\|^2}{d_k^T y_k} \overset{\text{de } [b]}{\leq} \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{\|d_k\|}{\|y_k\|} \leq \frac{1}{m}$$

[2.35]

Teorema 2.18. Sea x_0 un punto inicial, H_0 una matriz simétrica definida positiva. Supongamos $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface los [supuestos 3.1], entonces con los d_k calculados con la estrategia de Wolfe, se tiene que la sucesión generada por el algoritmo BFGS converge a x^*. (Dónde x^* es el minimizador de f)

Demostración (Esquema) (teo 8.5. Nocedal. p.p. 212)

$$Tr(H_{k+1}) = Tr(H_k) + \frac{\|y_k\|^2}{y_k^T d_k} - \frac{\|H_k d_k\|^2}{d_k^T H_k d_k}$$

$$\det(H_{k+1}) = \det(H_k) \frac{y_k^T d_k}{d_k^T H_k d_k}$$

Nocedal, Capítulo 8.

Luego, definimos

$$m_k = \frac{y_k^T d_k}{d_k^T d_k} \quad , \quad M_k = \frac{y_k^T y_k}{y_k^T d_k}$$

De [2.33] y [2.34], $m \leq m_k \leq M$, $m \leq M_k \leq M$.

Además, de [2.35]

$$m_k \leq \frac{\|y_k\|}{\|d_k\|} \leq M_k$$

$$\cdot \cos \theta_k = \frac{d_k^T H_k d_k}{\|d_k\| \|H_k d_k\|} \quad , \quad q_k = \frac{d_k^T H_k d_k}{d_k^T d_k}$$

La demostración se basa en resultados que se obtienen sobre el coseno del ángulo, utilizando las definiciones de $Tr(H_{k+1})$ y $\det(H_{k+1})$, es decir, argumentos geométricos. Se llega a concluir que $\lim \|\nabla f(x_k)\| = 0$ y de la continuidad del ∇f y como $x_k \to x^*$ se sigue el resultado

Supuesto 3.2. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^2. Supongamos que $\nabla^2 f(x)$ es localmente Lipschitz continua en una vecindad de x^*, i.e., existe $L > 0$ tal que

$$\| \nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(x^*) \| \leq L \|x - x^*\|$$

para todo x en una vecindad de x^*

Teorema 2.19. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^2 Supongamos que la sucesión $\{x_k\}$ generada por el algoritmo BFGS converge hacia x^* para el cual, los [supuestos 3.2] se verifican.

Supongamos además que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_k - x^*\| < +\infty \qquad [2.36]$$

Entonces. x_k converge a x^* superlinealmente.

Demostración (Teorema 8.6, Nocedal p.p. 2.16)

Lunes 4 de julio de 2022.

Sección 2.6: Método del gradiente conjugado

En este capítulo describiremos el método del GC, el tipo de problemas que resuelve, así como su funcionamiento como método iterativo.

En primer lugar el GC es utilizado para resolver

$$Ax = b \qquad [a]$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica def. positiva, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ solución de [a], será también solución del problema de minimización

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \qquad [2.39]$$

En efecto, $\nabla\emptyset(x) = Ax - b$, si $\hat{x} = A^{-1}b$

$$\Rightarrow \nabla\emptyset(\hat{x}) = A(A^{-1}b) - b = 0$$

luego $\hat{x}$ es un punto estacionario de $\emptyset$. Además, $\nabla^2(\hat{x}) = A$ es definida positiva, se sigue que $\hat{x}$ es solución de [2.39].

Notaremos al gradiente $\emptyset$ como el residuo del sistema [a]

$$\nabla\emptyset(x) = Ax - b := r(x) \qquad [2.40]$$

Una de las propiedades del método del GC es la generación de un conjunto de vectores conjugados con respecto a A, i.e., un conjunto de vectores no nulos $\{p_0, p_1, \dots, p_L\}$, tal que

$$p_i^T A p_j = 0 \qquad \forall i,j \text{ con } i \neq j \qquad [2.41]$$

El conjunto de vectores que cumple [2.41] formará un conjunto de vectores l.i. En efecto,

$$c_0 p_0 + c_1 p_1 + \cdots + c_L p_L = 0 \qquad \text{P.D. } c_0 = \dots = c_L = 0$$

Multiplicando lo anterior por $p_i^T A$ se tiene lo siguiente

$$c_0(p_i^T A p_0) + c_1(p_i^T A p_0) + \cdots + c_L(p_i^T A p_L) = 0$$

usando [2.41]

$$c_i (\underbrace{p_i^T A p_i}_{>0}) = 0 \qquad \forall i \in \{1, \dots, L\}.$$

luego, lo anterior se verifica si y solo si $c_i = 0$ para cada $i = 1, \dots, L$. La importancia de esta propiedad es que nos permite minimizar $\emptyset(\cdot)$ en, a lo más, n pasos utilizando sucesivamente direcciones de un conjunto conjugado (direcciones conjugadas)

Consideremos el siguiente esquema: Dado un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ punto inicial y un conjunto de direcciones conjugadas $\{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ generamos la sucesión $\{x_k\}_k$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \qquad [2.42]$$

donde α_k corresponde al tamaño de paso exacto. (fácil de calcular ya que $\emptyset$ es un funcional cuadrático), i.e., α_k es el valor que minimiza a lo largo $x_k + \alpha_k p_k$ y tiene la forma

$$\alpha_k = -\frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k} \qquad [2.43].$$

En efecto, $\eta(\alpha) = \phi(x_k+\alpha p_k)$

$$\eta'(\alpha) = \phi'(x_k+\alpha p_k) = \left(\frac{1}{2}(x_k+\alpha p_k)^T A(x_k+\alpha p_k) - b^T(x_k+\alpha p_k)\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{2}(x_k^T+\alpha p_k^T) A(x_k+\alpha p_k) - b^T x_k + \alpha b^T p_k\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(x_k^T A(x_k+\alpha p_k) + \alpha p_k^T A(x_k+\alpha p_k)\right) - b^T x_k - \alpha b^T p_k\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(x_k^T A x_k + \alpha x_k^T A p_k + \alpha p_k^T A x_k + \alpha^2 p_k^T A p_k\right) - b^T x_k - \alpha b^T p_k\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_k^T A p_k + p_k^T A x_k + 2\alpha p_k^T A p_k\right) - b^T p_k$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_k^T A p_k + (p_k^T A x_k) + 2\alpha p_k^T A p_k\right) - b^T p_k$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 x_k^T A p_k + \alpha p_k^T A p_k\right) - b^T p_k$$

$$= x_k^T A p_k + \alpha p_k^T A p_k - b^T p_k = 0$$

$$\Rightarrow b^T p_k - x_k^T A p_k = \alpha p_k^T A p_k$$

$$\Rightarrow (b^T - x_k^T A) p_k = \alpha p_k^T A p_k$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{(Ax-b)^T p_k}{p_k^T A p_k} = -\frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k} \qquad [2.43]$$

Teorema 2.20. Para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la sucesión $\{x_k\}$ generada usando el método de direcciones conjugadas [2.42] y [2.43] converge a la solución del sistema lineal $Ax=b$ (ie. $\tilde{x} = A^{-1}b$) en, a lo más, n pasos.

Demostración Como $\{p_j\}_j$ son l.i. y tenemos n de estos vectores, entonces generan todo el espacio $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $\hat{x} - x_0 \in \mathbb{R}^n$ como combinación lineal p_j

$$\tilde{x} - x_0 = \sigma_0 p_0 + \sigma_1 p_1 + \dots + \sigma_{n-1} p_{n-1}$$

para ciertos escalares σ_k. Multiplicando la expresión anterior por $p_k^T A$ y utilizando [2.41] se sigue que

$$p_k^T A(\tilde{x} - x_k) = \sigma_k p_k^T A p_k$$

$$\Rightarrow \sigma_k = \frac{p_k^T A(\tilde{x} - x_k)}{p_k^T A p_k} \qquad [*]$$

Para establecer el resultado, probaremos que los coeficientes σ_k coinciden con α_k dados por [2.43] notemos antes que x_k generados por [2.42] y [2.43]

x_0

$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0$

$x_2 = x_1 + \alpha_1 p_1 = x_0 + \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1$

$\vdots$

$x_k = x_0 + \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_{k-1} p_{k-1}$

Multiplicando lo anterior por $p_k^T A$ y utilizando nuevamente [2.41]

$$p_k^T A(x_k - x_0) = 0$$

y consecuentemente

$$p_k^T A(\hat{x} - x_0) = p_k^T A[(x_k - x_0) + (\hat{x} + x_k)]$$

$$= p_k^T A(\cancel{x_k - x_0}^{\,0}) + p_k A(\hat{x} + x_k)$$

$$= p_k^T A(A^{-1}b - x_k)$$

$$= p_k^T A A^{-1} b - p_k^T A x_k = p_k^T b - p_k^T A x_k = p_k^T(b - Ax_k) = p_k^T(-r_k) = -p_k^T r_k$$

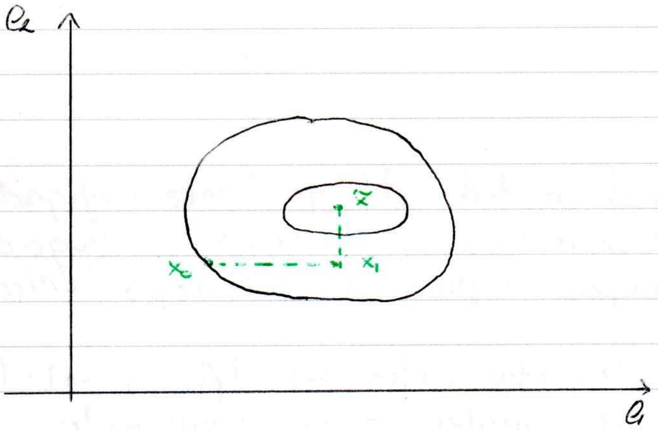
luego en [*]

$$\sigma_k = - \frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k} = \alpha_k$$

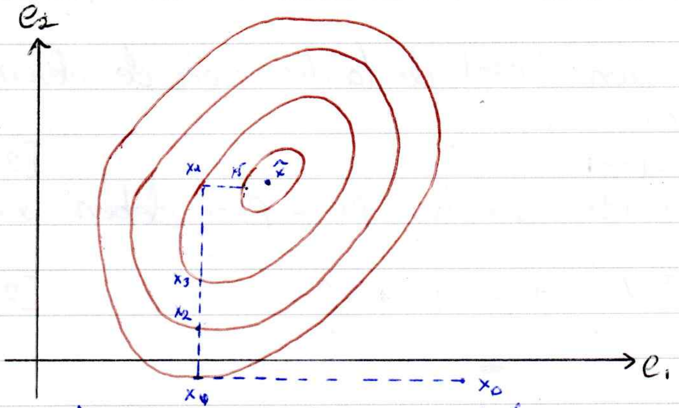
---

luego, $\sigma_k = \alpha_k$ lo que concluye el resultado. ▨

A continuación se presenta una interpretación geométrica de las direcciones conjugadas. Si A es diagonal, las curvas de nivel de Ø son elipses cuyos ejes se alinean con los ejes coordenados. Así, se puede encontrar el mínimo de la función a lo largo de $\{e_1, \ldots, e_n\}$.



Cuando A no es diagonal sus ejes no están alineados con los ejes coordenados; en este caso tomar $\{e_0, \ldots, e_n\}$ no es efectivo ya que por lo general, la solución no se alcanza en n iteraciones o incluso en un número finito de iteraciones



Es posible recuperar el buen comportamiento si hacemos a la matriz A diagonal. Introduzcamos para esto, las siguientes variables $\hat{x}$ es la solución, $\hat{x} = S^{-1}x$ [a]

$S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ formada por los vectores conjugados

$$S = [p_0 \; p_1 \; \cdots \; p_{n-1}]$$

con $\{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$ direcciones conjugadas.

El problema cuadrático se define

$$\begin{aligned}\hat{Ø}(\hat{x}) &= Ø(S\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T(S^TAS)\hat{x} - (S^Tb)^T\hat{x}\end{aligned}$$

Utilizando [2.41] se puede demostrar que S^TAS es diagonal. Luego, se puede hallar la solución de minimizar Ø en n pasos. En efecto, de [a] cada dirección coordenada en el espacio $\hat{x}$, corresponde a una dirección p_k en el espacio de x. Así, gracias al [teo 2.20] se obtiene la solución del problema en a lo más n pasos.

Antes de mostrar las propiedades básicas del método del GC, notemos que

$$r_{k+1} = r_k + \alpha_k A p_k \qquad [2.44]$$

En efecto, $r_{k+1} = Ax_{k+1} - b = A(x_k + \alpha_k p_k) - b$

$$= Ax_k + \alpha_k A p_k - b = \underbrace{Ax_k - b}_{r_k} + \alpha_k A p_k$$

Proposición 2.2 Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, $\{x_k\}$ generada por el algoritmo de direcciones conjugadas [2.42] - [2.43], verifica

$$r_k^T p_i = 0 \qquad \forall\, i = 0, \ldots, k-1 \qquad [2.45]$$

Martes, 5 de julio de 2022.

Demostración (Proposición 2.2)

Probemos [2.45] para $i=0$, i.e.

$$\begin{aligned}r_1^T p_0 &= (Ax_1 - b)^T p_0 = [A(x_0 + \alpha_0 p_0) - b]^T p_0 \\ &= x_0^T A p_0 + \alpha_0 p_0^T A p_0 - b^T p_0\end{aligned}$$

$$= (Ax_0 - b)^T p_0 + \alpha_0 (p_0^T A p_0)$$
$$= r_0^T p_0 - \frac{r_0^T p_0}{p_0^T A p_0} p_0^T A p_0 = 0$$

Supongamos que $r_{k-1} p_i = 0$, para todo $i = 0,\dots,k-2$. De [2.44], tenemos que [*]

$$r_k = r_{k-1} + \alpha_{k-1} A p_{k-1}$$

multiplicando p_{k-1}^T se sigue que

$$p_{k-1}^T r_k = p_{k-1}^T r_{k-1} + p_{k-1}^T \alpha_{k-1} A p_{k-1}$$
$$= p_{k-1}^T r_{k-1} - \frac{r_{k-1}^T p_{k-1}}{\cancel{p_{k-1}^T A p_{k-1}}} \cancel{p_{k-1}^T A p_{k-1}} = 0$$

Usando este resultado, junto con la hipótesis de inducción [*] que

$$r_k^T p_i = 0 \qquad \forall i = 0,\dots,k-1$$

Subsección 2.6.1: Propiedades básicas del método del gradiente conjugado.

El método del gradiente conjugado es un método de direcciones conjugadas con una propiedad extra. Un nuevo vector conjugado puede ser calculado únicamente utilizado el vector anterior p_{k-1}.
Es decir, no es necesario conocer los elementos anteriores $\{p_0,\dots,p_{k-2}\}$. Numéricamente el método requerirá pocos recursos computacionales de almacenamiento

Cada dirección p_k se elige como la combinación lineal de la dirección de descenso más profundo $-\nabla\phi(x_k) = -r_k$ y la dirección p_{k-1}

$$p_k = -r_k + \beta_k p_{k-1} \qquad [2.46]$$

donde β_k será deteminado, tomando en cuenta que los p_k y p_{k-1} deben ser conjugados. Así, multiplicando $p_{k-1}^T A$

$$0 = p_{k-1}^T A p_k = -p_{k-1}^T A r_k + \beta_k \underbrace{p_{k-1}^T A p_{k-1}}_{>0} \qquad [2.47]$$

$$\Rightarrow \beta_k = \frac{r_k^T A p_{k-1}}{p_{k-1}^T A p_{k-1}}$$

Partiendo de un punto inicial x_0, podemos tomar p_0 como la dirección del profundo descenso. En conjunto, tenemos el siguiente algoritmo.

Algoritmo 5 (Versión preeliminar) GC

```
1. Iniciar $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 = Ax_0 - b$, $p_0 = -r_0$, $\overset{\text{iteración}}{k} = 0$
2. Repetir (mientras $r_k \neq 0$)
    2.1. Calcular $\alpha_k = -\frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$                [2.43]
    2.2. Actualizar $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$                 [2.42]
    2.3 Actualizar $r_{k+1} = r_k + \alpha_k A p_k$                  [2.44]
      (alternativamente) $r_{k+1} = A x_{k+1} + b$              [2.40]
    2.4 Calcular $\beta_{k+1} = (r_{k+1}^T A p_k)/p_k^T A p_k$        [2.47]
    2.5 Actualizar $p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$
    $k = k+1$
```

A continuación, optimizaremos el cálculo de las cantidades que intervienen en el algoritmo 5, obteniendo así, un nuevo algoritmo más eficiente

- Usando [2.45] y [2.46] podemos calcular

$$\alpha_k = -\frac{p_k^T r_k}{p_k^T A p_k} = \dots = \alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k} \qquad [2.48]$$

$$\alpha_k = -\frac{p_k^T r_k}{p_k^T A p_k} = -\frac{(-r_k + \beta_k p_{k-1})^T r_k}{p_k^T A p_k} = -\frac{-r_k^T r_k + \beta_k p_{k-1}^T r_k}{p_k^T A p_k} = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k} + \frac{\cancel{\beta_k p_{k-1}^T r_k}^{\,0}}{p_k^T A p_k} = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$$

Así mismo, de [2.44] sabemos que $\alpha_k A p_k = r_{k+1} - r_k$ utilizando nuevamente [2.45] y [2.46] tenemos que

$$p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$$

multiplicando $p_k^T A$,

$$0 = p_k^T A p_{k+1} = -p_k^T A r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k^T A p_k$$

luego, de [2.44]

$$0 = -\frac{r_{k+1}^T (r_{k+1} - r_k)}{\alpha_k} + \beta_{k+1} p_k^T A p_k$$

utilizando la forma de α_k ($r_{k+1}^T r_k = 0$ usando [2.45] y [2.46]) ← Deber

$$0 = -r_{k+1}^T r_{k+1} \frac{p_k^T A p_k}{r_k^T r_k} + \beta_{k+1} p_k^T A p_k$$

$$\Rightarrow \beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k} \cdot \frac{\cancel{p_k^T A p_k}}{\cancel{p_k^T A p_k}} \qquad [2.49]$$

Algoritmo 6 (Método del GC)

```
1. Iniciar $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 = A x_0 - b$, $p_0 = -r_0$, $k = 0$
2. Repetir (mientras $r_k \neq 0$)
    2.1 Calcular $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$   [2.48]
    2.2. Actualizar $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
    2.3 Actualizar $r_{k+1} = r_k + \alpha_k A p_k$
    2.4 Calcular $\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$   [2.49]
    2.5 Actualizar $p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$
    2.6* $k = k+1$
```

Modificación del algoritmo 5.

Subsección 2.6.2: Método Fletcher Reeves.

El método del GC y su algoritmo numérico fueron desarrollados para resolver un problema cuadrático. Es natural preguntarse si el método descrito puede extenderse para funciones convexas generales e inclusive para funciones no lineales.

Para el caso $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C' el método del GC se extiende considerando los siguientes cambios

- * El residuo será el gradiente de la función objetivo
- * El valor α_k ya no puede ser calculado explícitamente, en su lugar, obtenemos α_k con una aproximación lineal de wolfe fuerte

Algoritmo 7 (Fletcher-Reeves GC)

```
1. Tomar $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $0 < \sigma < \rho < 1/2$, $p_0 = -\nabla f(x_0)$
2: Repetir hasta un criterio de parada ($\|\nabla f(x_k)\| > \varepsilon$)
    2.1 Escoger $\alpha_k > 0$ tal que
        $f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + \sigma \alpha_k \nabla f(x_k)^T p_k$
        $|\nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T d_k| \leq \rho |\nabla f(x_k)^T p_k|$
    2.2. Actualizar $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
    2.3. Actualizar $\beta_{k+1} = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T \nabla f(x_{k+1})}{\nabla f(x_k)^T \nabla f(x_k)}$
```

2.4 Calcular $p_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_{k+1} p_k$, $k = k+1$

Capitulo 3: Problemas con restricciones.

En una gran cantidad de modelos, la variable a optimizar, está sujeta a restricciones, esto implica que el mínimo debe buscarse en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Las restricciones pueden ser de tipo caja, lineales, no lineales o de complementariedad

Sección 3.1.: Optimización con restricciones de caja.

Consideremos el siguiente tipo de problemas de optimización no lineal

$$\min_{x \in \Omega} f(x) \qquad [3.1]$$

con

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad y \quad \Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = 1, \dots, n \} \qquad [3.2]$$

El conjunto Ω se denomina conjunto factible y $x \in \Omega$ es un punto factible, la existencia de una solución óptima de [3.1] se tiene utilizando el teorema de Weierstrass, consideremos para esto el siguiente lema.

Lema 3.1. Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, entonces $f(\Omega) = \{ f(x) : x \in \Omega \}$ es compacto de $\mathbb{R}^n$

Demostración

Demostremos por reducción al absurdo que $f(\Omega)$ es acotado; en efecto, supongamos lo contrario, es decir, existe una sucesión $(x_n)_n \subseteq \Omega$ tal que

[a] $$\| f(x_n) \| > K \qquad K \text{ suficientemente grande} \qquad f(x_n) \longrightarrow +\infty.$$

Por otro lado, ya que Ω es acotado y $(x_n)_n \subseteq \Omega$ entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow x$. Además, como Ω es cerrado, $x \in \Omega$. Luego, de la continuidad de f

$$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$$

lo cual contradice [a], luego, $f(\Omega)$ es acotada.

Probemos ahora que $f(\Omega)$ es cerrado, sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ tal que

$$f(x_n) \longrightarrow y,$$

debemos probar que $y \in f(\Omega)$. Análogamente, existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [b] tal que [b] se verifica. Finalmente, por unicidad del límite $y = f(x)$ y por lo tanto,

$$y \in f(\Omega).$$

▨

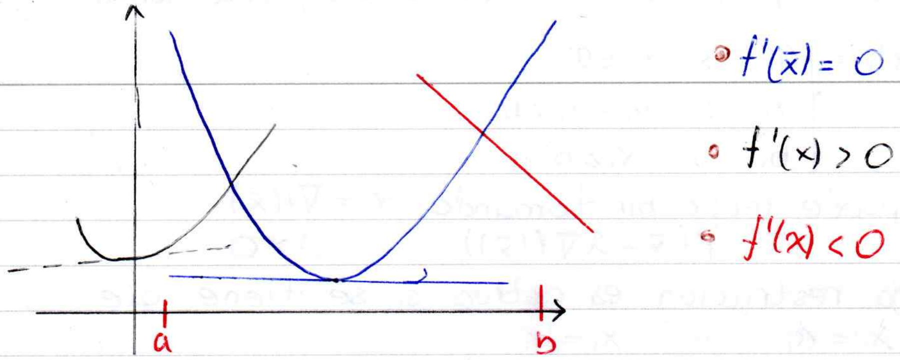
Tomando $m = 1$ y definiendo Ω como en [3.2] (i.e., compacto) del lema 3.1. se sigue que $f(\Omega)$ es compacto. Luego como f es continua del teorem de Weiresstrags. La función alcanza su máx y mín, luego el mínimo existe.

Observacion. 3.1 a) $-\infty < a_i < b_i < +\infty$ el número existe f es continua.

b) Si $\exists j$ tal que $a_j = -\infty$ se requiere que f sea radicmente no acotada, similar al caso sin restricciones

Subsección 3.1. Condiciones de optimalidad.

En cuanto a las condiciones de optimalidad, en este caso, no se tiene necesariamente que $\nabla f(\bar{x}) = 0$, en efecto, se pueden presentar varios casos.



Los 3 casos anteriores se pueden resumir en la siguiente desigualdad variacional

$$f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0 \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

- $\bar{x} = b$, $\quad \underbrace{f'(\bar{x})}_{<0}\ \underbrace{(x-b)}_{\leq 0} > 0$

- $\bar{x} = a$, $\quad \underbrace{f'(\bar{x})}_{>0}\ \underbrace{(x-a)}_{\geq 0} \geq 0$

Esta condición de optimalidad se verificará también en un caso general

Teorema 3.1 Sea $\overset{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}{f \in C^1}$ y $\bar{x}$ un mínimo local de [3.1], entonces

$$\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq 0 \qquad \forall x \in \Omega \qquad [3.3]$$

Demostración

Sea $x \in \Omega$, puesto que Ω es convexo, se tiene que

$$\lambda x + (1-\lambda) x = \bar{x} + \lambda (x - \bar{x}) \in \Omega,$$

$\lambda \in [0,1]$. Puesto que $\bar{x}$ es solución de [3.1]

$$f(\bar{x} + \lambda(x-\bar{x})) - f(\bar{x}) \geq 0$$

dividiendo por λ y cuando $\lambda \to 0^+$ se sigue que

$$\underbrace{\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda} \left[f(\bar{x} + \lambda(x-\bar{x})) - f(\bar{x}) \right]}_{} \geq 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

La condición necesaria de optimalidad [3.3] puede expresarse también utilizando el operador proyección sobre un conjunto convexo.

Lema 3.2. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Para todo $\varphi \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda > 0$ las siguientes condiciones son equivalentes.

a) $\bar{x} \in C \ \wedge\ \varphi^T (x - \bar{x}) \geq 0 \qquad \forall x \in C$

b) $\bar{x} = P_C(\bar{x} - \lambda\varphi) = P(\bar{x} - \lambda\varphi)$

Demostración

a) ⇒ b) $x_\lambda = \bar{x} - \lambda\varphi$, se tiene entonces que

$$\left.\begin{aligned}(x_\lambda - \bar{x})^T (x - \bar{x}) &= x_\lambda^T (x - \bar{x}) - \bar{x}^T (x - \bar{x}) \\ &= \cancel{\bar{x}^T (x-\bar{x})} - \lambda\varphi^T (x - \bar{x}) - \cancel{\bar{x}^T (x-\bar{x})} \\ &= - \underbrace{\lambda\varphi (x - \bar{x})}_{\geq 0} \leq 0\end{aligned}\right| \quad \forall x \in C$$

P.D. $\bar{x} = P_C(x_\lambda)$

Sea $x \in C$, debemos probar que $(x_\lambda - \bar{x}, x - \bar{x}) \leq 0$ y por la linea anterior, se sigue el resultado.

b) ⇒ a) Ya que $\bar{x} = P_C(x_\lambda) \in C$ de la caracterización del operador proyección se sigue que

$$0 \geq (x_\lambda - \bar{x}, x - \bar{x}) = (\bar{x} - \lambda\varphi - \bar{x}, x - \bar{x}) = (-\lambda\varphi, x - \bar{x}) = -\lambda \underbrace{\varphi^T (x - \bar{x})}_{\geq 0}$$

Sea $P:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el operador de proyección definido de la siguiente forma

$$P(x)_i = \begin{cases} a_i & si \quad x_i \le a_i \\ x_i & si \quad a_i < x_i < b_i \\ b_i & si \quad x_i \geq b_i \end{cases}$$

La condición [3.3] se puede reescribir tomando $\varphi = \nabla f(\bar{x})$

$$\bar{x} = P(\bar{x} - \lambda \nabla f(\bar{x})), \qquad \lambda > 0$$

Se dice que la i-ésima restricción es activa si se tiene que

$$x_i = a_i \quad \text{o} \quad x_i = b_i$$

caso contrario, la restricción será inactiva. Los conjuntos de índices correspondientes a las restricciones activas e inactivas se denotarán por $A(x)$ e $I(x)$

Definición 3.1. - Hessiana Reducida-

Sea f 2 veces continuamente diferenciable en $x \in \Omega$, la matriz Hessiana reducida $\nabla^2_R f(x)$

$$(\nabla^2_R f(x))_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & i \in A(x) \quad \text{o} \quad j \in A(x) \\ (\nabla^2 f(x))_{ij} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_I \\ x_R \end{pmatrix} \qquad \nabla^2_R f(x) = \begin{pmatrix} \nabla^2 f(x) & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

Teorema 3.2. Sea f, C^2 con segunda derivada Lipschitz continua y sea $\bar{x}$ un mínimo local de [3.1], entonces $\nabla^2_R f(x)$ semi-definida positiva.

Demostración

Supongamos que existen M restricciones inactivas y N-M activas, para $x \in \Omega$ reordenemos el vector de la siguiente forma $x = (\xi, \varphi)$, donde ξ corresponde a las componentes inactivas y φ a las componentes activas. Entonces la función

$$\phi(\xi) = f(\xi, \bar{\varphi})$$

tiene como mínimo local (del problema sin restricciones) el punto $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$ y consecuentemente $\nabla^2 \phi(\bar{\xi})$ es semidefinida positiva. Puesto que la matriz Hessiana se puede escribir de la siguiente manera

$$\nabla^2_R f(x) = \begin{pmatrix} \nabla^2 f(x) & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

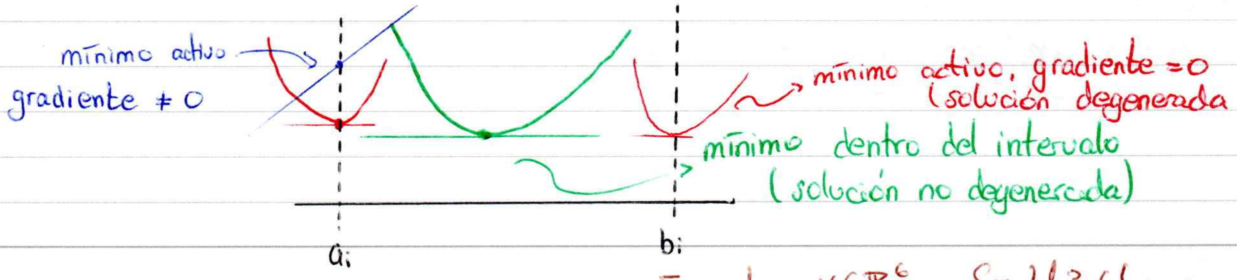
se tiene el resultado.

Lunes, 11 de julio de 2022.

Definición 3.2. Un punto $\bar{x} \in \Omega$ se dice punto estacionario no degenerado de [3.1] si satisface [3.3] y además

$$\text{i-ésima componente} \rightarrow \quad (\nabla f(\bar{x}))_i \neq 0 \qquad \forall i \in A(\bar{x})$$

A esta propiedad se la conoce como complementariedad estricta.



Sea S un subconjunto de índices definimos

$$(R_S(x))_i = \begin{cases} x_i & i \in S \\ 0 & i \notin S \end{cases}$$

Ejemplo: $x \in \mathbb{R}^6$, $S = \{1, 3, 6\}$

$$R_S(x) = (x_1, 0, x_3, 0, 0, x_6)$$

Lema 3.3. Sea $\bar{x}\in\Omega$ un punto estacionario no degenerado de [3.1], supongamos $A:=A(\bar{x})$ no vacío. Entonces, existe $\sigma>0$ tal que

$$\nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})^T R_A(x-\bar{x}) \geq \sigma \| R_A(x-\bar{x})\| \qquad \forall x\in\Omega.$$

Demostración:

Como $\bar{x}$ es no degenerado, para $i\in A$, tenemos que

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{x}_i = a_i, & (\nabla f(\bar{x}))_i > 0 \\ \bar{x}_i = b_i & (\nabla f(\bar{x}))_i < 0 \end{array}\right\} [1]$$

Si $\exists\,\sigma>0$, [1] se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{array}{llll} \bar{x}_i = a_i & (\nabla f(\bar{x}))_i \geq \sigma & \Rightarrow & (\nabla f(\bar{x}))_i (x-\bar{x})_i \geq \sigma (x-\bar{x})_i \\ \bar{x}_i = b_i & (\nabla f(\bar{x}))_i \leq -\sigma & \Rightarrow & (\nabla f(\bar{x}))_i (\overset{\geq 0}{\underset{\leq 0}{x-\bar{x}}})_i \geq -\sigma (x-\bar{x})_i \end{array}$$

de donde

$$(\nabla f(\bar{x}))_i (x-\bar{x})_i \geq \sigma |(x-\bar{x})_i|$$

Luego, usando que $\|\cdot\|_1 \geq \|\cdot\|_2$, entonces

$$\nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x}) \geq \sigma \| R_A(x-\bar{x})\|$$

Teorema 3.2. Sea $\bar{x}\in\Omega$ un punto estacionario no degenerado y f de clase C^2 en una vecindad de $\bar{x}$ y $\nabla^2_I f(\bar{x})$ definida positiva, entonces $\bar{x}$ es solución de [3.1].

Demostración

Sea $x\in\Omega$, definamos $\varnothing(t)=f(\bar{x}+t(x-\bar{x}))$, demostremos que necesariamente ocurren uno de los siguientes dos casos:

a) $\varnothing'(0)>0$

b) $\varnothing'(0)=0$, $\varnothing''(0)>0$.

Notemos que $\varnothing'(t) = \nabla f(\bar{x}+t(x-\bar{x}))^T \overset{e}{\overline{(x-\bar{x})}}$

$$\varnothing'(0) = \nabla f(\bar{x})^T e = \nabla f(\bar{x})^T (R_A(e) + R_I(e))$$

de la estacionariedad de $\bar{x}$, sabemos que $(\nabla f(\bar{x}))_i = 0$, con $i\in I$, luego

$$\nabla f(\bar{x})^T R_I e = 0$$

literal a)

Si $R_A e \neq 0$, usando el Lema 3.3

$$\nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x}) \geq \overset{>0}{\sigma}\ \overset{>0}{\| R_A e\|}$$

literal b)

Si $R_A e = 0$, entonces derivando dos veces $\varnothing$

$$\varnothing''(t) = (x-\bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x}+t(x-\bar{x}))\,(x-\bar{x})$$

$$\varnothing''(0) = (x-\bar{x})^T\, \nabla^2 f(\bar{x})\,(x-\bar{x})$$

$$= (x-\bar{x})^T \underbrace{R_I\, \nabla^2 f(\bar{x})\, R_I}_{=\nabla^2_I f(\bar{x})} (x-\bar{x}) \quad > 0$$

Ejemplo:

$$\min_{0\leq x_i \leq 1} f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

Calcular $\nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x})$. $\bar{x}=(0,0)$ único punto estacionario. ¿$\nabla^2 f(\bar{x})$ es ~~sem~~definida positiva? ¿$\nabla^2_I f(\bar{x})$ definida positiva? Descripción de $\bar{x}$, ¿degenerado?

Tenemos que

$$\nabla f(x) = (2x_1+4x_2,\ 4x_1+2x_2) = (2(x_1+2x_2),\ 2(2x_1+x_2)) = 2(x_1+2x_2,\ 2x_1+x_2), \quad x-\bar{x} = (x_1,x_2).$$

$$\therefore\ \nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x}) = 0.$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};\quad \text{así } \nabla^2 f(x) \text{ es simétrica}$$

$$d^T \nabla^2 f(x)\, d = (d_1, d_2)^T \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} (d_1, d_2) = (d_1, d_2)^T \begin{pmatrix} 2d_1 + 4d_2 \\ 4d_1 + 2d_2 \end{pmatrix} = 2d_1^2 + 4d_2 d_1 + 4d_2 d_1 + 2d_2^2 = 2d_1^2 + 8d_2 d_1 + 2d_2^2 \checkmark$$

$$\det(\lambda I - \nabla^2 f(x)) = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - (-4)(-4) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)^4 - 16 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = 16 \Rightarrow \lambda - 2 = \pm 4$$

$$\therefore \lambda_1 = 4 - 2 = 2 \quad y \quad \lambda_2 = -6.$$

Luego

$\nabla_2^2 f(\bar{x}) = I$ y es det positiva. No se puede concluir la optimalidad de $\bar{x}$.

Sección 3.1.2. Métodos de descenso proyectados.

La idea principal de este tipo de métodos consiste en hacer uso de una dirección de descenso de un problema sin restricciones y luego proyectar la nueva iteración sobre el conjunto factible.

Consideremos el problema [3.1], si en la iteración x_k obtenemos la dirección de descenso p_k, entonces la iteración x_{k+1} definida por el método proyectado es la siguiente.

$$x_{k+1} = P(x_k + \alpha_k p_k)$$

con $\alpha_k > 0$ un parámetro de búsqueda lineal. La regla de búsqueda lineal en su versión proyectada, viene dada por:

Hallar α_k más grande tal que $\alpha_k \in \{1, 1/2, 1/4, \dots\}$ tal que

$$f(\underbrace{P(x_k + \alpha_k p_k)}_{x_{k+1}}) - f(x_k) \leq -\frac{\sigma}{\alpha_k} \| P(x_k + \alpha_k p_k) - x_k \|^2$$

$0 < \sigma < 1$. El algoritmo de manera general, está dado por los siguientes pasos:

Algoritmo 3.1. (Descenso proyectado).

1. Inicializar $x_0 \in \Omega$ y $k = 0$
2. Repetir hasta un criterio de parada
   - 2.1. Calcular la dirección de descenso p_k para el problema sin restricciones
   - 2.2. Hallar mediante una técnica de búsqueda lineal proyectada $f(P(x_k + \alpha_k p_k)) < f(x_k)$
   - 2.3. Actualizar $x_{k+1} = P(x_k + \alpha_k p_k)$, $k = k+1$.

Martes 12 de julio de 2022.

Observación 3.2. Para elegir un criterio de parada, es necesario estudiar un resultado de aproximación de conjuntos activos.

Lema 3.4. Sea f: 2 veces continuamente diferenciable en Ω, $\bar{x}$ un punto estacionario no degenerado del problema [3.1] y $\alpha \in]0, 1]$. Entonces, para x suficientemente cercano a $\bar{x}$

a) $A(x) \subseteq A(\bar{x})$ y $x_i = \bar{x}_i, \quad \forall i \in A(x)$

b) $A(x(\alpha)) = A(\bar{x})$ y $x(\alpha)_i = \bar{x}_i, \quad \forall_i \in A(\bar{x})$,

donde $x(\alpha) = P(x - \alpha \nabla f(x))$

Demostración

Sea $\delta_1 = \min\limits_{i \in I(\bar{x})} \{ b_i - \bar{x}_i, \bar{x}_i - a_i \}$ $\qquad a_i < \bar{x}_i < b_i$

a) Supondremos que $i \in I(\bar{x})$ y demostraremos que $i \in I(x)$ [ya que $I(\cdot)$ y $A(\cdot)$ son complementarias]

Si x y $\bar{x}$ están suficientemente cerca, digamos $\|x - \bar{x}\| < \delta_1$

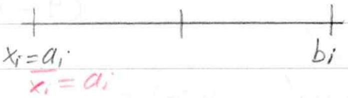
$$|x_i - \bar{x}_i| < \delta_1 \iff \underset{a_i - \bar{x}_i \,\leq\, \text{máx}\{\bar{x}_i - b_i,\, a_i - \bar{x}_i\}}{\leq -\delta_1} < x_i - \bar{x}_i < \delta_1 \leq b_i - \bar{x}_i$$

De donde $\qquad a_i < x_i < b_i$

luego, $i \in I(x)$.
Es decir, hemos probado $A(x) \subseteq A(\bar{x})$. Para demostrar la segunda parte de (1). Supongamos

$$\|x-\bar{x}\| < \min \{ \delta, \frac{b_i-a_i}{2} \}$$

Tomemos $i \in A(x)$, supongamos que $x_i = a_i$. Como $A(x) \subseteq A(\bar{x})$, tendríamos que $i \in A(\bar{x})$, luego $\bar{x}_i = a_i$
Para $\bar{x}_i$ suficientemente cercano a x_i. luego $x_i = \bar{x}_i$



b) Sean $A(\alpha)$ e $I(\alpha)$ los conjuntos activos e inactivos respetivamente de $x(\alpha) = P(x - \alpha \nabla f(x))$

P.D $A(\bar{x}) \subset A(\alpha)$

Supongamos que $A(\bar{x}) \neq \emptyset$, tomando $i \in A(\bar{x})$ gracias al [lema 3.3] y gracias a la continuidad del gradiente $\nabla f(\cdot)$ existe una constante $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|x-\bar{x}\| < \delta_2 \Rightarrow \nabla f(\bar{x} + (x-\bar{x}))_i (x - \bar{x}_i) > \underset{\approx}{\sigma/2} (x-\bar{x})_i \qquad [a]$$

del [lema 3.3]

$$\nabla f(\bar{x})_i (x-\bar{x})_i > \sigma |x-\bar{x}|_i$$

Por tanto, si

$$\|x-\bar{x}\| < \delta_0 < \min \{ \sigma/2, \delta_2 \}$$

debemos probar que $i \in A(\alpha)$. Supongamos por contradicción que $i \in I(\alpha)$. Tenemos además que $i \in A(\bar{x})$, supongamos que $\bar{x}_i = a_i$, luego

$$x(\alpha)_i = P(x - \alpha \nabla f(x))_i$$

Por otro lado, del lema 3.2 $x_i = (x - \alpha \nabla f(x))_i$ de donde $\nabla f(x) = 0$, utilizando este resultado en [a] $x(\alpha)_i = x_i$. De [a], se seguiría que

$$0 > \sigma/2 \, (x_i - \bar{x}_i) = \sigma/2 \, (x_i - a_i) > 0 \qquad (x_i \neq a_i).\ i \in I(\alpha) \quad x_i = x(\alpha)_i \neq a_i$$

$$\Rightarrow\Leftarrow$$

luego, $i \in A(\alpha)$. Procediendo como en [**] y ya que $A(\bar{x}) \subset A(\alpha)$ se sigue que $x(\alpha)_i = \bar{x}_i$
Para probar la segunda contenencia $A(\alpha) \subset A(\bar{x})$ utilizaremos la Lipschitz continuidad del operador proyección, i.e.,

$$\|P(x) - P(y)\| \leq \|x-y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

A prime

Por otro lado, como f es de clase C^2, la función $\nabla f(\cdot)$ es Lipschitz continua [Ambrosetti], (con constante $L>0$) Usando nuevamente el [lema 3.2]

$$\bar{x} = \bar{x}(\alpha) = P(\bar{x} - \alpha \nabla f(\bar{x}))$$

Uniendo todo lo anterior, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\|\bar{x} - x(\alpha)\| &= \|P(\bar{x} - \alpha \nabla f(\bar{x})) - P(x - \alpha \nabla f(x))\| \\
\text{L continuidad de P} \quad &\leq \|\bar{x} - \alpha \nabla f(\bar{x}) - x + \alpha \nabla f(x)\| \\
&\leq \|\bar{x} - x\| + \alpha \|\nabla f(x) - \nabla f(\bar{x})\| \\
\text{L continuidad de } \nabla f \quad &\leq \|\bar{x} - x\| + \alpha L \|x - \bar{x}\| = (1+\alpha L)\|x-\bar{x}\| \qquad [b]
\end{aligned}$$

Supongamos por contradicción que $i \notin A(\bar{x})$, i.e. $i \in I(\bar{x}) \cap A(\alpha)$. Entonces, ya que $i \in A(\alpha)$, $(x(\alpha))_i$ tomaría valores a_i o b_i

$$\|\bar{x} - x(\alpha)\| \geqslant |\bar{x}_i - x(\alpha)_i\| \begin{matrix} \to |\bar{x}_i - a_i| \\ \to |\bar{x}_i - b_i| \end{matrix} > \min_{i \in I(\bar{x})} \{ \bar{x}_i - a_i, b_i - \bar{x}_i \} = \delta_1$$

Tomando $\|\bar{x} - x\| < \delta_4 = \min \{ \delta_3 ; \delta_1/(1+L) \}$, de [b], se seguiría que

$$\|\bar{x} - x(\alpha)\| \leq (1+\alpha L)\|x-\bar{x}\| \leq (1+L)\|x-\bar{x}\| \leq (1+L)\frac{\delta_1}{1+L}$$

es decir, $\|\bar{x} - x(\alpha)\| \leq \delta_1$ lo cual contradice (c) y por tanto verifica que $i \in A(\bar{x})$

Teorema 3.3. Sea f de clase $C^2(\Omega)$ y $\bar{x}$ un punto estacionario no degenerado. Asumamos que las condiciones suficientes se verifican a $\bar{x}$. Entonces, existen constantes δ y M tales que

$$\|\bar{x} - x\| < \delta \quad \text{y} \quad A(x) = A(\bar{x}), \text{ entonces}$$

$$\frac{\|x-\bar{x}\|}{M} \leq \|x - x(1)\| \leq M \|x-\bar{x}\|$$

Observación. Dado $r_0 = \|x_0 - x_0(1)\|$ y tolerancia absoluta y relativa τ_a, τ_r, y el criterio de parada $\|x - x(1)\| \leq \tau_a + \tau_r r_0$

Otra consecuencia importante del [Lema 3.4] para el método del gradiente proyectado es la identificación del conjunto activo $A(\bar{x})$, despues de un número finito de pasos.

Lema 3.5. Para todo $x, y \in \Omega$, se tiene que

$$(y - x(\alpha))^T (x(\alpha) - x + \alpha \nabla f(x)) \geqslant 0 \qquad [3.5]$$

Demostración

Por definición $x(\alpha) = P(x - \alpha\nabla f(x))$ y $\|P(x) - z\| = \min_{y \in \Omega} \|y - z\|$, se sigue que

$$\|x(\alpha) - x + \alpha\nabla f(x)\| = \|\underbrace{P(x - \alpha\nabla f(x))}_{\tilde{x}} - \underbrace{(x - \alpha\nabla f(x))}_{z}\|$$

$$\leq \|y - x + \alpha\nabla f(x)\| \qquad [*]$$

Lo que implicaría que $t=0$ es el mínimo local de $\varnothing(t)$, definida como sigue

$$\varnothing(t) = \frac{1}{2}\|(1-t)x(\alpha) + ty - x + \alpha\nabla f(x)\|^2$$

$$\varnothing'(t) = [(1-t)x(\alpha) + ty - x + \alpha\nabla f(x)]^T(-x(\alpha) + y)$$

$$\varnothing'(0) = (y - x(\alpha))^T(x(\alpha) - x + \alpha\nabla f(x))$$

$$\text{C.S.} \quad \geqslant -\|y - x(\alpha)\|\,\|x(\alpha) - x + \alpha\nabla f(x)\| \geqslant \|y - x(\alpha)\|\,\|x(\alpha) - x + \alpha\nabla f(x)\| \geqslant 0$$

De manera equivalente de [3.5] se obtiene

$$(x - x(\alpha))^T(y - x(\alpha)) \leq \alpha\nabla f(x)^T(y - x(\alpha)) \qquad [3.6]$$

y tomando $y = x$

$$\|x - x(\alpha)\|^2 \leq \alpha\nabla f(x)^T(x - x(\alpha))$$

$$x(\alpha) = P(x - \alpha\nabla f(x))$$
$$x(1) = P(x - \nabla f(x))$$

Lunes, 18 de julio de 2022

Corrección - Examen Primer Bimestre

Ejercicio 1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = 100\,(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

$$\nabla f(x,y) = 2\begin{pmatrix} (x-1) - 200(y - x^2) \\ 100(y - x^2) \end{pmatrix}$$ resolviendo $\nabla f(x_1, x_2) = (1,1)$.

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12\,000x^2 - 4000y + 2 & -400x \\ -400x & 200 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix} \quad \det(\nabla^2 f(1,1)) \geqslant 0$$

Por lo tanto, la matriz es definida positiva y así $(1,1)$ es un mínimo local.

Ejercicio 2. Deber.

Ejercicio 4. $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad s_k = x_{k+1} - x_k \quad F'(x_k)s_k = -F(x_k)$ aproximadamente

$$\|F(x_k) + F'(x_k)s_k\| \leq \eta_k \|F(x_k)\|$$

- Si $\eta_k \to 0$, $x_k \to \bar{x}$. P.D. $F(\bar{x}) = 0$.

$$\cdot \|F(x_k) + F'(x_k)(x_{k+1} - x_k) - F'(x_k)(x_{k+1} - x_k)\|$$
$$\leqslant \|F(x_k) + F'(x_k)s_k\| + \|F'(x_k)s_k\|$$
$$\leqslant \eta_k\|F(x_k)\| + \|F'(x_k)s_k\|$$

$$\Rightarrow \|F(x_k)\| \leq \frac{1}{1 - \eta_k}\underbrace{\|F'(x_k)\|}_{<+\infty.}\,\underbrace{\|x_{k+1} - x_k\|}_{\to 0.} \longrightarrow 0.$$

Luego, $\|F(x_k)\| \to 0$ pero $F(x_k) \to F(\bar{x})$, luego por unicidad del límite

$$F(x_k) \longrightarrow 0 = F(\bar{x})$$

Supongamos que $F(x_k) = -M_k(x_{k+1}-x_k)$

P.D. $\|-M_k(x_{k+1}-x_k) + F'(x_k)(x_{k+1}-x_k)\| = o(\|x_{k+1}-x_k\|)$

$$\begin{aligned}\|-M_k(x_{k+1}-x_k) + F'(x_k)(x_{k+1}-x_k)\| &= \|F(x_k)+F'(x_k)(x_{k+1}-x_k)\| \\ &\le n_k\|F(x_k)\| \\ &\le \underbrace{\frac{n_k}{1-n_k}\|F'(x_k)\|\,\|x_{k+1}-x_k\|}_{\varepsilon_k \searrow 0.}\end{aligned}$$

Notemos que $F'(x_k) \to F'(\bar{x})$ por lo tanto $\|F'(x_k)\|<+\infty$ y $n_k/(1-n_k) \to 0$; por lo tanto

$$\|-M_k(x_{k+1}-x_k) + F'(x_k)(x_{k+1}-x_k)\| = \theta(\|x_{k+1}-x_k\|)$$

Martes, 19 de julio de 2022.

Teorema 3.4. Supongamos que ∇f es Lipchitz continua proyectado con constante de Lipchitz $L>0$ y sea $x\in\Omega$. Entonces, la condición de Armijo se cumple para todo α tal que $0<\alpha\le 2/L(1-\sigma)$

Condición de Armijo proyectado $f(P(x_k+\alpha_k p_k)) - f(x_k) \le \frac{-\sigma}{\alpha_k}\|P(x_k+\alpha_k p_k)-x_k\|^2$ $0<\sigma<1.$

Demostración

Del teorema del valor medio integral, se tiene que

$$f(x(\alpha)) - f(x) = \int_0^1 \nabla f(x+t(x(\alpha)-x))^T(x(\alpha)-x)\,dt$$

$$f(x(\alpha)) = f(x) + \nabla f(x)^T(x(\alpha)-x) + \int_0^1 [\nabla f(x+ty)-\nabla f(x)]^t y\,dt.$$

Usando la Lipchitz continuidad de ∇f, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^1 [\nabla f(x+ty)-\nabla f(x)]^T y\,dt &\le \int_0^1 \|\nabla f(x+ty)\|\,\|y\|\,dt \\ &\le \int_0^1 tL\|y\|^2\,dt \\ &= L\|y\|^2\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{L}{2}\|y\|^2\end{aligned}$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned}\alpha(f(x)-f(x(\alpha))) &\ge \alpha\nabla f(x)^T(x-x(\alpha)) - \frac{\alpha L}{2}\|x-x(\alpha)\|^2 \\ \text{usando [3.6]} \quad &\ge (1-\alpha L/2)\|x-x(\alpha)\|^2\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$f(x(\alpha)) - f(x) \le \left(\frac{L}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)\|x-x(\alpha)\|^2$$

Finalmente, para obtenes la regla de Armijo, se debe verificar que

$$\frac{L}{2}-\frac{1}{\alpha} \le -\frac{\sigma}{\alpha} \;;\; \frac{L}{2} \le \frac{1-\sigma}{\alpha},$$

por lo tanto

$$\frac{2(1-\sigma)}{L} \ge \sigma > 0.$$

Teorema 3.5. Sea ∇f Lipchitz continua con constante $L>0$. Si además, $\{x_k\}$ es una sucesión generada por el algoritmo del gradiente proyectado. Entonces todo punto de acumulación de la sucesión $\{x_k\}$ es un punto estacionario de [3.1]

Demostración

Puesto que $\{f(x_k)\}$ es decreciente (por construcción) y está acotada inferiormente (continua sobre un compacto), existe f^* tal que

$$f(x_k) \longrightarrow f^*, \qquad k \to +\infty. \qquad [*]$$

De la condición de Armijo proyectado se tiene que

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \frac{\sigma}{\alpha_k} \|x_{k+1} - x_k\|^2,$$

i.e.,

$$\left.\begin{aligned} 0 &\leq \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \frac{\alpha_k}{\sigma}\left(f(x_k) - f(x_{k+1})\right) \\ \text{pues } 0 < \alpha_k < 1 \longrightarrow \quad &\leq \frac{1}{\sigma}\left(f(x_k) - f(x_{k+1})\right) \longrightarrow 0. \end{aligned}\right\} [a]$$

Tomando $\alpha_k = \beta^m$, con $\beta \in (0,1)$ en el [teo 3.4] se sigue que

$$\beta^m \leq \frac{2}{L}(1-\sigma) < \beta^{m-1}$$

multiplicando lo anterior por β,

$$\frac{2}{L}\beta(1-\sigma) < \beta^m = \alpha_k \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad [**]$$

Ahora, sea $y \in \Omega$, $k \geq 0$. De [3.6] se sigue que

$$\begin{aligned} \nabla f(x_k)^T(x_k - y) &= \nabla f(x_k)^T(x_{k+1} - y) + \nabla f(x_k)^T(x_k - x_{k+1}) \\ \text{de [3.6]} \qquad &\leq \alpha_k^{-1}(x_k - x_{k+1})^T(x_{k+1} - y) + \nabla f(x_k)^T(x_k - x_{k+1}) \\ \text{Aplicando C.S.} \qquad &\leq \|x_k - x_{k+1}\|\left(\alpha_k^{-1}\|x_{k+1} - y\| + \|\nabla f(x_k)\|\right) \\ \text{de [a]} \qquad &\leq \underbrace{\|x_k - x_{k+1}\|}_{\substack{\to 0 \\ x_k \to \bar{x}}}\Bigg(\underbrace{\frac{L}{2\beta(1-\sigma)}}_{\text{de [**]}}\underbrace{\underbrace{\|x_{k+1} - y\|}_{\leq \|x_{k+1}\| + \|y\|}}_{\substack{\text{acotado} \\ x_k,\, y \in \Omega}} + \underbrace{\|\nabla f(x_k)\|}_{\substack{\hookrightarrow \text{acotado} \\ \text{Por ser continua definida} \\ \text{sobre un compacto}}}\Bigg) \end{aligned}$$

Sea $\{x_k\}_k$ una subsucesión convergente a $\bar{x}$ y utilizando el límite [a], podemos pasar al límite en la desigualdad anterior y obtener que

$$\nabla f(\bar{x})^T(\bar{x} - y) \leq 0, \qquad \text{i.e.,} \quad \nabla f(\bar{x})^T(y - \bar{x}) \geq 0 \qquad \forall y \in \Omega.$$

Teorema 3.6. Sea f continuamente diferenciable y ∇f Lipchitz continuo. Suponga que las iteraciones x_k del método del gradiente proyectado, convergen a un mínimo local no degenerado $\bar{x}$. Entonces existe k_0 tal que $A(\bar{x}) = A(x_k)$ para todo $k \geq k_0$.

Demostración

Sea $\underline{\alpha}$ una cota inferior para los pasos de búsqueda lineal. Sea, además, δ tal que verifique las condiciones del [Lema 3.4] basta tomar k_0 tal que

$$\|x_k - \bar{x}\| < \delta, \qquad \forall k \geq k_0$$

De la parte 2 del [lema 3.4] se sigue el resultado, i.e. $A(x_{k+1}) = A(\bar{x})$

Subsección 3.1.3. Métodos de 2do orden proyectados.

A diferencia de lo que ocurre en los problemas sin restricciones, en el caso de problemas con restricciones de caja [3.1], los resultados de convergencia previamente obtenidos no se exienden automáticamente a iteraciones del tipo

$$x_{k+1} = P(x_k - \alpha H_k^{-1} \nabla f(x_k))$$

con H_k simétrica y definida positiva.

Ejemplo

$$\min_{x \in [0,1]^2} \frac{1}{2}\|x - (-1, 1/2)^T\|^2 = \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1+1 \\ x_2-1/2 \end{pmatrix}$, el mínimo se alcanza en $\overline{x} = (0, 1/2)^T$

Tomando como iteración inicial $x_0 = (0,0)^T$ y la matriz

$$H_0^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{simétrica y definida positivo.}$$

Calculando

$$H_0^{-1} \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, para todo $\alpha > 0$

$$x(\alpha) = P\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = P\begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

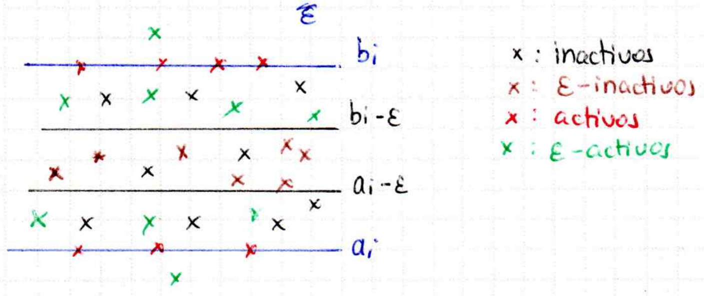
y, por lo tanto, $x_1 = (0,0)^T = x_0$, i.e., el método se estanca en el punto inicial x_0.

La información que proporciona la Hessiana no es suficiente para obtener direcciones de descenso, en el caso de problemas con restricciones. En su lugar, se debe usar un modelo para la Hessiana reducida basado en una estimación de los puntos activos.

Con este fin, se consideran los conjuntos ε-activos, definidos como siguen

$$A^{\varepsilon}(x) = \}i : a_i \leq x_i \leq a + \varepsilon \;\vee\; b_i - \varepsilon \leq x_i \leq b_i\{.$$

donde $0 < \varepsilon < \underbrace{1/2 \min (b_i - a_i)}_{\overline{\varepsilon}}$, $I^{\varepsilon}(x)$ será su complemento.



Se considera entonces el siguiente modelo para la Hessiana reducida

$$\widetilde{R}(x_k, \varepsilon_k, H_k) = R_{A^{\varepsilon_k}(x_k)} + R_{I^{\varepsilon_k}(x_k)} H \, R_{I^{\varepsilon_k}(x_k)}$$

$$= \begin{cases} \delta_{ij} & i \in A^{\varepsilon_k}(x_k) \text{ o } j \in A^{\varepsilon_k}(x_k) \\ (H_k)_{ij} & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Notemos que $\nabla_R^2 f(x_k) = \widetilde{R}(x_r, 0, \nabla^2 f(x_k))$

Dado $\varepsilon \in [0, \overline{\varepsilon}[$ y una matriz simétrica definida positiva, se define

$$x^{H,\varepsilon}(\alpha) = P(x - \alpha \widetilde{R}(x, \varepsilon, H)^{-1} \nabla f(x)) \quad \text{Método de segundo orden} \quad [*]$$

$$x(\alpha) = P(x + \alpha \nabla f(x)) \quad \text{Método de primer orden}$$

y se obtiene el siguiente algoritmo

Algoritmo 3.2. (Segundo orden proyectado)

1. Inicializamos $x_0 \in \Omega$, $0 < \sigma < 1$, $0 < \beta < 1$, $k = 0$
2. Repetimos hasta un criterio de parada
   - 2.1. Determinar ε_k, H_k
   - 2.2. Resolver $\widetilde{R}(x_k, \varepsilon_k, H_k) = -\nabla f(x_k)$
   - 2.3. Hallar $m \in \mathbb{N}$ más pequeño tal que se cumpla la condición de Armijo proyectado $\alpha_k = \beta^m$
   - 2.4. Actualizar $x_{k+1} = x_k^{H,\varepsilon}(\alpha_k)$ como en [*] y $k = k+1$

Viernes, 22 de julio de 2022.

Lema 3.6. Sea $x \in \Omega$, $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$, H una matriz simétrica definida positiva con valores propios mínimo y máximo $0 < \lambda_s \leq \lambda_e$. Sea ∇f L-Continuo en Ω con constante $L > 0$, entonces existe $\overline{\alpha}(\varepsilon, H)$ tal que

$$f(x^{H,\varepsilon}(\alpha)) - f(x) \leq \sigma \nabla f(x)^T (x - x^{H,\varepsilon}(\alpha)) \quad \forall \alpha \leq \overline{\alpha}(\varepsilon, H) \quad [3.7]$$

con

$$x(\alpha) = P(x - \alpha \nabla f(x)), \qquad x^{H,\varepsilon} = P(x - \alpha \tilde{R}^{-1} \nabla f(x)) \quad y \quad \tilde{R} = \tilde{R}(x, \varepsilon, H) = \begin{cases} \delta_{ij} & i \in A^{\varepsilon}(x) \text{ o } j \in A^{\varepsilon}(x) \\ (H_{ij}) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Demostración

Notemos en primer lugar que

$$\nabla f(x)^T (x - x^{H,\varepsilon}(\alpha)) = \underbrace{(R_A^{\varepsilon}(x) f(x))^T (x - x^{H,\varepsilon}(\alpha))}_{[a]} + \underbrace{(R_I^{\varepsilon}(x) \nabla f(x))^T (x - x^{H,\varepsilon}(\alpha))}_{[b]}$$

Para [a], considerando que

$$(x^{H,\varepsilon}(\alpha))_i = x(\alpha)_i, \quad i \in A^{\varepsilon}(x) \quad \tilde{R} = (\delta_{ij}),$$

se tiene que

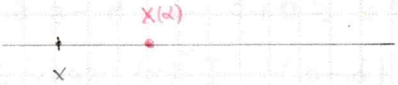
$$(R_A^{\varepsilon}(x) \nabla f(x))^T (x - x^{H,\varepsilon}(\alpha)) = (R_A^{\varepsilon}(x) \nabla f(x))^T (x - x(\alpha)) \overset{P.D.}{\geq 0}$$

Tomando,

$$\alpha \leq \bar{\alpha}_1 = \frac{\min \{ b_i - a_i \}}{2 \max\limits_{x \in \Omega} \| \nabla f(x) \|_{\infty}}$$

- Si $i \in A(x) \subseteq A^{\varepsilon}(x)$, entonces de la elección de α se tiene que

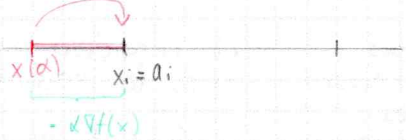
$$(x - x(\alpha))_i = \alpha (\nabla f(x))_i$$
$$(x - x(\alpha))_i = 0$$



No necesito proyector

$x(\alpha)_i = x_i - \alpha(\nabla f(x))_i$
$x_i - x(\alpha)_i = \alpha(\nabla f(x))_i$

«La proyección regresa al conjunto»

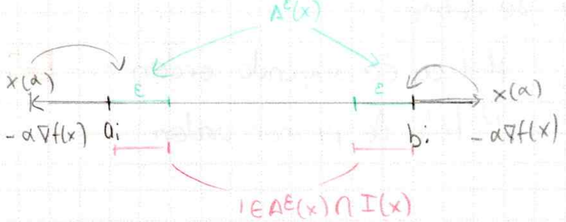


$x(\alpha)_i = a_i$
$\Rightarrow x(\alpha)_i - x_i = 0$

En cualquier caso, se tiene que

$$(x - x(\alpha))_i \nabla f(x)_i = \left\{ \begin{matrix} \alpha (\nabla f(x)_i)^2 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \geq 0$$

- Si $i \in A^{\varepsilon}(x)$ e $i \notin A(x)$ $(i \in A^{\varepsilon}(x) \cap I(x))$ y $(x - x(\alpha))_i \neq \alpha(\nabla f(x))_i$, entonces, necesariamente $i \in A(x(\alpha))$ y se sigue que $(x - x(\alpha))_i \nabla f(x)_i \geq 0$



$$(x(\alpha))_i = a_i \Rightarrow \underbrace{(x_i - a_i)}_{\geq 0} \underbrace{(\nabla f(x))_i}_{\geq 0} \geq 0$$

$$(x(\alpha))_i = b_i \Rightarrow \underbrace{(x_i - b_i)}_{\leq 0} \underbrace{(\nabla f(x))_i}_{\leq 0} \geq 0$$

En conjunto,

$$(R_{A^{\varepsilon}(x)} \nabla f(x))^T (x - x(\alpha)) \geq 0 \qquad [c]$$

Consideremos ahora el caso $i \in I^{\varepsilon}(x)$, por definición

$$a_i + \varepsilon \leq x_i \leq b_i - \varepsilon$$

y tomando adicionalmente $\alpha \leq \bar{\alpha}_2 = \dfrac{\varepsilon}{\max\limits_{x \in \Omega} \| \tilde{R}^{-1} \nabla f(x) \|_{\infty}}$ ← Tomando α de esta forma «no me salgo del conjunto inactivo»

se tiene que i pertenece (está) en los conjuntos inactivos de $x^{H,\varepsilon}(\alpha)$ y $x(\alpha)$. Consecuentemente, de la elección de α,

$$(R_{I^{\varepsilon}(x)} \nabla f(x))^T (x - x^{H,\varepsilon}(\alpha)) = \alpha (R_{I^{\varepsilon}}(x) \nabla f(x))^T \tilde{R}^{-1} \nabla f(x), \qquad i \in I^{\varepsilon}(x)$$

$$= \alpha (R_{I^{\varepsilon}}(x) \nabla f(x))^{+} H^{-1} R_{I^{\varepsilon}(x)} \nabla f(x)$$

$p^T \Delta p \geq \lambda \|p\|^2$

$$\geq \lambda_{\ell}^{-1} \alpha^{-1} \| R_{I^{\varepsilon}}(x) (x - x(\alpha)) \|^2 = \lambda_{\ell}^{-1} (R_{I^{\varepsilon}}(x) \nabla f(x))^T (x - x(\alpha)) \qquad [d]$$

Usando la desigualdad [3.6]

$$\frac{1}{\alpha} \| x - x(\alpha) \|^2 \leq \nabla f(x)^T (x - x(\alpha))$$

y las desigualdades [c] y [d] se sigue que

$$\nabla f(x)^T (x - x^{\varepsilon, H}(\alpha)) = (R_{A^{\varepsilon}(x)} \nabla f(x))^T (x - x^{H,\varepsilon}(\alpha)) + (R_{I^{\varepsilon}(x)} \nabla f(x))^T (x - x^{H,\varepsilon}(\alpha))$$

$$\geq (R_{A^{\varepsilon}(x)} \nabla f(x))^T (x - x(\alpha)) + \lambda_{e}^{-1} (R_{I^{\varepsilon}(x)} \nabla f(x))^T (x - x(\alpha))$$

$$\geq \min\{1, \lambda_e^{-1}\} \nabla f(x)^T (x - x(\alpha))$$

usando [3.6] $$\geq \frac{1}{\alpha} \min\{1, \lambda_e^{-1}\} \| x - x(\alpha) \| \qquad [e]$$

Usando el teorema del valor medio integral y la Lipschitz continuidad del ∇f

$$f(x^{H,\varepsilon}(\alpha)) - f(x) \leq -\nabla f(x)^T (x - x^{H,\varepsilon}(\alpha)) + L \| x - x^{H,\varepsilon}(\alpha) \|^2$$ → Procediendo como en el teo 3.4

usando [e] $$\leq -\frac{1}{\alpha} \underbrace{\min\{1, \lambda_e^{-1}\}}_{\text{máx}\{1, \lambda_e\}} \| x - x^{H,\varepsilon}(\alpha) \|^2 + L \| x - x^{H,\varepsilon}(\alpha) \|^2.$$

Luego

$$f(x^{H,\varepsilon}(\alpha)) - f(x) \overset{[3.6]}{\leq} (1 - L\alpha \,\text{máx}\{1, \lambda_e\}) \nabla f(x)^T (x - x^{H,\varepsilon}(\alpha))$$

Tomando $\alpha \leq \bar{\alpha}_3 = (1-\sigma)/L\,\text{máx}\{1, \lambda_e\}$,

$$\alpha L \,\text{máx}\{1, \lambda_e\} \leq 1 - \sigma, \qquad -1 + \alpha L \,\text{máx}\{1, \lambda_e\} \leq -\sigma,$$

se tiene el resultado, tomando $\bar{\alpha} = \min\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3\}$. ▨

Teorema 3.7 Sea ∇f L-continua con constante $L>0$. Supongamos que las matrices H_k son simétricas definidas positivas, y que existen $\bar{\kappa}$ y λ_e tales que $\kappa(H_k) \leq \bar{\kappa}$ y $\| H_k \| \leq \lambda_e$, $\forall k$. Supongamos que existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que $\bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_k < (\min\{b_i - a_i\})/2$, entonces

$$\| x_k - x_k(1) \| = 0$$

y cualquier punto de acumulación $\{x_k\}$ es un punto estacionario.

Demostración
La demostración de este resultado se sigue usando el esquema de demostración del [teorema 3.5] y la desigualdad del [Lema 3.6]

Lunes, 25 de julio de 2022.

Subsección 3.1.4. Método de Newton Proyectado

Sea x_0 suficientemente cerca de un mínimo local no degenerado y además $H_k = \nabla_R^2 f(x)$ se obtienen las iteraciones del método de Newton proyectado y están dadas de la siguiente forma

$$x_{k+1} = P(x_k - \alpha \tilde{R}(x_k, \varepsilon_k, \nabla_R^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)) \qquad [3.8]$$

Teorema 3.8. Sea f de clase C^2 y $\bar{x}$ un mínimo local no degenerado. Si x_0 está suficientemente cerca de $\bar{x}$ y $A(\bar{x}) = A(x_k)$, entonces las iteraciones del método de Newton proyectado con $\varepsilon_k = \| x_k - x_k(1) \|$ converge q-cuadráticamente a $\bar{x}$.

Demostración (Lista de resultados)

- Lema 3.6
- Teorema del valor medio integral
- Lema 3.4

Sección 3.2. Métodos de Newton generalizados (Semismooth)

Consideremos la estructura de las restricciones de caja, el operador proyección sobre Ω se puede escribir de la siguiente manera

$$P(x)_i = \min\{\max\{x_i, a_i\}, b_i\}$$

- Si $x_i \in [a_i, b_i]$, $\max\{x_i, a_i\} = x_i$ y $\min\{a_i, b_i\} = x_i$, $P(x_i)_i = x_i$,
- Si $x_i < a_i$ $\max\{x_i, a_i\} = a_i$ y $\min\{a_i, b_i\} = a_i$, $P(x_i)_i = a_i$.
- Si $x_i > b_i$ $\max\{x_i, a_i\} = x_i$ y $\min\{x_i, b_i\} = b_i$, $P(x_i)_i = b_i$.

Recordando que la condición de optimalidad se puede escribir como

$$\bar{x} = P(\bar{x} - \lambda \nabla f(\bar{x})), \quad \forall \lambda > 0.$$

Luego,

$$\bar{x} - \min\{\max\{\bar{x} - \lambda \nabla f(\bar{x}), a\}, b\} = 0 \qquad [3.9]$$

es la condición de optimalidad. Puesto que las funciones máx y mín no son diferenciables, no se puede aplicar el método de Newton clásico; sin embargo, se puede considerar una noción más débil de diferenciabilidad para construir una iteración tipo Newton.

Definición 3.3 Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice Newton diferenciable o semi-smooth en un abierto $V \subseteq D$ si existe una derivada generalizada

$$G: V \to \mathbb{R}^{n \times m}$$

tal que

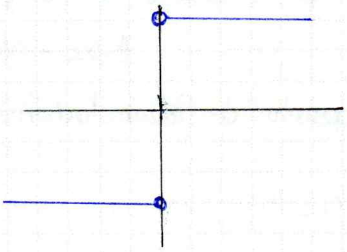
$$\lim_{\|h\| \to 0} \| F(x+h) - F(x) - G(x+h)h \| = 0 \qquad \forall x \in V. \qquad [*]$$

Ejemplo: Consideremos la función $f = |\cdot|$,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = |x|,$$

f no es diferenciable en el sentido de Frèchet en $x = 0$; no obstante, usando la derivada generalizada, se tendría lo siguiente

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$



para $x = 0$ se verifica $[*]$

i) Si $h > 0$, $F(0+h) - F(0) - G(0+h)h = F(h) - F(0) - G(h) \cdot h$,
$= h - 0 - 1 \cdot h = 0$,

Luego

$$\lim_{\|h\| \to 0} \| F(0+h) - F(0) - G(0+h)h \| = \lim_{\|h\| \to 0} 0 = 0$$

ii) Si $h < 0$ $F(0+h) - F(0) - G(0+h) \cdot h = F(h) - F(0) - G(h) \cdot h$
$= -h - 0 + 1 \cdot h = 0$.

Análogamente

$$\lim_{\|h\| \to 0} \| F(0+h) - F(0) - G(0+h) \cdot h \| = \lim_{\|h\| \to 0} 0 = 0.$$

iii) $h = 0$. Trivialmente.

Así, f es Newton diferenciable en $x = 0$.

Teorema 3.9. Sea $\bar{x}$ una solución de $F(\bar{x}) = 0$ con F-Newton diferenciable en una vecindad V tal que $\bar{x} \in V$. Sea G la derivada generalizada de F y asumamos

$$\| G(x)^{-1} \| \leq c \qquad \forall x \in V \quad \text{con } c > 0 \qquad [3.10]$$

Entonces las iteraciones del Método de Newton semi-smooth.

$$x_{k+1} = x_k - G(x_k)^{-1}F(x_k) \qquad [3.11]$$

converge q-superlinealmente hacia $\bar{x}$ si $\|x_k - \bar{x}\|$ es suficientemente pequeño.

Demostración

Puesto que $F(\bar{x})=0$, de [3.11]

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - \bar{x}\| &= \| x_k - G(x_k)^{-1}F(x_k) - \bar{x}\| \\ &= \| G(x_k)^{-1}(F(\bar{x}) - F(x_k) + G(x_k)(x_k - \bar{x}))\| \\ &\leq \|G(x_k)^{-1}\| \; \|F(\bar{x}) - F(x_k) + G(x_k)(x_k - \bar{x})\| \\ &\leq c\, \|-F(\bar{x}) + F(x_k) - G(x_k)(x_k - \bar{x})\| \end{aligned} \qquad [3.12]$$

Por la Newton diferenciabilidad

$$\|F(x_k) - F(\bar{x}) - G(x_k)(x_k - \bar{x})\| = o(\|x_k - \bar{x}\|) \leq \varepsilon_k \|x_k - \bar{x}\|$$

con $(\varepsilon_k)_k$ una sucesión tal que $\varepsilon_k \to 0$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, $|\varepsilon_k| < \varepsilon$. Así,

$$\|F(x_k) - F(\bar{x}) - G(x_k)(x_k - \bar{x})\| \leq \frac{1}{2c}\|x_k - \bar{x}\|.$$

Luego

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \frac{1}{2}\|x_k - \bar{x}\| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \|x_0 - \bar{x}\| \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como x_0 y $\bar{x}$ están suficientemente cerca

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - \bar{x}\| = 0.$$

Adicionalmente, de [3.12]

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|} \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{\|F(x_k) - F(\bar{x}) - G(x_k)(x_k - \bar{x})\|}{\|x_k - \bar{x}\|}$$

$$= c \lim_{k\to+\infty} \frac{o(\|x_k - \bar{x}\|)}{\|x_k - \bar{x}\|} = 0$$

Luego, el método de Newton semi-smooth converge q-superlinealmente

Sección 3.3. Optimización con restricciones generales.

En esta sección estudiaremos problemas de optimización en los cuales el conjunto factible no es todo $\mathbb{R}^n$ sino que está definido por un conjunto de restricciones de igualdad y desigualdad.

$$\left| \begin{array}{lll} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & f(x) & \\ \text{s.a.} & g(x) \leq 0 & (\, m \text{ restricciones de desigualdad}) \\ & h(x) = 0 & (\, p \text{ restricciones de igualdad}) \end{array} \right. \qquad [3.12]$$

con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ funciones continuamente diferenciables. La función f se denomina función de costo $g_i\ (i \in \{1, \dots, m\})$ representan restricciones de desigualdad y $h_i\ (i \in \{1, \dots, p\})$ restricciones de igualdad. El conjunto de puntos que satisfacen

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\}$$

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se dice factible si $x \in X$. Los conjuntos de restricciones activas e inactivas de la restricción de desigualdad

$$A(x) = \{1 \leq i \leq m : g_i(x) = 0\}$$

$$I(x) = \{1 \leq i \leq m : g_i(x) < 0\}.$$

De manera similar, $\bar{x} \in X$ es solución del problema [3.12] si

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \qquad \forall x \in X.$$

Martes, 26 de julio de 2022.

De manera similar a lo realizado en otro tipo de problemas (sin restricciones, con restricciones de caja) se require caracterizar las soluciones de [3.12] mediante las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad

Para un problema sin restricciones

Necesarias $\nearrow$ 1er orden: $\nabla f(\bar{x}) = 0$ $\searrow$ 2do orden $\nabla^2 f(\bar{x}) \succeq 0$ Suficientes $\nabla^2 f(\bar{x}) \succ 0$

Subsección 3.3.1 Condiciones necesarias de primer orden

A continuación, definiremos conjuntos de direcciones que serán utilizados para determinar el conjunto de direcciones factibles

Definición 3.4. Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina cono si

$$\lambda x \in K, \qquad \forall \lambda > 0 \text{ y } x \in K$$

Ejemplo: $K = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \}$

Definición 3.5. Sea $\bar{x} \in X$, $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, si existe $\eta > 0$ tal que

$$\bar{x} + td \in X, \qquad \forall t \in [0, \eta]$$

entonces d se dice, dirección factible de X en $\bar{x}$.

Definición 3.6. Sea $H \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, el cono tangencial a H en el punto $x \in H$ se define de la siguiente manera:

$$T(H, x) = \{ d \in \mathbb{R}^n : \exists (\eta_k)_k \geq 0, (x^{(k)})_k \in H, x^{(k)} \to x, \eta_k (x^{(k)} - x) \to d \}$$

«direcciones límite» Si se considera el cono tangencial a X en $\bar{x}$, obtenemos una sucesión de puntos factibles

$$d_k = \eta_k (x_k - \bar{x}), \text{ entonces } \qquad x_k = \bar{x} + \frac{d_k}{\eta_k}$$

donde $d_k \to d$

Teorema 3.10. Sea $\bar{x} \in X$ una solución local del problema [3.12], se sigue entonces que

$$\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0, \qquad \forall d \in T(X, \bar{x}) \qquad [3.13]$$

Demostración

Sea $d \in T(X, \bar{x})$; así por la [definición 3.6] existen $(\eta_k)_k > 0$ y $(x_k)_k \in H$ con $x_k \to x$, tal que $\eta_k (x_k - \bar{x}) \to d$; Usando el teorema de Taylor

$$f(x_k) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x_k - \bar{x}) + \theta(\|x_k - \bar{x}\|)$$

multiplicando por $\eta_k > 0$

$$(f(x_k) - f(\bar{x})) \eta_k = \nabla f(\bar{x})^T \eta_k (x_k - \bar{x}) + \eta_k \theta(\|x_k - \bar{x}\|)$$

luego, como $f(x_k) - f(\bar{x}) > 0$, $\forall k$, entonces

$$\eta_k \theta(\|x_k - \bar{x}\|) + \nabla f(\bar{x})^T \eta_k (x_k - \bar{x}) = (f(x_k) - f(\bar{x})) \eta_k > 0$$

luego, como $d_k = \eta_k (x_k - \bar{x})$

$\Rightarrow$

$$\nabla f(\bar{x})^T d_k + \theta \frac{(\|x_k - \bar{x}\|)}{\|x_k - \bar{x}\|} \|d_k\| > 0$$

Así, cuando $k \to +\infty$

$$\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0.$$

Observación: Un punto que satisfaga las condiciones del [teorema 3.10] se denomina punto estacionario

Puesto que la caracterización de $T(X,\bar{x})$ es compleja, se buscan formas alternativas de caracterizar los mínimos locales

Definición 3.7. Definimos el cono tangencial linealizado de $x \in X$

$$T_\ell(g,h,x) = \{ d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x)^T d \leq 0, \ i \in A(x) \quad \nabla h_i(x)^T d = 0 \}$$

El cono tangencial linealizado se puede interpretar como una versión linealizada de $T(X,\bar{x})$. En efecto, si linealizamos las restricciones en una vecindad de $\bar{x}$.

$$X_\ell(\bar{x}) = \{ x : g(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})^T (x-\bar{x}) \leq 0 . \ h(\bar{x}) + \nabla h(\bar{x})^T (x - \bar{x}) = 0 \}.$$

y se puede probar que

$$\underbrace{T(X_\ell(\bar{x})}_{\text{conjunto}}, \underbrace{\bar{x}}_{\text{punto.}}) = T_\ell(g,h,\bar{x})$$

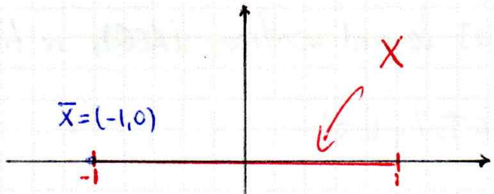
(Deber)

Notemos que mientras $T(X,\bar{x})$ depende únicamente de X, $T_\ell(g,h,\bar{x})$ depende de las restricciones

Ejemplo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} g_1 : -x_1 - 1 \leq 0 & (-1 \leq x_1) \\ g_2 : \ x_1 - 1 \leq 0 & (x_1 \leq 1) \end{matrix} \quad h : x_2 = 0 \right\}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} -x_1 - 1 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix} \qquad h(x) = x_2$$



En el punto $\bar{x} = (-1,0)^T$

$$A(\bar{x}) = \{ i \in \{1,2\} \ g_i(\bar{x}) = 0 \} = \{1\}$$

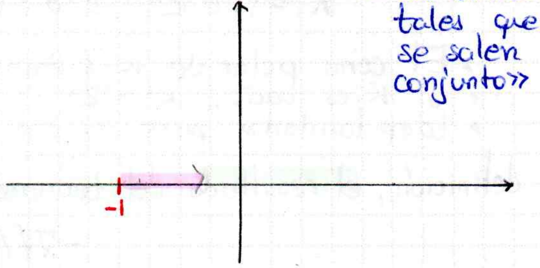
$$\nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla h(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_\ell(g,h,\bar{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^2 : (-1,0) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \leq 0 . \quad (0,1) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \{ (d_1, 0)^T : d_1 \geq 0 \}.$$

El cual coincide con $T(X,\bar{x})$

« Las direcciones tales que no se salen del conjunto »



Por otro lado, el conjunto X puede estar representado de esta manera

$$X = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 - (x_1+1)^3 \leq 0 , \ x_1 - 1 \leq 0 , \ x_2 = 0 \}$$

$$-(x_1+1)^3 \leq 0 , \quad x_1 - 1 \leq 0$$

$$x_1 \geq -1$$

$$\bar{x} = (-1,0)^T$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_2 - (x_1+1)^3 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad h(x) = x_2$$

$$A(\bar{x}) = \{1\} \qquad A(\bar{x}) = \{ i \in \{1,2\} : g_i(\bar{x}) = 0 \} = \{1\}.$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -3(x_1+1)^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla h(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-3(x_1+1)^2 d_1 \leq 0$$

$$(x_1+1)^2 d_1 \geq 0$$

$$T_\ell(g,h,\bar{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^2 : (-0 \quad 1) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \leq 0 , \quad (0,1) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \{ d \in \mathbb{R}^2 : d_2 = 0 \}$$

El cual contiene a $T(X,\bar{x})$

Mientras que la descripción de $T(X,\bar{x})$ es compleja, la de $T_\ell(g,h,\bar{x})$ es sencilla. Lo deseable es reemplazar T por T_ℓ por la caraterización de puntos estacionarios.

Lema 3.7 Para todo $x \in X$, se tiene que $T(X,x) \subseteq T_\ell(g,h,\bar{x})$

Demostración Supongamos $d \in T(X,x)$, luego, existen $d_k = \eta_k (x_k - x)$ con $\eta_k > 0$, $x_k \to x$ y $d_k \to d$ se sigue entonces que

$$\eta_k(g_i(x^k) - g_i(x))\ \eta_k \nabla g_i(x)^T(x_k - x) + \vartheta(\|x_k - x\|)\eta_k$$

para $i \in A(x)$, $g_i(x) = 0$

$$0 \geq \underset{>0}{\underbrace{\eta_k}}\ \underset{\leq 0}{\underbrace{g_i(x_k)}} = \underset{\to \nabla g_i(x)^T d}{\nabla g_i(x)^T d_k} + \frac{\|d_k\|}{\|x_k - x\|}\ \underset{\to 0}{\vartheta(\|x_k - x\|)}$$

i.e.,

$$\nabla g_i(x)^T d \leq 0, \qquad \forall i \in A(x)$$

Así mismo

$$0 = \eta_k(h_i(x_k) - h_i(x)) = \underbrace{\eta_k \nabla h_i(x)^T(x_k - x)}_{d_k} + \eta_k \underset{\to 0}{\vartheta(\|x_k - x\|)}$$

$$= \nabla h_i(x)^T d_k + \frac{\|d_k\|}{\|x_k - x\|}\vartheta(\|x_k - x\|)$$

i.e.

$$\nabla h_i(x)^T d = 0.$$

Por lo tanto, $d \in T_\ell(g, h, x)$.

Definición 3.8 La condición $T_\ell(g, h, x) = T(X, x)$ se denomina condición de calificación de Abadie (ACQ)

Reformulando el teorema 3.10. teniendo en cuenta la condición de calificación Abadie tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.11 Sean $\bar{x} \in X$ una solución local del problema [3.12] la cual verifica (ACQ), se tiene entonces que

$$\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0 \qquad \forall d \in T_\ell(g, h, \bar{x})$$

Lunes, 1 de agosto de 2022.

Definición 3.9. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono no vacío. El cono polar de K se define de la siguiente manera

$$K^\circ = \{v \in \mathbb{R}^n : v^T d \leq 0,\ \forall d \in K\}$$

- El cono polar de K siempre es convexo.
- Si K es vacío, $K^\circ = \mathbb{R}^n$
- La «polaridad» puede ser vista como una generalización de la ortogonalidad.

Con esta definición, el resultado del teorema 3.10 de la siguiente manera.

$$-\nabla f(\bar{x}) \in T(X, \bar{x})^\circ$$

De manera similar, el Teorema 3.11. se reescribiría de la siguiente manera

$$-\nabla f(\bar{x}) \in T_\ell(g, h, \bar{x})^\circ$$

Consecuentemente, el Teorema 3.11 se obtendría del Teorema 3.10 si

$$T(X, \bar{x})^\circ = T_\ell(g, h, \bar{x})$$

Definición 3.10. La condición $T(X, \bar{x})^\circ = T_\ell(g, h, \bar{x})^\circ$ se conoce como condición de calificación de Guignard (GCQ)

Se tiene inmediatamente que si $x \in X$ cumple (ACQ), entonces cumple (GCQ). Así mismo, podemos formular el siguiente problema

Teorema 3.12. Sea $\bar{x} \in X$ una solución local de [3.12] que cumple GCQ

$$\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0 \qquad \forall d \in T_\ell(g, h, \bar{x})$$

Observación: La condición de Guignard es más general que la condición de Abadie. Ya que los conos polares pueden coincidir mientras que los conos tangenciales pueden no hacerlo.

Subsección 3.3.2 Condiciones Karush - Kuhn - Tucker

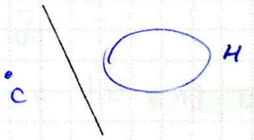
En estos sección se formularán las condiciones de optimalidad de primer orden mediante el teorema KKT. Para la demostración de existencia de multiplicadores que verifiquen las condiciones KKT requerimos el lema de Farkas, además de verificar una condición de calificación.

Lema 3.8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, el conjunto

$$K = \{ x \in \mathbb{R}^n : \; x = Au + Bv, \; u \in \mathbb{R}^m, \; u \geq 0, \; v \in \mathbb{R}^p \}$$

es un cono convexo y cerrado. ↳ Este conjunto verifica b) del lema de Farkas

Teorema - Separación Hanh-Banach-
Sea $H \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, cerrado y convexo, $c \in \mathbb{R}^n \setminus H$, entonces existen $v \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que



$$v^T c > \alpha$$
$$v^T x \leq \alpha, \quad \forall x \in H$$

Si además, H es un cono se puede tomar $\alpha = 0$

$$v^T c > 0, \quad v^T x \leq 0 \quad \forall x \in H$$

Lema de Farkas Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $c \in \mathbb{R}^n$, los siguientes enunciados son equivalentes

a) Para todo $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $A^T d \leq 0$, $B^T d = 0$, se tiene que $c^T d \leq 0$
b) Existe $u \in \mathbb{R}^m$, $u \geq 0$ y $v \in \mathbb{R}^p$ con $c = Au + Bv$

La equivalencia se verifica también para los casos $p = 0$ o $m = 0$

Demostración
(ii) ⇒ (i) Sea $c = Au + Bv$ con $u \in \mathbb{R}^m$ ($u \geq 0$) y $v \in \mathbb{R}^p$, entonces $\forall d \in \mathbb{R}^n$ tal que $A^T d \leq 0$ y $B^T d = 0$, debemos probar que $c^T d \leq 0$

$$c^T d = (Au + Bv)^T d = \underbrace{u^T}_{\geq 0} (\underbrace{A^T d}_{\leq 0}) + v^T (\underbrace{B^T d}_{=0}) \leq 0$$

(i) ⇒ (ii)
Del (Lema 3.8) sabemos que el conjunto

$$K = \{ x \in \mathbb{R}^n : \; x = Au + Bv, \; u \geq 0, \; v \in \mathbb{R}^p \} \quad \text{es cono convexo y cerrado.}$$

Realizaremos la demostración por contradicción. Supongamos que b) no se verifica, i.e., $c \notin K$ y se puede aplicar el teorema de Hanh-Banach. Es decir, existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$p^T c > 0 \qquad p^T x \leq 0, \quad \forall x \in K \qquad [***]$$

Sea a_i la i-ésima columna de A. Entonces, $a_i \in K$, pues, $a_i = Ae_i$, con $v = 0$; luego $\overset{[*]}{p^T a_i \leq 0}$.
Además, de manera similar, para la j-ésima columna de B se tiene que $\pm b_j \in K$

$$\pm b_j = \pm Be_j \quad \text{con } u = 0 \Rightarrow p^T b_j \leq 0 \quad p^T(-b_j) \leq 0 \;\; (p^T b_j \geq 0)$$
$$\Rightarrow p^T b_j = 0 \;\; [**]$$

Entonces, $\overbrace{A^T p \leq 0}^{[*]}$, $\overset{[**]}{B^T p = 0}$ y $p^T c > 0$ lo cual contradice (a).

Teorema 3.13. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker
Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ una solución local de [3.12] en la cual se satisface una condición de calificación. Entonces, existen multiplicadores de Lagrange $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ y $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^n$ tal que

a) $\nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\bar{\lambda} + \nabla h(\bar{x})\bar{\mu} = 0$
b) $h(\bar{x}) = 0$
c) $\bar{\lambda} \geq 0$, $g(\bar{x}) \leq 0$, $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0$ ⇝ complementariedad

Demostración Gracias al [Teorema 3.12] se verifica que

$$h(\bar{x}) = 0, \quad g(\bar{x}) \leq 0 \quad \text{y} \quad -\nabla f(\bar{x})^T d \leq 0 \quad \forall d \in T_e(g, h, \bar{x}),$$

i.e $\forall d \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0$ $(i \in A(\bar{x}))$ y $\nabla h_i(\bar{x})^T d = 0$. Usando el lema de Farkas, tomando $c = -\nabla f(\bar{x})$, $A = \nabla g(\bar{x})$ y $B = \nabla h(\bar{x})$, existen vectores $u \geq 0$ y $v \in \mathbb{R}^p$ tales que

$$C = A\mu + Bv$$

Tomando $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\bar{\lambda}_{A(\bar{x})} = \mu \geq 0$ y $\bar{\lambda}_{I(\bar{x})} = 0$, $\bar{\mu} = v$ se obtiene (a) y (c)

La tripleta $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ que satisfagan las condiciones KKT se denominan tripleta KKT y a $\bar{x}$ punto KKT o punto estacionario.

Observación: Las condiciones de complementariedad (c) se pueden reemplazar por una de las siguientes condiciones

(c') $\bar{\lambda}_i \geq 0$, $g_i(\bar{x}) \leq 0$, $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i$

(c'') $g(\bar{x}) \leq 0$, $\bar{\lambda}_i \geq 0 \quad i \in A(\bar{x})$
$\bar{\lambda}_i = 0 \quad i \in I(\bar{x})$

Sea $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ una tripleta KKT se dice que tienen complementariedad estricta si

$$\bar{\lambda}_i > 0 \qquad \forall i \in A(\bar{x})$$

Si existe al menos un i tal que $\bar{\lambda}_i = g_i(\bar{x}) = 0$ no se tiene la complementariedad estricta.

Martes 2 de agosto de 2022

La condición a) del Teorema 3.13 se puede escribir con ayuda del Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \lambda, \mu) &\longmapsto \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) \end{aligned}$$

de la siguiente manera

a') $\nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a.} & \\ & g(x) \leq 0 \quad (\lambda \geq 0) \\ & h(x) = 0 \end{array} \iff \min_{x} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$$

Ejemplo 1)

$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^n} \; x^2 + y^2$ → función objetivo

s.a.

$x + y = 3$ → restricciones de igualdad

$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + \mu(3 - x - y)$

Condición de optimalidad KKT

$\nabla_{(x,y)} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 2x - \mu = 0 \\ 2) & 2y - \mu = 0 \\ 3) & x + y = 3 \end{array}\right| = \nabla_{(x,y)} \mathcal{L}(x, y, \mu) = 0$$

Reemplazando x en (1)

- $2(3 - y) - \mu = 0$
  $6 - 2y = \mu$

- $x = 3 - y$

- $2y - 6 + 2y = 0$
  $4y = 6$

$y = 3/2$, $x = 3 - 3/2 = 3/2$, $\mu = 6 - 3 = 3$.

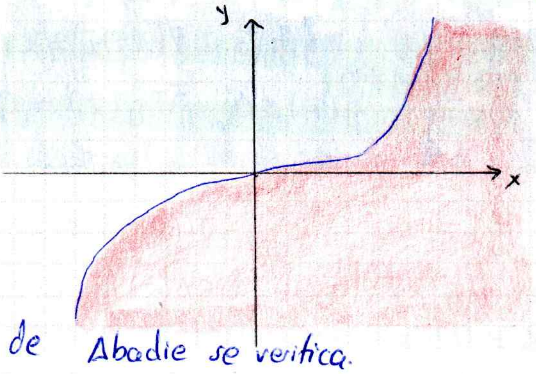
Sección 3.4 Condiciones de calificación.

Para ilustrar la necesidad de las condiciones de calificación, consideremos el siguiente ejemplo

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}} \; x$$

$x^3 - y \geq 0 \quad (y - x^3 \leq 0) \quad g_1$

$y \geq 0 \quad (-y \leq 0) \quad g_2$



Es fácil ver que $\bar{x} = (0,0)$ es el mínimo global del problema

Verifiquemos a continuación si la condición de Abadie se verifica.

$$T(X,\bar{x}) = \{ d \in \mathbb{R}^2 : d = (d_1, 0) \text{ con } d_1 \geq 0 \}$$

$$A(\bar{x}) = \{ i \in \{1,2\} : g_i(\bar{x}) = 0 \} = \{1,2\}.$$

$$\nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -3x^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $$T_\ell(g_1, g_2, \bar{x}) = \{ d \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(0 \ \ 1)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \leq 0}_{d_2 \leq 0}, \ \underbrace{(0, -1)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \leq 0}_{-d_2 \leq 0} \} = \{ d \in \mathbb{R}^2 : d = (d_1, 0), \ d_1 \in \mathbb{R} \}$$

Luego, la condición de Abadie no se verifica, verifiquemos ahora si la condición de Guignard se cumple

$$T(X,\bar{x})^\circ = \{ v \in \mathbb{R}^2 : (a_1, v_2)\begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0, \ d_1 \geq 0 \}$$

$$= \{ v \in \mathbb{R}^2 : \underset{\leq 0 \ \geq 0}{v_1 d_1} \leq 0 \} = \{ v = (v_1, v_2) : v_1 \leq 0, \ v_2 \in \mathbb{R}$$

$$T_\ell(g, \bar{x})^\circ = \{ v \in \mathbb{R}^2 : (v_1, v_2)\begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0, \ d_1 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ v \in \mathbb{R} : v_1 d_1 \leq 0, \ d_1 \in \mathbb{R} \} = \{ v = (0, v_2) : v_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$\left.\begin{matrix} \leq 0 \ \geq 0 \\ \geq 0 \ \leq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_1 = 0$$

En este curso, si implica Guignard, se denomina condición de calificación.

De donde, la condición de Guignard tampoco se verifica, luego no existe $\bar{\lambda}$ tal que las condiciones KKT se verifican.

Este ejemplo, resalta la importancia de la condición de calificación. Sin embargo, en la práctica no es fácil verificar condiciones tan generales como Abadie o Guignard.

A continuación, definiremos condiciones de calificación más restrictivas que las anteriores, que son sin embargo, más fáciles de verificar.

Una de las condiciones de calificación más sencilla se obtiene cuando las condiciones (restricciones) de desigualdad activas son cóncavas y las de igualdad son lineales.

Teorema 3.14 La siguiente es una condición de calificación para $\bar{x} \in X$

$$g_j \text{ concavas}, \ j \in A(\bar{x}) \ \text{ y } \ h \text{ lineales-afines} \qquad [3.14]$$

Demostración

[3.14] es CQ, si implica ACQ. Debemos probar entonces que $T_\ell \subseteq T(X,\bar{x})$

Sea $\bar{x} \in X$ que verifica [3.14] y sea $d \in T_\ell(g, h, \bar{x})$. Para $\alpha > 0$, definimos $\alpha_k = \alpha / k$ para k suficientemente pequeño, se tiene que

$$g_i(\bar{x} + \alpha_k d) \leq 0 \qquad i \in A(\bar{x})$$

De la concavidad de g_i, $i \in A(\bar{x})$, se tiene que

$$g_i(\bar{x} + \alpha_k d) - \underset{=0}{g_i(\bar{x})} \leq \underbrace{\alpha_k \nabla g_i(\bar{x})^T d}_{\leq 0 \ \to \ d \in T_\ell} \qquad \text{(Ver Teorema 2.3)}$$

$$\Rightarrow g_i(\bar{x} + \alpha_k d) \leq 0$$

De la misma manera, para la restricción de igualdad se tiene que

$$h(\bar{x} + \alpha_k d) = h(\bar{x}) + \alpha_k \underset{=0}{\nabla h(\bar{x})^T d} = 0,$$

luego, $\bar{x} + \alpha_k d \in X$, $\forall k \geq 1$ y se tiene que $d \in T(X, \bar{x})$

Definición 3.11. Un punto $x \in X$ satisface la condición de calificación Mangosarian-Fromovitz (MFCQ) si se cumple que

a) $\nabla h(x)$ tiene rango completo por columnas

b) $\exists d \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla g_i(x)^T d < 0$, $i \in A(x)$, $\nabla h(x)^T d = 0$

En el caso $m = 0$, $A(\bar{x}) = \emptyset$ se tiene únicamente (a)

Mientras que si $p=0$, entonces se cumple únicamente que

$$\nabla g_i(x)^T d < 0 \qquad i \in A(x)$$

Se dice que $x \in X$ satisface la condición de calificación Mangasarian-Fromovitz generalizada (MFCQ') en lugar de a)

a') $\nabla h(x)$ tiene rango completo por filas o h es afín-lineal.

Teorema 3.15 Sea $x \in X$ un punto que satisface MFCQ o (MFCQ') entonces satisface ACQ

Definición 3.12. $x \in X$ satisface la CQ de independencia lineal positiva (PLICQ) si:

a) $\nabla h(x)$ tiene rango completo por columnas
b) No existen vectores $\mu \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\nabla g(x)\mu + \nabla h(x) v = 0, \qquad \mu_{A(x)} \geqslant 0, \quad \mu_{A(x)} = 0 \qquad \mu_{I(x)} = 0$$

Si $m=0$, o $A(x) = \emptyset$ no se cumple. Si $p=0$ no se cumple (a) ni se tiene el término $\nabla h(x) v$ en (b)

La condición generalizada (PLICQ') se obtiene al reemplazar a) por

a') $\nabla h(x)$ tiene rango completo por filas o h es afín lineal

Se puede demostrar la equivalencia MFCQ y PLICQ.

Lema 3.9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ los siguientes enunciados son equivalentes

a) No existen vectores $\mu \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^p$ tal que $A\mu + Bv = 0$, $\mu \geqslant 0$ $(\mu \neq 0)$
b) Existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $A^T d < 0$ y $B^T d = 0$

Este resultado también se cumple si $p=0$.

Teorema 3.16. Un punto $x \in X$ satisface MFCQ ssi satisface PLICQ. De manera similar, un $x \in X$ satisface MFCQ' sss satisface PLICQ'. Por lo tanto, PLICQ y PLICQ' son condiciones de calificación.

Demostración

Notemos que los literales a) y a') de ambos literales son iguales, con lo cual si $m=0$ o $A(x) = \emptyset$ la conclusión es directa.

Si $m \geq 1$ y $A(x) \neq \emptyset$, entonces tomando $A = \nabla g_{A(x)}(x)$ y $B = \nabla h(x)$ se tiene que la condición (b)-PLICQ es la misma a)-Lema 3.9. Por otro lado, b)-MFCQ es equivalente a b)-Lema 3.9. Luego, gracias al Lema 3.9, las equivalencias de los 2 enunciados se verifican.

Definición Un punto $x \in X$ se dice regular si las columnas de la matriz

$$\left(\nabla g_{A(x)}(x), \nabla h(x) \right)$$

son linealmente independientes. Se dice entonces que $x \in X$ satisface la condición de calificación de independencia lineal (LICQ).

$$\begin{tikzcd} & \text{PLICQ} \arrow[dd, Leftrightarrow] & & \\ \text{LICQ} \arrow[r, Rightarrow] & {} \arrow[r, Rightarrow] & \text{ACQ} \arrow[r, Rightarrow] & \text{GCQ} \\ & \text{MFCQ} & & \text{CQ} \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Es la condición más sencilla de verificar

Viernes, 5 de agosto de 2022.

Sección 3.5 Problemas convexos.

A continuación, consideraremos un problema de minimización donde la función objetivo y el conjunto factible X son convexos.

$$\min_{x \in X} f(x)$$

Este tipo de problemas reciben el nombre de problemas convexos. De la sección anterior sabemos que el problema a optimizar

$$[3.12] \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{s.a.} \\ \quad g(x) \leq 0 \\ \quad h(x) = 0 \end{array} \right.$$

Si f es convexa, h es afín-lineal y g es convexa, entonces el conjunto factible X es convexo.

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in X \quad \text{dado } x, y \in X \quad \text{con } \lambda \in]0,1[$$

$$g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{g(x)}_{\leq 0} + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{g(y)}_{\leq 0} \leq 0$$

$$h(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda \underbrace{h(x)}_{=0} + (1-\lambda) \underbrace{h(y)}_{=0} = 0$$

$$\rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in X$$

Analizamos este tipo de problemas por separado pues para ellos, las condiciones KKT son también condiciones suficientes, es decir, para los problemas convexos un punto que cumple las condiciones KKT es mínimo. A continuación, demostraremos que todo mínimo local es también un mínimo global.

Teorema 3.17 Sean $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funciones convexas y $h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función lineal. Entonces, todo mínimo local es un mínimo global de [3.12]

Demostración (Por absurdo)

Supongamos que $\bar{x}$ es mínimo local pero no mínimo global. Existe por lo tanto, $x_1 \in X$ tal que

$$f(x_1) < f(\bar{x}) \qquad [*]$$

Sea $\lambda \in [0,1]$ y $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)\bar{x} = \bar{x} + \lambda(x_1 - \bar{x})$, de la convexidad de X, se sigue que $x_\lambda \in X$, además f es convexa, luego

$$\begin{aligned} f(x_\lambda) &= f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(\bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \lambda \underbrace{(f(x_1) - f(\bar{x}))}_{<0} \\ &< f(\bar{x}) \end{aligned} \qquad [**]$$

Si λ es suficientemente pequeño. $x_\lambda = \bar{x} + \lambda(x_1 - \bar{x})$ pertenece a una vecindad de $\bar{x}$, luego [**] contradice que sea $\bar{x}$ un mínimo local

Teorema 3.18 Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$ convexas y diferenciables y $h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ lineal y diferenciable. Si $(\bar{x}, \lambda, \bar{\mu})$ verifica las condiciones KKT entonces $\bar{x}$ es solución de [3.12]

Demostración

Demostremos que $f(x) > f(\bar{x})$ para todo $x \in X$, como $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ verifican las condiciones KKT por hipótesis se sigue que

a) $\nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\bar{\lambda} + \nabla h(\bar{x})\bar{\mu} = 0$

b) $h(\bar{x}) = 0$

c) $g(\bar{x}) \leq 0$, $\bar{\lambda} \geq 0$, $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0$

Por otro lado, ya que cada g_i es una función diferenciable y convexa, se verifica que [Ver teo 2.3]

$$g_i(x) - g_i(\bar{x}) \geq \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

multiplicando por $\lambda_i \geq 0$ y notando $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$

$$\lambda_i \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \leq \bar{\lambda}_i g_i(x) - \underbrace{\bar{\lambda}_i g_i(x)}_{=0}$$

Además, ya que h es lineal-afín se tiene que

$$h(x) = h(\bar{x}) + \nabla h(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

de la factibilidad de $x \in X$ y usando b)

$$\nabla h(\bar{x})^T (x-\bar{x}) = 0$$

Finalmente, ya que f es convexa y diferenciable tenemos que

$$f(x) - f(\bar{x}) \geqslant \nabla f(\bar{x})^T (x-\bar{x})$$

$$= -\sum_{i \leq m} \bar{\lambda_i} \nabla g_i(\bar{x})^T (x-\bar{x}) - \underbrace{\sum_{j \leq p} \mu_j \nabla h_j(\bar{x})^T (x-\bar{x})}_{=0}$$

$$= -\sum_{i \leq m} \bar{\lambda_i} \nabla g_i(\bar{x})^T (x-\bar{x}) \geqslant 0$$

de donde $f(x) \geqslant f(\bar{x})$, $\forall x \in X$ ▨

Ejemplo:

$$\min \ f(x) = x_3 - \frac{1}{2} x_1^2$$

s.a.

$$g_1(x) = -(x_2 + x_3 + x_1^2) \leq 0$$
$$g_2(x) = -(x_3 - x_2 + x_1^2) \leq 0$$
$$g_3(x) = -x_3 \leq 0$$

Considere $\bar{x} = (0,0,0)$

a) ¿Qué condición de calificación se verifica?

$A(\bar{x}) = \{1,2,3\}$

$$\nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$(0,-1,-1) = -1\,(0,1,-1) + 2\,(0,0,-1)$$

luego, no se verifica LICQ.

MFCQ Con $i \in A(\bar{x})$, $\exists d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0$

- $(0,-1,-1)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} < 0 \iff -d_2 - d_3 < 0$
- $(0,1,-1)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} < 0 \iff d_2 - d_3 < 0$
- $(0,0,-1)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} < 0 \iff -d_3 < 0$

} Tomando $d = (0,0,1)$ se tiene el resultado

b) Multiplicadores

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) = x_3 - \frac{1}{2} x_1^2 - \lambda_1 x_1^2 - \lambda_1 x_2 - \lambda_1 x_3 - \lambda_2 x_1^3 + \lambda_2 x_2 - \lambda_2 x_3 - \lambda_3 x_3$$

- $\mathcal{L}_{x_1} = -x_1 - 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 x_1 = 0$
- $\mathcal{L}_{x_2} = -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1$
- $\mathcal{L}_{x_3} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - 2\lambda_1 > 0$

Tomemos $\lambda = (0,0,1)$ [Alternativamente $\lambda = (1/2, 1/2, 0)$]

c) ¿Es $\bar{x} = (0,0,0)$ mínimo? R: No, $\bar{x}$ no es solución

En efecto, $\tilde{x} = (\tau, 0, 0)$, con $\tau \neq 0$

$$g_1(\tilde{x}) = -\tau^2 \leq 0 \qquad g_2(\tilde{x}) = -\tau^2 \leq 0 \quad , \quad g_3(\tilde{x}) \leq 0$$

Para $f(\bar{x}) = -1/2\, \tau^2 < 0 = f(\bar{x})$

Lunes, 8 de agosto de 2022

Sección 3.6. Condiciones de segundo orden

A continuación, estudiaremos las condiciones de segundo orden para caracterizar mínimos

Definición 3.14 Sean $x \in X$, $\lambda \in [0, +\infty[^m$, definimos el cono crítico como sigue

$$T_+(g, h, x, \lambda) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x)^T d = \begin{cases} = 0 & i \in A(x),\ \lambda_i > 0, \\ \leq 0 & i \in A(x),\ \lambda_i = 0 \end{cases} \nabla h(x)^T = 0 \right\}$$

Si la restricción es inactiva, podemos tomar cualquier dirección

Observación: El cono $T_+(g, h, x, \lambda)$ está contenido en el cono tangencial linealizado $T_\ell(g, h, x)$ y contiene a su vez el espacio tangente de restricciones activas.

$$T_a(g, h, x) = \left\{ d : \begin{array}{ll} \nabla g_i(x)^T d = 0 & i \in A(x) \\ \nabla h(x)^T d = 0 & \end{array} \right\}$$

es decir

$$T_a(g, h, x) \subseteq T_+(g, h, x, \lambda) \subseteq T_\ell(g, h, x)$$

Además, si se verifica la complementariedad estricta, entonces

$$T_a(g, h, x) = T_+(g, h, x, \lambda)$$

Teorema 3.19 - Condiciones suficientes - Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ funciones 2 veces diferenciables continuamente, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto estacionario con multiplicadores $\bar{\lambda} \in (\mathbb{R}^m)^+$ y $\mu \in \mathbb{R}^p$ ($(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ punto KKT) si se cumple que

$$d^T \mathcal{L}_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})\, d > 0, \quad \forall d \in T_+(g, h, x, \lambda) \setminus \{0\}$$

entonces $\bar{x}$ es una solución local estricta de [3.12]

Demostración (Por contradicción)

Supongamos que $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \mu)$ satisfacen las hipótesis, pero $\bar{x}$ no es solución local estricta. Entonces existe $(x_k)_k \subseteq X$ con $x_k \neq \bar{x}$ y $x_k \to \bar{x}$ tal que

$$f(x_k) \leq f(\bar{x}) \qquad [a]$$

Sea $d_k = x_k - x$ e $y_k = d_k / \|d_k\|$, notemos que $\|y_k\| = 1$. Luego, $(y_n)_k$ está acotada y tiene por tanto, una subsucesión convergente notada del mismo modo, i.e., $y_k \to y$.
Utilizando el Teorema de expansión de Taylor y [a] se sigue que

$$f(x_k) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x_k - \bar{x}) + o(\|x_k - \bar{x}\|)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \frac{f(x_k) - f(\bar{x})}{\|d_k\|} = \underbrace{\nabla f(\bar{x})^T \underbrace{\frac{(x_k - \bar{x})}{\|d_k\|}}_{= y_k}}_{\to \nabla f(\bar{x})^T y} + \underbrace{\frac{o(\|x_k - \bar{x}\|)}{\|d_k\|}}_{\to 0}$$

es decir, $\nabla f(\bar{x})^T y \leq 0$.
De igual manera, para g y h tenemos que

$$\frac{g_i(x_k) - g_i(\bar{x})}{\|d_k\|} = \nabla g_i(x)^T y_k + \frac{o(\|x_k - \bar{x}\|)}{\|d_k\|} \to \nabla g_i(\bar{x}) y \qquad [b]$$

$$\frac{h_i(x_k) - h_i(\bar{x})}{\|d_k\|} = \nabla h_i(\bar{x})^T y_k + \frac{o(\|x_k - \bar{x}\|)}{\|d_k\|} \to \nabla h_i(\bar{x})^T y$$

Si $i \in A(x)$, $g_i(\bar{x}) = 0$ y como $x_k \in X$, $g_i(x_k) = 0$, $h_i(x_k) = 0$, luego de [b] y [c]

$$\nabla g_i(\bar{x})^T y \leq 0 \,, \qquad \nabla h(\bar{x})^T y = 0$$

De las condiciones KKT se obtiene

$$0 = \nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})^T y = \underbrace{\nabla f(x)^T y}_{\leq 0} + \sum_{i \in A(\bar{x})} \underbrace{\lambda_i}_{>0} \underbrace{\nabla g_i(\bar{x})^T y}_{\leq 0} + \underbrace{\sum_{i \leq p}' \bar{\mu}_i \underbrace{\nabla h_i(\bar{x})^T y}_{=0}}_{=0} \qquad [d]$$

Para $i \in A(\bar{x})$ tal que $\lambda_i > 0$ se tiene necesariamente que

$$\nabla g_i(\bar{x})^T y = 0. \longrightarrow y \in T_+(g, h, x, \lambda)$$

Pues, de no serlo el lado derecho de la expresión [d] seria un número negativo.

Adicionalmente, tengo que

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(\bar{x}) + \underbrace{\bar{\lambda}^T g(\bar{x})}_{=0} + \underbrace{\bar{\mu}^T h(\bar{x})}_{=0}$$

$$\mathcal{L}(x_k, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(x_k) + \sum_{i \in A(x)}' \bar{\lambda}_i \underbrace{g_i(x^k)}_{\leq 0}$$

$$\leq f(x_k) \leq f(\bar{x}) = \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$$

Usando lo anterior y Taylor (de orden 2) a $\mathcal{L}$ se sigue que:

$$\mathcal{L}(x^k, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) + \underbrace{\nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})^T (x_k - \bar{x})}_{=0} + \frac{1}{2} (x_k - \bar{x})^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) (x_k - \bar{x}) + o(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

$$0 \geq \frac{\mathcal{L}(x_k, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) - \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\|d_k\|^2} = \underbrace{\frac{1}{2} y_k^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) y_k}_{\to \frac{1}{2} y^T \nabla_{xx} \mathcal{L} y} + \underbrace{\frac{o(\|d_k\|^2)}{\|d_k\|^2}}_{\to 0}$$

Luego

$$0 \geq y^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) y \qquad \text{donde } y \neq 0, \ \|y\| = 1.$$

Observación: Si la condición suficiente se cumple solo para $T_a(g, h, \bar{x})$ la optimalidad de $\bar{x}$ no se puede garantizar

Ejemplo:

$$\min_{\text{s.a.}} \ x_1^2 - x_2^2$$

$$x_1^2 - x_2 \leq 0$$

para $\bar{x} = (0, 0)$

1) Calcular $T_a(g, h, \bar{x})$

Notemos que $g_1(x) = x_1^2 - x_2$

$$\nabla g_1(x) = (2x_1, -1).$$

Por otra parte, como $g_1(x) = 0 \leq 0$

$$A(\bar{x}) = \{1\}$$

Luego

$$\nabla g_1(\bar{x})^T d = (2x_1, -1)^T \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = (0, -1) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}^T = -d_2 = 0 \implies d_2 = 0$$

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla g(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T_a(g, h, \bar{x}) = \{ d \in \mathbb{R}^2 : d = (d_1, d_2) \text{ con } d_2 = 0 \}.$$

Luego, $d = (\sigma, 0)^T \in T_a(g, h, \bar{x})$ con $\sigma \neq 0$

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) d = d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d$$

$$\mathcal{L} = f(x) + \lambda^T g(x) \qquad \nabla_x \mathcal{L} = \nabla f(x) + \lambda^T \nabla g(x) \qquad \nabla_{xx} \mathcal{L} = \nabla^2 f(\bar{x}) + \underbrace{\lambda^T \nabla^2 g(\bar{x})}_{=0}$$

$$d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d = (\sigma \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sigma^2 > 0$$

Pero $\bar{x} = (0,0)$ no es el punto óptimo puesto que $\tilde{x} = (0, z)^T$ con $z > 0$ se tiene que $\tilde{x} \in X$

$$f(\tilde{x}) = 0 - z^2 < 0 = f(\bar{x}).$$

Definición 3.15 Se dice que $(x, \lambda, \mu) \in X \times [0, +\infty[^m \times \mathbb{R}^p$ satisface la condición de calificación de segundo orden $(CQ2)$ si $\forall d \in T_+(g, h, x, \lambda)$ existe una curva C^2 sobre un intervalo abierto J, $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\gamma(0) = x, \qquad \gamma'(0) = d \qquad g_{A_0(x,d)}(\gamma(t)) = 0, \quad h(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \in J, t \geq 0$$

donde $A_0(x,d) = \{ i \in A(x) : \nabla g_i(x)^T d = 0 \}$.

Lema 3.10 Si g, h son de clase C^2 y $x \in X$ es regular (satisface LICQ) entonces satisface CQ2

Demostración

Sea $d \in T_+(g, h, x, \lambda)$, $A_0 = A_0(x, d)$, $l = |A_0| + p$ y definimos

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^l &\longrightarrow \mathbb{R}^l \\ y &\longmapsto G(y) = \begin{pmatrix} g_{A_0}(y) \\ h(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así como

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l &\longrightarrow \mathbb{R}^l \\ (t, z) &\longmapsto \Psi(t, z) = G(x + td + \nabla G(x) z), \end{aligned}$$

la función Ψ es C^2 pues g y h lo son. Notemos además que $\Psi(0,0) = G(x) = \begin{pmatrix} g_{A_0}(x) \\ h(x) \end{pmatrix}$, con $g_i(x) = 0$ para $i \in A_0$, $h(x) = 0$, de donde

$$\Psi(0,0) = (0) \in \mathbb{R}^l$$

De la regularidad de x se sigue que

$$\Psi_z(0,0) = \nabla G(x)^T \nabla G(x)$$

es invertible pues $\nabla G(x)$ tiene columnas l.i. (LICQ). Luego, por el teorema de la función implícita existe una función C^2 definida en un intervalo abierto tal que

$$z(0) = 0, \qquad \Psi(t, z(t)) = 0, \qquad t \in J$$

$$z'(t) = -\Psi_z(t, z(t))^{-1} \Psi_t(t, z(t))$$

Resultado de la aplicación del teorema de la función implícita

Por otro lado, debido a que $d \in T_+(g, h, x, \lambda)$ se tiene que

$$z'(0) = -(\nabla G(x)^T \nabla G(x))^{-1} \underbrace{\nabla G(x)^T d}_{=0} = 0$$

la curva C^2: $\gamma(t) = x + td + \nabla G(x) z(t)$ satisface las propiedades deseadas. En efecto,

$$\gamma(0) = x, \qquad \begin{pmatrix} g_{A_0}(\gamma(t)) \\ h(\gamma(t)) \end{pmatrix} = G(\gamma(t)) = \Psi(t, z(t)) = 0$$

$$\gamma'(0) = d + \underbrace{z'(0)}_{=0} \nabla G(x) = d$$

▨

Martes, 16 de agosto de 2022.

Corrección Prueba 2

Ejercicio 3.

$$\min \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\text{s.a.} \quad \prod_{j=1}^{n} x_j - 1 = 0 \qquad (\mu)$$

$$-x \leq 0 \qquad (\lambda)$$

Probaremos que $\bar{x} > 0$ o $(-\bar{x} < 0)$ verifica alguna condición de calificación, como $\bar{x} \neq 0$, $A(\bar{x}) = \emptyset$

Un vector es linealmente independiente si es no nulo

$$\nabla h(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \bar{x}_3 \cdots \bar{x}_n \\ \bar{x}_1 \bar{x}_3 \cdots \bar{x}_n \\ \vdots \\ \bar{x}_n \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

luego, satisface LICQ

Condiciones KKT

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = \sum_{j=1}^{n} x_j + \mu\left(\prod_{j=1}^{n} x_j - 1\right) + \lambda^T x$$

1) $$\nabla_x \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 + \mu(\bar{x}_2 \bar{x}_3 \cdots \bar{x}_n) + \lambda_1 \\ 1 + \mu(\bar{x}_1 \bar{x}_3 \cdots \bar{x}_n) + \lambda_2 \\ \vdots \\ 1 + \mu(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_{n-1}) + \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) $\prod_{j=1}^{n} \bar{x}_j - 1 = 0 \iff \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n = 1$ de dunde $\frac{1}{\bar{x}_i} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_{i-1} \bar{x}_{i+1} \cdots \bar{x}_n$ (*)

3) $\lambda_i \geq 0$ $\quad \underset{=0}{\lambda_i} \underset{>0}{\bar{x}_i} = 0$ con $\bar{x}_i > 0$ $\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i$ (**)

Finalmente, de (1) usando (*) y (**)

$$1 + \frac{\mu}{\bar{x}_i} = 0 \qquad \forall i = 1,\dots,n \iff \bar{x}_i = -\mu. > 0$$

Reemplazando en (2)

$$(-\mu)^n = 1 \Rightarrow -\mu = 1 \Rightarrow \mu = -1$$

Así, $\bar{x} = (1,\dots,1)$, $\bar{\lambda} = 0$, $\mu = (-1,\dots,-1)$ satisfacen las condiciones KKT

$$d^T \nabla_{xx}\mathcal{L}\, d > 0 \qquad \forall d \in T_+$$

Consideramos T_+, como $A(\bar{x}) = \emptyset$, entonces

$$0 = \nabla h(\bar{x})^T d = (1,\dots,1)\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_2 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

$$\nabla_{xx}\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & \mu(\bar{x}_3 \cdots \bar{x}_n) & \mu(\bar{x}_2 \bar{x}_4 \cdots \bar{x}_n) & \cdots & \mu(x_2 x_3 \cdots x_{n-1}) \\ \mu(\bar{x}_3 \cdots x_n) & 0 & \mu & \cdots & \mu(\bar{x}_1 \bar{x}_3 \cdots \bar{x}_{n-1}) \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^T \nabla_{xx}\mathcal{L}\, d = \begin{pmatrix} \overset{d_1}{-\sum_{i \neq 1} d_i} & \cdots & \overset{d_2}{-\sum_{i \neq 2} d_i} & \cdots & \overset{d_3}{-\sum_{i \neq n} d_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \|d\|^2 > 0 \qquad d \neq 0$$

Pregunta 4.

$$\nabla_x \mathcal{L} = \begin{pmatrix} -x_1 - 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 x_1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_1$

$1 - 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0$

$\lambda_3 = 1 - 2\lambda_1$

$g_i(\bar{x}) \leq 0$, $g_i(\bar{x})^T \lambda = 0$

$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \geq 0$ de (*)

$0 \leq \lambda_1 \leq \frac{1}{2}$ $\quad (\bar{x}, \bar{\lambda})$ Complen la condición.

c) ¿Es $\bar{x}$ un mínimo local?

$$\mathcal{L}_{xx}(x,\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} -1-2\lambda_1-2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tres casos

a) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$

$$\nabla g_i(\bar{x})^T d = 0 \qquad \begin{aligned} -d_2 - d_3 &= 0 \\ d_2 - d_3 &= 0 \\ -d_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } d_1 \in \mathbb{R}$$

$$d^T \mathcal{L}_{xx} d = \underset{\geq 0}{d_1^2}\underbrace{(-1-4\lambda_1)}_{<0}$$

No puedo concluir que $\bar{x}$ es mínimo local.

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2 > 0, \ \lambda_3 = 0$

$$\nabla_{xx} \mathcal{L} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, el cono $\overbrace{\text{crítico}}^{T_+}$ queda determinado

$$\begin{aligned} -d_2 - d_3 &= 0 \\ d_2 - d_3 &= 0 \\ -d_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_2 &= -d_3 \\ d_2 &= d_3 \end{aligned}$$

Luego $d_3 = 0$.

Así $d = (d_1, 0, 0)$ y así,

$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L} \, d = -3 d_1^2 < 0$ Tampoco se puede concluir.

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 > 1$

$$\nabla_{xx} \mathcal{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -d_2 - d_3 &= 0 \\ d_2 - d_3 &= 0 \\ - d_3 &= 0 \end{aligned}$$

$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in T_+ \quad d^T \nabla_{xx} \mathcal{L} \, d = -d_1^2 < 0$

No se puede concluir

Lunes, 22 de agosto de 2022

Teorema 3.20 - Condiciones necesarias de segundo orden-

Sean f, g, h, funciones de clase C^2 y $\bar{x}$ solución local de [3.12] que cumple GCQ. Entonces, existen multiplicadores $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ tales que se satisface

a) $\nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$
b) $h(\bar{x}) = 0$
c) $g(x) \leq 0$, $\bar{\lambda} \geq 0$, $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0$

Si además, $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ satisfacen CQ2 se sigue que

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) d \geq 0 \qquad \forall d \in T_+(g, h, \bar{x}, \bar{\lambda})$$

Demostración

Sea $\bar{x}$ una solución local que cumple (GCQ), se satisface entonces a), b) y c). Supongamos, además, que se satisface CQ2 y $d \in T_+(g, h, x, \lambda)$ arbitraria pero fija.
Sea $\gamma(t)$ una curva que satisface CQ2, para τ suficientemente pequeño, $t \in [0, \tau[$, se tiene que

$$g_{I(x)}(\gamma(t)) < 0, \qquad g_{A_0}(\gamma(t)) = 0, \qquad h(\gamma(t)) = 0$$

Luego, para $i \in A(\bar{x}) \setminus A_0$,

$$\begin{aligned} g_i(\gamma(t)) = (g_i \circ \gamma)(t) &= (g_i \circ \gamma)(0) + t \nabla(g_i \circ \gamma)(0)^T \gamma'(0) + o(t) \\ &= \underbrace{g(\overset{\bar{x}}{\gamma(0)})}_{=0} + t \nabla g(\gamma(0))^T d + o(t) \\ &= t \underbrace{\nabla g_i(\bar{x})^T d}_{<0} + o(t) \leq 0 \qquad \forall i \in A(\bar{x}) \setminus A_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\gamma([0, \tau[) \subset X$. Para $i \notin A_0$
1) $i \in I(\bar{x})$
2) $i \in A(\bar{x}) \setminus A_0$ $\quad (\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0)$

En el primer caso, necesariamente $\bar{\lambda}_i = 0$ para que se cumpla c). Para el segundo caso, gracias a que $d \in T_+$ y $\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0$, se tiene necesariamente que $\bar{\lambda}_i = 0$. De donde, $\bar{\lambda}_i = 0$, $\forall i \notin A_0$.

Gracias a a) y la definición de A_0,

$$\left.\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\right|_{t=0} = \nabla f(\bar{x})^T d = \nabla f(\bar{x})^T d + \underbrace{\bar{\lambda}_{A_0}^T \nabla g_{A_0}(\bar{x})^T d}_{=0} + \underbrace{\bar{\mu}^T \nabla h(\bar{x})^T d}_{=0}$$
$$= \nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0.$$

Se sigue entonces que $t = 0$ es la solución óptima de $f(\gamma(t))$ en $[0, \tau]$ y se tiene además que $\left.\frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t))\right|_{t=0} \geq 0$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t))^T \gamma'(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t)) = (\gamma'(t))^T \nabla^2 f(\gamma(t)) \gamma'(t) + \nabla f(\gamma(t))^T \gamma''(t)$$

y se tiene para $v = \gamma''(0)$, reemplazando $t = 0$ en lo anterior

$$d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d + \nabla f(\bar{x})^T v \geq 0 \qquad [1]$$

Por otro lado, $i \in A_0$ y $t \in [0, \tau[$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = g_i(\gamma(t)) &= g_i(\gamma(0)) + t \nabla g_i(0)^T d + \frac{t^2}{2} \gamma'(0) \nabla^2 g_i(\gamma(0)) \gamma'(0) + \frac{t^2}{2} \nabla g_i(\gamma(0)) \cdot \gamma''(0) + o(t^2) \\ &= \frac{t^2}{2}\left(d^T \nabla^2 g_i(\bar{x}) d + \nabla g_i(\bar{x})^T v \right) + o(t^2) \; \boxed{\frac{2}{t^2}} \end{aligned}$$

multiplicando lo anterior por $2/t^2$ y pasando al límite

$$d^T \nabla^2 g_i(\bar{x}) d + \nabla g_i(\bar{x})^T v = 0 \qquad \forall i \in A_0$$

Procediendo de manera similar $\forall i = 1, \dots, p$ y $t \in [0, \tau[$:

$$0 = h_i(\gamma(t)) = \frac{t^2}{2}\left(d^T \nabla^2 h_i(\bar{x}) d + \nabla h_i(\bar{x})^T v \right) + o(t^2)$$

y, nuevamente

$$d^T \nabla^2 h_i(\bar{x})d + \nabla h_i(\bar{x})^T v = 0$$

y gracias a que $\lambda_i = 0$, $i \notin A_0$ y el literal a)

$$\begin{aligned} d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) d &= d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) d + \nabla_x \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})^T v \\ &= d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d + \sum_{i\in A_0} \bar{\lambda}_i \left(d^T \nabla^2 g_i(\bar{x}) d + \nabla g_i(\bar{x})^T v \right) + \nabla f(\bar{x})^T v \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \underbrace{\left(d^T \nabla^2 h_i(\bar{x}) d + \nabla h_i(\bar{x})^T v \right)}_{=0} \\ &= d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d + \nabla f(\bar{x})^T v \geqslant 0 \quad \text{por } [1] \end{aligned}$$

Martes, 23 de agosto de 2022

Sección 3.7: Nociones de dualidad

Considere el siguiente problema

$$\left| \begin{array}{l} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{s.a.} \\ \qquad \left.\begin{array}{l} g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{array}\right\} \mathcal{X} \end{array} \right.$$

con Lagrangiano asociado

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$$

Para obtener un problema dual asociado a [3.12]

$$p(x) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^m_+, \mu\in\mathbb{R}^p} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = \begin{cases} f(x), & x\in\mathcal{X}, \\ +\infty & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

con esta nueva variable, podemos reescribir [3.12] como

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left[\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^m_+, \mu\in\mathbb{R}^p} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) \right] \qquad (\text{primal})$$

Definición El siguiente problema se denomina dual de [3.12]

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^m_+, \mu\in\mathbb{R}^p} \left[\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) \right] \qquad [3.15]$$

La función $d(\lambda,\mu) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu)$ es la función objetivo del problema dual, mientras que $p(x) = \sup\limits_{\lambda,\mu} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu)$ es la función objetivo del problema primal.

Observación: Para x fijo, la función $(\lambda,\mu) \mapsto \mathcal{L}(x,\lambda,\mu)$ es lineal, con lo cual $d(\lambda,\mu)$ es cóncava.

Teorema 3.12. - Dualidad débil -
Sea $\tilde{x}$ factible para el problema primal y $(\tilde{\lambda},\tilde{\mu})$ factible para el dual, entonces

$$p(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) \geqslant d(\tilde{\lambda},\tilde{\mu}).$$

Demostración
Como $(\tilde{\lambda},\tilde{\mu})$ es factible para el dual

$$\begin{aligned} d(\tilde{\lambda},\tilde{\mu}) &= \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x,\tilde{\lambda},\tilde{\mu}) \\ &\leqslant \mathcal{L}(\tilde{x},\tilde{\lambda},\tilde{\mu}) \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n \\ &\leqslant \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^m_+, \mu\in\mathbb{R}^p} \mathcal{L}(\tilde{x},\lambda,\mu) = f(\tilde{x}) \qquad \text{pues } \tilde{x}\in X \end{aligned}$$

Definición 3.17 El punto $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p$ se dice punto de ensilladura del Lagrangiano si

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \mu) \leq \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ y $\mu \in \mathbb{R}^p$

Teorema 3.22. Los siguientes enunciados son equivalentes

a) $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ es un punto de ensilladura de $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$

b) $\bar{x}$ es mínimo global de [3.12], $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ es óptimo global de [3.15] y $f(\bar{x}) = d(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$

Demostración

Notemos primero que para cualquier $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+, \mu \in \mathbb{R}^p} \left(\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \right) \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+, \mu \in \mathbb{R}^p} \mathcal{L}(\tilde{x}, \lambda, \mu)$$

y puesto que $\tilde{x}$ es arbitrario, la desigualdad anterior se verifica también para $\inf x$, i.e.

$$\sup_{\lambda, \mu} \left(\inf_{x} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \right) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \right) \qquad [3.16]$$

a) ⇒ b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) &\leq \inf_{x} \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) && \text{[de la definición 3.17]} \\
&\leq \sup_{\lambda, \mu} \left(\inf_{x} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \right) \\
&\leq \inf_{x} \left(\sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \right) && \text{[por [3.16]]} \\
&\leq \sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \mu) \\
&\leq \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) && \text{[Por la definición 3.17]}
\end{aligned}$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) &= \inf_{x} \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = d(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \\
&= \sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \mu) = p(\bar{x}) = f(\bar{x}) < +\infty
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\bar{x} \in X$, $p(\bar{x}) = f(\bar{x}) = d(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ y gracias a que $p(\bar{x}) = d(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ se tiene que la optimalidad de $\bar{x}$ y $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ a partir de la dualidad débil

- $p(\bar{x}) = d(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \inf_{x} \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq \sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = p(x)$,

es decir, $\bar{x}$ es el óptimo del primal.

P.D. $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ óptimo del problema dual

$$d(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \geq d(\lambda, \mu).$$

Note que

$$d(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = p(\bar{x}) = \sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \mu) \geq \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \mu) \geq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = d(\lambda, \mu).$$

b) ⇒ a)

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(\bar{x}) + \underbrace{\lambda^T g(\bar{x})}_{\leq 0} + \underbrace{\bar{\mu}^T h(\bar{x})}_{= 0} \leq f(\bar{x}) &= p(\bar{x}) \\
&= \sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \mu) \\
&= \sup_{\lambda, \mu} \left(\inf_{x} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \right) \\
&= \sup_{\lambda, \mu} d(\lambda, \mu)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d(\bar{\lambda},\bar{\mu})\\
&= \inf_{x} \mathcal{L}(x,\bar{\lambda},\bar{\mu})\\
&\leq \mathcal{L}(x,\lambda,\mu)
\end{aligned}
$$

Con lo que tenemos la parte derecha de a).
Para la parte izquierda

$$\mathcal{L}(\bar{x},\lambda,\mu) \leq \sup_{\lambda,\mu} \mathcal{L}(\bar{x},\lambda,\mu) = p(\bar{x}) = f(\bar{x}) = d(\bar{\lambda},\bar{\mu}) = \inf_{x} \mathcal{L}(x,\bar{\lambda},\bar{\mu}) \leq \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$$

Lunes, 29 de agosto de 2022.

Sección 3.8: Métodos de penalización

En este tipo de método, la solución de un problema de optimización con restricciones se busca mediante el límite de soluciones de problemas sin restricciones.

La idea básica de estos métodos consiste en transformar un problema con restricciones, en uno sin restricciones mediante el uso de un término y un parámetro de penalización.

El problema general

$$\left|\begin{array}{l} \min \ f(x) \\ \text{s.a.} \ \ x \in X \end{array}\right. \qquad [4.1]$$

se reemplaza por

$$\min_{x} \ f(x) + \alpha \Pi(x) = P_\alpha(x)$$

con $\alpha > 0$ un parámetro de penalización y la función de penalización $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

- $\Pi(x) = 0$ si y solo si $x \in X$
- $\Pi(x) > 0$ si $x \notin X$

Π penaliza el hecho de que la restricción no se verifique

Así, el método de penalización consiste en modificar la función objetivo original e incrementar su valor en aquellos puntos donde no se satisfagan las condiciones

En el caso del problema de optimización

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x} \ f(x) & \\
\text{s.a.} & \\
\quad g_i(x) \leq 0 \qquad i = 1, \dots, m & \Big| \\
\quad h_j(x) = 0 \qquad j = 1, \dots, p & \Big| \ X
\end{array}
$$

definimos la función de penalización cuadrática de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\Pi(x) &= \frac{\alpha}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} (\text{máx}\{0, g_i(x)\})^2 + \sum_{j=1}^{p} (h_i(x))^2 \right)\\
&= \frac{\alpha}{2}\left(\| g(x)_+ \|^2 + \| h(x) \|^2 \right)
\end{aligned}
$$

donde $(v_+)_i = \text{máx}(0, v_i)$. Así, obtenemos el funcional de costo penalizado P_α definido de la siguiente manera

$$P_\alpha(x) = f(x) + \frac{\alpha}{2}\left(\| g(x)_+ \|^2 + \| h(x) \|^2 \right) \quad \Big\} \text{ La función } P_\alpha \text{ es continuamente diferenciable}$$

$$\nabla P_\alpha(x) = \nabla f(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} (g_i(x))_+ \nabla g_i(x) + \alpha \sum_{j=1}^{p} h_i(x)$$

Además, $\forall x \in X : P_\alpha(x) = f(x)$, por lo tanto $\nabla P_\alpha(x) = \nabla f(x)$. Sin embargo, el óptimo del problema penalizado

$$\min_{X} \ P_\alpha(x)$$

no es necesariamente factible para el problema original.

Ejemplo: $(P) \left\{ \begin{array}{ll} \min & x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 \\ \text{s.a.} & -x_2 \leq 0 \end{array} \right.$

1) Encontrar analíticamente la solución $\bar{x}$ de (P) y el valor del multiplicador asociado.

Consideremos el hagrangiano del problema

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \lambda g(x) = x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 + \lambda(-x_2)$$

luego

$$\nabla \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = (2x_1,\ 4+2x_2-\lambda) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 4+2x_2-\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad y \quad 4+2x_2-\lambda = 0$$

$$\lambda = 4+2x_2$$

$$4x_2 + 2x_2^2 - \lambda x_2 = 0 \Rightarrow 2x_2(2+x_2) = 0$$

$$\hookrightarrow x_2 = 0$$
$$x_2 = +2$$

Luego $\bar{x} = (0,0)$ y $\lambda = 4$ forman un punto KKT del problema

2) Calcular para $\alpha > 0$, el mínimo $x(\alpha)$ de P_α

$$P_\alpha(x) = x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 + \frac{\alpha}{2}\, \text{máx}(0,-x_2)^2$$

$$\nabla P_\alpha(x) = \nabla f(x) + \alpha\, \text{máx}(0,-x_2)\, \nabla g(x)$$

$$\nabla P_\alpha(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4+2x_2-\alpha\, \text{máx}(0,-x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 0.$$

- Si $\text{máx}(0,-x_2) = 0$, $-x_2 \leq 0$ y así $x_2 \geq 0$

$$4+2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \Rightarrow \Leftarrow$$

- Si $\text{máx}(0,-x_2) = -x_2$, $-x_2 \geq 0$ y así $x_2 \leq 0$

$$4+2x_2-\alpha(-x_2) = 4+2x_2+\alpha x_2 = 0$$
$$\Rightarrow x_2(2+\alpha) = -4$$
$$\Rightarrow x_2 = \frac{-4}{2+\alpha}$$

luego

$$x(\alpha) = \left(0,\ \frac{-4}{2+\alpha}\right)$$

- ¿Es $x(\alpha)$ factible para (P)?

$$-x(\alpha)_2 = \frac{4}{\alpha+2} \geq 0 \quad \text{no es factible}$$

- Muestre que $\bar{x}$ es el límite cuando $\alpha \to +\infty$ de $x(\alpha)$, $\bar{\lambda} = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \alpha\, \text{máx}(0, g(x(\alpha)))$

$$g(x(\alpha)) = \frac{4}{2+\alpha} \Rightarrow \bar{\lambda} = \lim_{\alpha\to+\infty} \alpha\, g(x(\alpha)) \overset{\lim_{\alpha\to\infty}}{=} \frac{4\alpha}{2+\alpha} = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{4}{1+2/\alpha} = 4.$$

El algoritmo de penalización está determinado de la siguiente manera.

Algoritmo 4.1.

```
1) Iniciamos con $\alpha_k > 0$   $(k=0)$
2) Repetir
    2.1) Resolver $\min_x P_{\alpha_k}(x)$ y obtener $x_k$ mínimo
    2.2) Actualizar $\alpha_{k+1} > \alpha_k$,   $k = k+1$
3) Hasta $x_k \in X$
```

¿Fin?, Sí, Fin :3