16/11/2020

Monday, November 16, 2020 7:04 AM

- → Tutorias con Miguel Aguilar → 0984096792
  miguel.aguilar@epn.edu.ec
- → Ejercicios los días viernes
- → Coordinar el horario para las tutorias

Contenido del curso

1.- Teoría de la medida
   - → "Conjuntos y funciones"
   - → Álgebras (en lugar de vectores, posee conjuntos) conjunto de conjuntos
   - → funciones aditivas

     0 ⊢—⊣ 1 ← intervalo
     asignamos un valor numérico

medida
- d_1: longitud $= 1-0 = 1$
- d_2: cantidad de elementos $= \infty$
- d_3: punto medio $= 1/2$

Ejemplo 2: 0 ⊢————⊣ 10

$d_1 = 10$
$d_2 = \infty$
$d_3 = 5$

Ejemplo 3: Conjunto de puntos

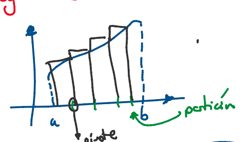
1 2 3 4 5   2 4 6 8 10 12 14

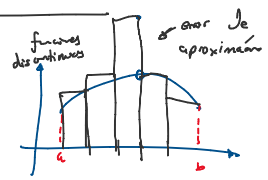
$d_1 = 0$ $d_1 = 0$
$d_2 = 5$ $d_2 = 7$

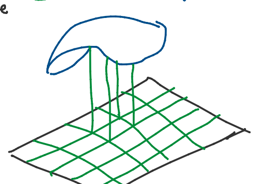
Funciones aditivas: permiten dar valores a los conjuntos
sigma álgebra conjunto de conjuntos
medida: función
clase monótona: conjunto de conjuntos (propiedades más débiles)

Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto
$$\mathcal{P}(X) = \{A \,/\, A \subset X\}$$
- $B \subset \mathcal{P}(X)$
  $B = \{A_1^{\subset X}, A_2^{\subset X}, A_3^{\subset X}, A_4^{\subset X}\}$
- $C \in \mathcal{P}(X)$
  $\Rightarrow C$ es un conjunto
- $D \subset B$
  $D = \{A_1, A_2\}$ conjunto de conjuntos
- $E \in C$ es un elemento

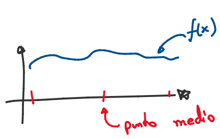
Integral de Riemman







Definamos el dominio $X = M_{2\times 2}$
$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto f(A) = |A|$$
$$= Tr(A)$$



¿se puede integrar?

Teorema $X = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

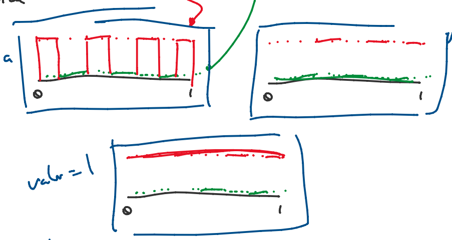
$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

gráfica

valor a

valor = 0

valor = 1



2. Teoría de la integración

2.1 funciones medibles

2.2 Integral de "Lesbegue"

2.3 Teoremas de integración

Convergencia uniforme

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad f_n(x) \longrightarrow f(x)$

- convergencia puntual
- convergencia uniforme

$f_n \longrightarrow f$

$(\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0)$

¡Revisar!

1) $\boxed{\text{si } f_n \text{ es continua } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \text{ es continua}}$

2) $f_n \longrightarrow f$ $\boxed{\text{uniforme}}$ $\Rightarrow \int_X f_n \longrightarrow \int_X f$

Cap 3. Espacios de Lebesgue

→ L^∞ (funciones acotadas)

→ L^p (funciones elevadas a la p son integrables)

$f \in L^p$ (Es un espacio de Banach)

$$\int_a^b |f|^p < +\infty$$

18/11/2020

Wednesday, November 18, 2020 7:07 AM

Sea $f: X \longrightarrow Y$, entoces definamos

1) Imagen: Sea $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces Subconjunto

$$\underbrace{f(A)}_{\text{solo notación}} = \{y \in Y : y = f(x), x \in A\} \subset Y$$

2) Imagen recíproca: Sea $B \in \mathcal{P}(Y)$, entonces

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subset X$$

Ejercicios:

1) Si $A \subset B$ y $A, B \in \mathcal{P}(X)$, probemos que

$$\underbrace{f(A) \subset f(B)}_{\text{nombres de conjuntos}}$$

Demostración.

Sea $y \in f(A)$, cualquiera, vamos a probar que $y \in f(B)$.

Notemos que, como $y \in f(A)$, entonces existe un $x \in A$ tal que

$$y = f(x),$$

pero, como $A \subset B$ entonces $x \in B$. De donde, como existe $y \in Y$, tal que

$$f(x) = y \quad y \quad x \in B;$$

concluimos que

$$y \in f(B).$$

Finalmente, como y es arbitrario, entonces hemos probado que $f(A) \subset f(B)$.

2) Si $A \subset X$, probar que $f(A^c) = (f(A))^c$

Contraejemplo

$X = \{1, 2, 3\}$ $\quad A = \{1, 2\}$ $\quad f: X \longrightarrow X$

$f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$

$f(A^c) = \{2\}$, $f(A) = \{1\} \subset X$

$(f(A))^c = \{2, 3\}$

- $f(A^c) \subset (f(A))^c$.

Sea $y \in f(A^c)$ cualquiera; por definición, sabemos que existe un $x \in A^c$, tal que

$$f(y) = x,$$

lo que equivalentemente significa que

$$f(y) = x \quad y \quad x \notin A;$$

así,

$$y \in \{y \in Y : f(x) = y, x \notin A\}.$$

finalmente, como el y es arbitrario, se sigue que

$$f(A^c) = (f(A))^c.$$

• $(f(A))^c \subset f(A^c)$

Sea $y \in (f(A))^c$, cualquiera; notemos que existe $x \in A$, tal que
$$f(x) = y$$

---

3. Sean $A, B \subset X$, probemos que
$$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$$

Demostración

• $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$

Sea $y \in f(A) \cap f(B)$, cualquiera; notemos que
$$y \in f(A) \quad y \quad y \in f(B).$$
Así, existen $x_1 \in A$ y $x_2 \in B$ tales que
$$f(x_1) = y \quad y \quad f(x_2) = y,$$
de donde, como f es inyectiva, se sigue que
$$x_1 = x_2,$$
de donde, tomando $x = x_1 = x_2$, entonces
$$y = f(x) \quad \text{con} \quad x \in A \cap B,$$
es decir
$$y \in f(A \cap B).$$
Finalmente, como y es arbitrario, hemos probado que
$$f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$$

• $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Sea $y \in f(A \cap B)$, cualquiera. Notemos que existe $x \in A \cap B$ tal que
$$y = f(x).$$
De donde, tenemos que existe $x \in A$ tal que
$$y = f(x)$$
y, $x \in B$ tal que
$$y = f(x).$$
Por lo tanto, se sigue que
$$y \in f(A) \cap f(B)$$

4) Si $A, B \subset X$, pruebe que
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$
De ser el caso, ¿Qué hipótesis se necesita cumplir?

• $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

Sea $y \in f(A \cup B)$, cualquiera. Notemos que existe $x \in A \cup B$ tal que
$$y = f(x).$$
Supongamos que $x \in A$, notemos que
$$y \in f(A).$$
Análogamente, si $x \in B$, entonces
$$y \in f(B).$$
Así, se concluye que
$$y \in f(A) \cup f(B).$$

• $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$.

Supongamos que $y \in f(A) \cup f(B)$, cualquiera.

• $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$.

Supongamos que $y \in f(A) \cup f(B)$, cualquiera.

Supongamos que $y \in f(A)$, entonces

$$f(A) \subseteq f(A \cup B).$$ caso 1

Análogamente

$$f(B) \subseteq f(A \cup B).$$

Así, como y es arbitrario, se concluye que

$$f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B).$$

• $H_1 \cup H_2 \Rightarrow T \Leftrightarrow (H_1 \Rightarrow T) \wedge (H_2 \Rightarrow T)$

• $H_1 \cap H_2 \Rightarrow T$

• $H \Rightarrow T_1 \cup T_2 \Leftrightarrow (H \Rightarrow T_1) \vee (H \Rightarrow T_2)$

• $H \Rightarrow T_1 \cap T_2$

Definición

Sea $X \neq \emptyset$ y $\{A_i\}_{i \in I}$ donde $A_i \subset X$ para todo $i \in I$.

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \in X : x \in A_j$ para algún $j \in I \}$
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \in X : x \in A_i$ para todo $i \in I \}$

$\{A_i\}_{i \in \{1,2,3\}} = \{A_1, A_2, A_3\}$

$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{A_1, A_2, \dots\}$

$\{A_i\}_{i \in [0,1]} = \{A_0, \dots\}$

Ejercicio

1) Sea $X, Y \neq \emptyset$, $f: X \to Y$.

■ Sea $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de Y

• $f^{-1}\left(\bigcup A_i\right) = \bigcup f(A_i)$

• $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

■ Si $A, B \subset Y$ tal que $A \subset B$, entonces $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Sea $x \in f^{-1}(A)$, notemos que

$$f(x) \in A,$$

de donde, como $A \subseteq B$; entonces

$$f(x) \in B$$

y, por lo tanto, como x es arbitrario

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).$$

20/11/2020

Sunday, November 22, 2020 7:55 PM

Propiedades

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de Y, probemos que

- $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

- $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, se sigue que

$$f(x) \in \bigcup_{i\in I} A_i$$

por lo tanto, existe un $j \in I$ tal que

$$f(x) \in A_j$$

de donde, se sigue que

$$x \in f^{-1}(A_j) \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i).$$

$\Leftarrow$) Sea $x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$, por lo tanto, existe un $j \in I$ tal que

$$x \in f^{-1}(A_j)$$

por lo tanto,

$$f(x) \in A_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

de donde

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right).$$

$\square$

2) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, entonces

$$f(x) \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow f(x) \in A_i \quad \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A_i) \quad \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

$\square$

3) Si $A \subset Y$, entonces

$$f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$$

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $x \in f^{-1}(A^c)$ ...

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $x \in f^{-1}(A^c)$, entonces

$$f(x) \in A^c;$$

de donde, se sigue que:

$$f(x) \notin A \Rightarrow x \notin f^{-1}(A)$$

$$\Rightarrow x \in \left(f^{-1}(A)\right)^c.$$

$\Leftarrow$) Sea $x \in \left(f^{-1}(A)\right)^c \Rightarrow x \notin f^{-1}(A)$

$$\Rightarrow f(x) \notin A$$

$$\Rightarrow f(x) \in A^c$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(A^c)$$

$\blacksquare$

Definición

Sea $X \neq \emptyset$ y $A \subset X$. Definimos la función indicatriz como

$$\mathbb{I}_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$
$$x \longmapsto \mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Proposición

Sea $X \neq \emptyset$, $A, B \subset X$

- $\mathbb{I}_{A \cap B} = \mathbb{I}_A(x) \cdot \mathbb{I}_B(x)$
- $\mathbb{I}_{A \cup B} = \mathbb{I}_A(x) + \mathbb{I}_B(x) - \mathbb{I}_{A \cap B}$
- $\mathbb{I}_{\emptyset}(x) = 0$
- $\mathbb{I}_X(x) = 1$
- $\mathbb{I}_{A^c}(x) = 1 - \mathbb{I}_A(x)$.

Demostración

23/11/2020

Monday, November 23, 2020 7:13 AM

Ejemplos

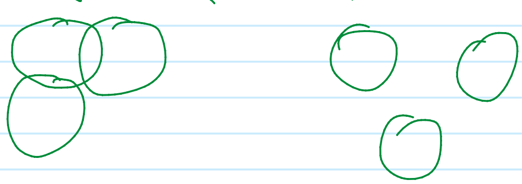
1) $\mathcal{P}(X)$ es el álgebra más grande sobre X.

2) $\{\emptyset, X\}$ es el álgebra más pequeña sobre el conjunto X.

3) Sea $X \neq \emptyset$, diremos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición de X si verifica

- $X = \bigcup_{i\in I} A_i$
- $A_i \neq \emptyset \qquad \forall i \in I$
- $\{A_i\}_{i\in I}$ es disjunta dos a dos.

Disjuntos $\Leftarrow$ Disjunto 2 a 2



entonces

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A = \bigcup_{i\in J} A_i \text{ con } J \subset I\}$$

es un álgebra sobre X.

Demostración:

- P.D.

$$\emptyset, X \in \mathcal{A}.$$

Notemos que

$$\emptyset \subset I,$$

entonces

$$\emptyset \in \mathcal{A}.$$

Análogamente, se sigue que

$$I \subset I,$$

por lo tanto, por definición de partición

$$X \in \mathcal{A}.$$

- P.D.

$$\text{Si } A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}.$$

Notemos que

$$A \in \mathcal{A};$$

por lo tanto existe $J \subset I$, tal que

$$A = \bigcup_{i\in J} A_i,$$

de donde,

de donde,

$$A^c = \bigcup_{i \in I \setminus J} A_i \quad \text{con } I \setminus J \subset I$$

$$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}.$$

- Sea $A, B \in \mathcal{A}$.

P.D.

$$A \cup B \in \mathcal{A}$$

Notemos que

$$A \cup B = \left\{ A \subset X : \bigcup_{i \in J} A_i \cup \bigcup_{j \in K} A_j \quad \text{con } J, K \subset I \right\}$$

$$\Rightarrow A \cup B = \left\{ A \subset X : \bigcup_{i \in J \cup K} A_i \quad \text{con } J \cup K \subset I \right\}.$$

Por lo tanto

$$A \cup B \in \mathcal{A}$$

4) Sea $X = \mathbb{R}$ y definimos

$$\mathcal{A} := \{ A \subset X : A \text{ es la unión finita de intervalos } \underbrace{}_{\text{disjuntos}} (a,b) \}$$

donde

$$(a,b) = [a,b] = [a,b[=]a,b]$$

Demostración

- P.D.

$$\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}.$$

Notemos que

$$\emptyset =]a,a[$$

y además

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$$

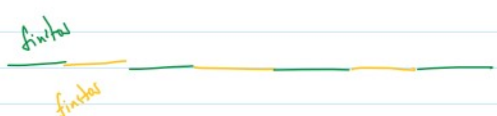
- Sea $A \in \mathcal{A}$, notemos que

A es la unión finita de intervalos.

- Sean $A, B \in \mathcal{A}$, notemos que

$$A \cup B = \text{la unión de (la unión de intervalos cualquiera } (a,b))$$
$$= \text{la unión de intervalos cualquiera } (a,b)$$

$$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$$



25/11/2020

Wednesday, November 25, 2020 7:06 AM

Def Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{A}$ un álgebra sobre X. Una función aditiva sobre $\mathcal{A}$ es una aplicación

$$m : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} := [0, +\infty]$$

que verifica:

1) $m(\emptyset) = 0$

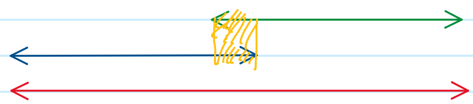
2) Para todo $A, B \in \mathcal{A}$ $\quad A \cap B = \emptyset$,

además

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

$$\lambda([a,b]) = b - a$$

$$\lambda(]-\infty, +\infty[) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$



Ej.- Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ definido anteriormente, consideremos $I \in \mathcal{A}$ tal que

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(a_i, b_i)}_{\text{disjuntos}}$$

Definimos

$$\ell : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$$
$$I \longmapsto \ell(I) \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Probemos que ℓ es una función aditiva.

1) Sea $I = \emptyset =]a, a[$, tenemos que.

$$\ell(I) = \ell(\emptyset) = \ell(]a, a[) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0.$$

Por lo tanto,

$$\ell(\emptyset) = 0.$$

2) Sean $A = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i)$ y $B = \bigcup_{j \in J} (c_j, d_j)$, con $A \cap B = \emptyset$

$$A \cup B = \bigcup_{i \in I \cup J = K}]a_i, b_i[$$

$$\ell(A \cup B) = \sum_{K} (a_k, b_k) = \sum_{I} (a_i, b_i) + \sum_{J} (c_j, b_j)$$

$$= \ell(A) + \ell(B)$$

Sea

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \quad \text{y} \quad J = \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j) \quad \text{con} \quad I \cap J = \emptyset. \text{ Así,}$$

$$I \cup J = \bigcup_{k=1}^{n+m} (p_k, q_k)$$

donde

$$(p_k, q_k) = \begin{cases} (a_k, b_k) & \text{si } k \in \{1, \dots, n\} \\ (c_{k-n}, d_{k-n}) & \text{si } k \in \{n+1, n+2, \dots, n+m\} \end{cases}$$

Por tanto

$$\ell(I \cup J) = \sum_{k=1}^{n+m} (q_k - p_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (q_k - p_k) + \sum_{k=n+1}^{m+n} (q_k - p_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) + \sum_{k=n+1}^{n+m} (d_{k-n} - c_{k-n}) \Big\} \; j = k - n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) = \sum_{j=1}^{m} (d_j - c_j)$$

$$= \ell(I) + \ell(J)$$

Proposición

Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre X y

$$m : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$$

una función aditiva, entonces:

1) Si $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \subset B$, entonces

$$m(A) \leq m(B)$$

2) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos 2 a 2, entonces

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

3) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

Demostración

1) Sea $A, B \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset B$; así

$$B = A \cup B \setminus A$$

de donde

$$m(B) = m(A \cup B \setminus A)$$

$$= m(A) + \boxed{m(B \setminus A)} \quad \text{pues } m(B \setminus A) \geq 0$$

Así,

$$m(B) \geq m(A)$$

c) Por inducción. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \in A$ disjuntos dos a dos; para $n=2$, sabemos que

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$$

Supongamos que se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$. Vamos a probar que se cumple para $n+1 \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) \\ &= m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + m(A_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(A_i) + m(A_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} m(A_i) \end{aligned}$$

Así, por inducción, se sigue que

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

26/11/2020

Friday, November 27, 2020 7:06 AM

Nombre: Daniel Lara.

Teoría de la Medida

Semestre 2020B

Trabajo en Clase 1

1. Sea $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de álgebras sobre X. Demuestre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ es un álgebra sobre X.

Demostración

Sea

$$Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

vamos a probar que Z es un álgebra.

1) Notemos que A_n es un álgebra para cada $n\in\mathbb{N}$, por lo tanto

$$\emptyset \in A_n \quad y \quad X \in A_n \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

de donde

$$\emptyset \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

y además

$$X \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

2) Sea $B\in Z$, vamos a probar que $B^c \in Z$.

Notemos, como $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces existe $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$B\in A_m,$$

de donde

$$B^c \in A_m,$$

pues A_m es un álgebra y como

$$B^c \in A_m \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

se sigue que

$$B^c \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

3) Sea $B, C\in Z$, vamos a probar que

$$A\cup B \in Z.$$

Así, como $B, C\in Z$, existen $p, q\in\mathbb{N}$ tales que

$$B\in A_p \quad y \quad C\in A_q,$$

tomando $m = \text{máx}\{p,q\}$ y dado que la sucesión es creciente, se sigue que

$$B \cup C \in \mathcal{A}_m,$$

y como

$$\mathcal{A}_m \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n,$$

entonces se concluye que

$$B \cup C \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n.$$

Así, por (1), (2) y (3); se sigue que

$$Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$$

es un álgebra sobre X.

2. Sea $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{R}_+$ una aplicación que satisface las siguientes propiedades:

   (I) $m(\varnothing) = 0$;

   (II) Para todo $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tales que $A \subseteq B$, se tiene que $m(A) \leq m(B)$;

   (III) Para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ se tiene la estimación:

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

Se define la familia,

$$\mathcal{M} = \{E \subset \mathbb{R} \mid m(A) = m(A\cap E) + m(A \cap E^c), \forall A \subseteq \mathbb{R}\}.$$

(a) Muestre que para todo $A, B, C \subset \mathbb{R}$

Demostración

P.D.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
(A\cap B) \cup (A \cap C \cap B^c) &\Leftrightarrow A \cap (B \cup (C \cap B^c)) \\
&\Leftrightarrow A \cap ((B \cup C) \cap (B \cup B^c)) \\
&\Leftrightarrow A \cap ((B \cup C) \cap \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow A \cap (B \cup C)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c)$$

$\square$

(b) Muestre que para probar que $E \in \mathcal{M}$, basta probar que

$$m(A) \geq m(A\cap E) + m(A\cap E^c), \forall A \subseteq \mathbb{R}.$$

Demostración

P.D.

$$m(A) \leq m(A \cap E) + m(A \cap E^c) \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

Notemos que, para todo $A \subseteq \mathbb{R}$.

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c),$$

de donde, por (III), se sigue que

$$m(A) = m((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) \leq m(A \cap E) + m(A \cap E^c)$$

por lo tanto

$$m(A) \leq m(A \cap E) + m(A \cap E^c)$$

(c) Muestre que $\mathcal{M}$ es un álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Demostración

1) Sea $A \subset \mathbb{R}$, cualquiera; notemos que, por el literal anterior, basta probar que

$$m(A) \geq m(A \cap E) + (A \cap E^c) \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

con $\emptyset = E$. Así, como

$$\emptyset \cap A = \emptyset \qquad A \cap \mathbb{R} = A$$

de donde

$$m(\emptyset) + m(A) = m(A)$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} m(A) &\geq m(A \cap E) + m(A \cap E^c) \\ &= m(\emptyset) + m(A) \\ &= m(A). \end{aligned}$$

Así, $\emptyset \in \mathcal{M}$. Análogamente, tomando $E = \mathbb{R}$, se tiene que, para todo $A \subseteq \mathbb{R}$

$$A \cap \mathbb{R} = A \quad \text{y} \quad A \cap (\mathbb{R})^c = A \cap \emptyset = \emptyset,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} m(A \cap \mathbb{R}) + m(A \cap (\mathbb{R})^c) &= m(A) + m(\emptyset) \\ &= m(A) \end{aligned}$$

De donde

$$m(A) \geq m(A \cap \mathbb{R}) + m(A \cap \mathbb{R}^c).$$

Por lo tanto

$$\mathbb{R} \in \mathcal{M}.$$

2) Sea $D \in \mathcal{M}$, cualquiera.

P.D. $\qquad D^c \in \mathcal{M}$.

Notemos que, para todo $A \subseteq \mathbb{R}$

$$m(A) \geq m(A \cap D) + m(A \cap D^c), \qquad (2.1)$$

de donde, para D^c, se sigue que

$$m(A \cap D^c) + m(A \cap D) = m(A \cap D) + m(A \cap D^c)$$

de donde; por (2.1); se concluye que

$$m(A) \geq m(A \cap D^c) + m(A \cap D)$$

lo que implica que

$$D^c \in \mathcal{M}.$$

$$m(A) \geq m(A \cap D^c) + m(A \cap D)$$

lo que implica que

$$D^c \in \mathcal{M}.$$

3) Sea $B, C \in \mathcal{M}$; vamos a probar que

$$m(A) \geq m(A \cap (B \cup C)) + m(A \cap (B \cup C)^c) \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}.$$

Notemos que, como $B, C \in \mathcal{M}$; se sigue que

$$m(A) \geq m(A \cap B) + m(A \cap B^c) \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

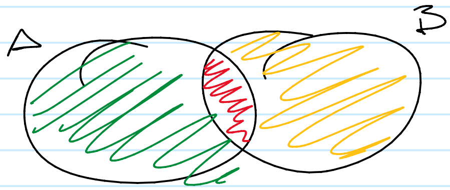
y

$$m(A) \geq m(A \cap C) + m(A \cap C^c) \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

30/11/2020

Monday, November 30, 2020 7:07 AM

Continuación de la clase 25/11/2020



$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$
$$= A \cup (B \cap A^c)$$
$$= (A \cup B) \cap (A \cup A^c)$$
$$= A \cup B$$

P.D.

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

Demostración

Sean $A, B \in \mathcal{A}$, un álgebra sobre X; tenemos que

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$

Así, se sigue que

$$m(A \cup B) = m(A) + \underbrace{m(B \setminus A) + m(A \cap B)} - m(A \cap B)$$
$$= m(A) + m((B \setminus A) + (A \cap B)) - m(A \cap B)$$
$$= m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Así, hemos probado que

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Teorema

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una familia finita de conjuntos numerables, entonces

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

es numerable.

Demostración

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, como A_i es numerable para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces existe

$$\varphi: A \longrightarrow \mathbb{N}$$

Así, definimos

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n))$$

vamos a probar que φ es inyectiva; Sean $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ tales que

$$(x_1, \ldots, x_n) \neq (y_1, \ldots, y_n)$$

vamos a probar que

$$\varphi((x_1, \ldots, x_n)) \neq \varphi(y_1, \ldots, y_n).$$

Notemos que

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$$

$$\varphi((x_1,\dots,x_n)) \neq \varphi(y_1,\dots,y_n).$$

Notemos que

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = (\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n))$$
$$\neq (\varphi(y_1),\dots,\varphi(y_n)),$$

pues φ_i es inyectiva para cada $i\in\mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) \neq \varphi(y_1,\dots,y_n)$$

y la función φ es inyectiva.

Ejercicio

Probar que existe una cantidad infinita de números primos.

Demostración.

Por reducción al absurdo, supongamos que la cantidad de números primos es finita; así,

$p_1,\dots,p_n$ son números primos con p_n el primo más grande. $n\in\mathbb{N}$ Con esto, definamos

$$N = p_1\cdots p_n + 1$$

Notemos que N es un número primo y más aún es mayor que p_n. Pero esto contradice nuestra suposición de que p_n es el primo más grande. Así, hemos probado que el conjunto de números primos es infinito.

Tomemos p el n-ésimo número primo y definimos

$$\bar{\varphi} : \overbrace{\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}^{n\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(m_1,\dots,m_n) \longmapsto \bar{\varphi}(m_1,\dots,m_n) = 2^{m_1}\cdot 3^{m_2}\cdots p^{m_n}$$

Así, $\bar{\varphi}$ es inyectiva, en efecto. Sea $(z_1,\dots,z_n)$ $(m_1,\dots,m_n)$ elementos de $\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}$ tal que

$$\varphi(z_1,\dots,z_n) = \varphi(m_1,\dots,m_2)$$

de donde

$$2^{z_1} 3^{z_2}\cdots p^{z_n} = 2^{m_1} 3^{m_2}\cdots p^{m_n}$$

Simplificando

$$\Rightarrow \quad 2^{z_1-m_1}\, 3^{z_2-m_2}\cdots p^{z_n-m_n} = 1$$

$$\Rightarrow \quad z_i = m_i \qquad \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

$$\Rightarrow \quad (z_1,\dots,z_n) = (m_1,\dots,m_n)$$

Finalmente, definimos

$$\psi : A_1\times\cdots A_n \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto \psi(x_1,\dots,x_n) = (\bar{\varphi}\circ\varphi)(x_1,\dots,x_n)$$

Así, hemos probado que

$$A_1\times\cdots\times A_n \quad \text{es numerable}$$

02/12/2020

Wednesday, December 2, 2020 7:10 AM

Teorema.
Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos numerables, entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

es numerable.

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos numerable, cualquiera. Notemos que, por lo anterior, existe una función inyectiva

$$\varphi_n : A_n \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Por otra parte, tenemos que

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{n\}$$

donde $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es numerable y se tiene que

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{n\}\right) \cap \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{m\}\right) = \emptyset \qquad \text{para } n\neq m.$$

Así, definamos

$$\begin{aligned} \psi : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n &\longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{n\} \\ A_n &\longmapsto \psi(A_n) = (\varphi_n(A_n), n). \end{aligned}$$

vamos a probar que ψ es inyectiva. Sean $B_n, C_m \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, con

$$B_n \neq C_m \qquad \text{con } n, m\in\mathbb{N}.$$

Notemos que

$$\psi(B_n) = (\varphi_n(B_n), n) \quad \text{y} \quad \psi(\varphi_m(C_m), m)$$

de donde, como φ_n es inyectiva para cada $n\in\mathbb{N}$, se sigue que

$$\psi(B_n) \neq \psi(C_m)$$

y por lo tanto ψ es inyectiva y, más aún,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

es numerable.

Notemos que

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \mathbb{N}\times\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{n\}$$

Consideremos

$$\varphi : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{n\}$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = \overline{\varphi_m}(x)$$

donde m es el índice más pequeño, tal que $x \in A_m$

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow x \in A_5 \quad y \quad x \in A_{20}$$

$$\varphi(x) = \overline{\varphi_5}(x) \qquad \text{escogemos el índice más pequeño.}$$
$$= \overline{\varphi_{20}}(x)$$

Probemos que φ es inyectiva.

Sean $x, y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, tal que $x \neq y$.

Notemos que
$$\varphi(x) = \overline{\varphi_n}(x) = (A_n, n)$$
análogamente
$$\varphi(y) = \overline{\varphi_m}(y) = (A_m, m)$$
con $n \neq m$; así
$$\varphi(x) = \varphi(y)$$

$$\varphi(x) = \varphi(y)$$

así

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad y \qquad y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_r$$

$\exists m$ más pequeño tal que $x \in A_n$ $\qquad \exists j$ ———— A_j

$$\Rightarrow \overline{\varphi_m}(x) = \overline{\varphi_j}(y)$$
$$\Rightarrow (\varphi_m(x), m) = (\varphi_j(y), j)$$
$$\Rightarrow \varphi_m(x) = \varphi_m(y) \wedge m = j$$
$$\Rightarrow \varphi_m(x) = \varphi_m(y)$$
$$\Rightarrow x = y$$

Así, hemos probado que φ es inyectiva.

Definición

Sea $X \neq \emptyset$, diremos que $A \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra (o tribu) sobre X si verifica

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia en $\mathcal{A}$, entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

Llamaremos espacio medido a $(X, \mathcal{A})$ y a los elementos de $\mathcal{A}$ los llamaremos, conjuntos medibles.

Nota:

1) Toda σ-álgebra es un álgebra.

2) Si un álgebra tiene una cantidad finita de elementos entonces es una σ-álgebra

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre X; notemos que trivialmente satisface las primeras dos propiedades de una σ-álgebra. Para la tercera propiedad, sea

$$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$$

una familia numerable de conjuntos en $\mathcal{A}$; pero, como $\mathcal{A}$ es finito, tenemos que para algún $m \in \mathbb{N}$

$$B_n = (A_1, \dots, A_m, \emptyset, \emptyset, \dots).$$

De donde, tenemos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

caso muy particular

así, como $\mathcal{A}$ es un álgebra

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$$

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre X; notemos que trivialmente satisface las primeras dos propiedades de una σ-álgebra. Para la tercera propiedad, sea

$$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$$

una familia numerable de conjuntos en $\mathcal{A}$. Además, notemos que

$$B_n \in \mathcal{A} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, como $\mathcal{A}$ es finito, por definición de álgebra, tenemos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$$

y esto implica que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra finita.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra finita.

P.D $\mathcal{A}$ es σ-álgebra

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
- estable por complementos
- Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$

Como $\mathcal{A}$ es finito, podemos escoger los elementos de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que no se repiten, es decir

$$A_{j_1}, \dots, A_{j_m}.$$

Así,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{j\in\{1,\dots,m\}} A_j \in \mathcal{A}$$

04/12/2020

Friday, December 4, 2020 7:08 AM

Nombre: Daniel Lara

Teoría de la Medida

Semestre 2020B

Trabajo en Clase 2

1. Sea X un conjunto infinito. Se dice que A es un conjunto cofinito si su complemento es un conjunto finito. Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los subconjuntos finitos y cofinitos de X.

    1. Demuestre que $\mathscr{A}$ es un álgebra sobre X.
    2. Demuestre que $\mathscr{A}$ es una $\sigma-$álgebra sobre X si y solo si X es finito.

Parte 1. Demostración.

Vamos a probar que $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre X.

a) Notemos que

$$\emptyset \in \mathcal{A}$$

pues es el conjunto que posee cero elementos.
Por otra parte, dado que $X^c = \emptyset$, por el apartado anterior, se sigue que

$$X \in \mathcal{A}$$

b) Sea $A \in \mathcal{A}$, cualquiera; notemos que
A es finito o A es cofinito
Supongamos que A es finito, entonces A^c es cofinito y por tanto

$$A^c \in \mathcal{A}.$$

Por otra parte, supongamos que A es cofinito, por lo tanto A^c es finito y

$$A^c \in \mathcal{A}.$$

c) Sean $A, B \in \mathcal{A}$, cualesquiera; si A y B son finitos

$$A \cup B \in \mathcal{A}$$

pues es la unión finita de conjuntos finitos

- Si al menos un conjunto es cofinito, digamos A

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset A^c$$

por lo tanto, como A es finito; $A \cup B$ es cofinito.

Así, hemos probado que $\mathcal{A}$ es un álgebra.

Parte 2.

$\Leftarrow$ Supongamos que X es finito, notemos que eso implica que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ el cual es un álgebra y más aún una sigma álgebra.

a) Sabemos que, trivialmente

$$\emptyset \in \mathcal{A}.$$

Además, se sigue que, como X es finito,

$$X \in \mathcal{A}.$$

b) Sea $A \in \mathcal{A}$, cualquiera. Notemos que A es finito o A es cofinito.

- Si A es finito, entonces A^c es cofinito y $A^c \in \mathcal{A}$
- Si A es cofinito, entonces A^c es finito y $A^c \in X$.

c) Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de X; sabemos que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable; de donde, se concluye que

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}.$$

Así, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

$\Rightarrow$ Supongamos que $\mathcal{A}$ es una sigma álgebra; vamos a probar que X es un conjunto finito.

Por reducción al absurdo, supongamos que X es infinito. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ donde todos sus elementos son diferentes no nulos tal que

$$X \setminus \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}, \qquad (1)$$

es infinito. Así, tomemos

$$A_i := a_i \qquad \forall i \in \mathbb{N}$$

entonces, notemos que $\{A_i\}_{i \in I} \in \mathcal{A}$. Pero, notemos que

$$\bigcup_{i \in I} A_i \notin \mathcal{A}$$

pues es la unión numerable de conjuntos finitos, lo que implica que no es finito; adicionalmente, no es cofinito por (1).

Pero esto es absurdo pues supusimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra; así, esto no es posible y X es infinito.

09/12/2020

Wednesday, December 9, 2020 7:25 AM

Lema: Sea $(X,\mathcal{A})$ un espacio medido y $Y\subset X$, entonces

$$\mathcal{A}/_Y = \underbrace{\mathcal{A}\cap Y}_{\text{notación}} := \{ B = A\cap Y \mid A\in\mathcal{A} \}$$

es una sigma álgebra sobre Y.

- $X=\mathbb{R}$, $A =]0,1[$ abierto
- $Y=[0,+\infty[$, $A =]0,1[$ abierto

$$B=[0,1[$$

Demostración

Vamos a probar que $\mathcal{A}/_Y$ es una sigma álgebra sobre Y.

1). Notemos que, trivialmente

$$\emptyset \in \mathcal{A}/_Y$$

Adicionalmente, como $Y\subset X$ y $X\in\mathcal{A}$, entonces

$$Y = Y\cap X \in \mathcal{A}/_Y$$

2) Sea $C\in\mathcal{A}|_Y$, cualquiera, notemos que existe $A\in\mathcal{A}$ tal que

$$C = A\cap Y,$$

de donde

$$C^c = Y\setminus A = Y\cap A^c$$

además como $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra $A^c\in\mathcal{A}$ y por lo tanto

$$C^c \in \mathcal{A}|_Y$$

3) Sea $\{D_i\}_{i\in I}$ una familia de $\mathcal{A}|_Y$, notemos que

$$\bigcup_{i\in I} D_i = \bigcup_{i\in I} A_i\cap Y = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap Y$$

y, nuevamente como $\mathcal{A}$ es una sigma álgebra

$$\bigcup_{i\in I} D_i \in \mathcal{A}|_Y$$

Análogamente, notemos que

$$\bigcap_{i\in I} D_i = \bigcap_{i\in I} A_i\cap Y = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cap Y \in \mathcal{A}|_Y$$

Lema:

Sea $X\neq\emptyset$ y $\mathcal{A}$ un álgebra sobre X, entonces $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si se verifica una de las dos condiciones siguientes:

1) $\mathcal{A}$ es estable por unión de sucesiones crecientes de conjuntos

2) $\mathcal{A}$ es estable por intersección de sucesiones decrecientes de conjuntos

Demostración

Supongamos que se verifica la propiedad 1, vamos a probar que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra

Notemos que como $\mathcal{A}$ es un álgebra, las propiedades 1 y 2 de σ-álgebra se satisfacen. Así, sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos de $\mathcal{A}$, definamos

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{j} A_i \qquad \text{para cada } j\in\mathbb{N}$$

Notemos que $(B_j)_{0\leq j\leq n}$ es creciente para $n\in\mathbb{N}$, pues

$$B_j \subseteq B_{j+1}$$

esto pues; sea $x\in B_j$, notemos que

$$x\in \bigcup_{i=1}^{j} A_i,$$

pero

$$B_{j+1} = \bigcup_{i=1}^{j} A_i \cup A_{j+1} \Rightarrow x \in \left(\left(\bigcup_{i=1}^{j} A_i\right) \cup A_{j+1}\right) = B_{j+1}.$$

Por otra parte, $(B_j)_{0\leq j\leq n} \in \mathcal{A}$. Ahora, por hipótesis, tenemos que.

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_i \in \mathcal{A}$$

PD. $2 \Rightarrow 1)$

Supongamos que $\mathcal{A}$ es estable por intersección de sucesiones decrecientes de conjuntos

P.D. $\mathcal{A}$ es estable por unión de sucesiones crecientes de conjuntos.

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$, una familia de conjuntos de $\mathcal{A}$ cualquiera; sabemos que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

De donde, como $\mathcal{A}$ es un álgebra que verifica las propiedades 1 y 2 se sigue que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A}$$

Además, notemos que

$$A_{i+1} \subset A_i \qquad \forall i\in\mathbb{N},$$

de donde

$$(A_{i+1})^c \supset A_i^c$$

entonces, por la parte 1 del lema; hemos probado que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra

25/01/2021

Monday, January 25, 2021 7:10 AM

La intersección no vacía de clases monótonas es una clase monótona.

Definición

Sea $X \neq \emptyset$ y $K \subset \mathcal{P}(X)$. La clase monótona generada por K es la intersección de todas las clases monótonas que contienen a K y lo notaremos por $\mathcal{M}(K)$.

Proposición

Sea $X \neq \emptyset$, $K \subset \mathcal{P}(X)$. Si N es una clase monótona tal que $K \subset N$

$$K \subset \mathcal{M}(K) \subset N$$

Teorema.

Sea $X \neq \emptyset$ y $K \subset \mathcal{P}(X)$ un π-sistema entonces

$$\underbrace{\sigma(K)}_{\text{Sigma álgebra más pequeña}} = \mathcal{M}(K)$$

29/01/2021

Friday, January 29, 2021 7:17 AM

Def. Sea $(X, \mathcal{A})$ y (Y, β) dos espacios medibles, diremos que $f: X \longrightarrow Y$

$$f^{-1}(\beta) \subset \mathcal{A}$$

Def.

Si X, Y son e.t dotados de σ-álgebras Borelianas, las funciones $(Bor(X), Bor(Y))$ - medibles se denominan funciones borelianas.

Prop.

Sean $(X, \mathcal{A})$ y (Y, β) dos espacios medibles y $K \subset \mathcal{P}(Y)$ tal que $\beta = \sigma(K)$, entonces $f: X \longrightarrow Y$ es $(\mathcal{A}, \beta)$ - medible si y solo si para cada $c \in K$, se tiene que $f^{-1}(c) \subset \mathcal{A}$

Demostración

$\Rightarrow$ $K \subset \sigma(K) = \beta$

$\Leftarrow$ Tenemos que

$$f^{-1}(K) \subset \mathcal{A}$$

donde

$$f^{-1}(K) := \{ c \in K : f^{-1}(c) \subset \mathcal{A} \}$$

Así, notemos que

$$\sigma(f^{-1}(K)) = f^{-1}(\sigma(K)) = f^{-1}(\beta) \subset \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}.$$

$$f^{-1}(\beta) = f^{-1}(\sigma(K)) = \sigma(f^{-1}(K))$$

pero

$$f^{-1}(K) \subset \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(K) \subset \sigma(f^{-1}(K)) \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\beta) \subset \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\beta) \subset \mathcal{A}.$$

Cor.

Sea X, Y espacios topológicos, si $f: X \to Y$ es continua, entonces es Boreliana.

Sea $\mathcal{A}$ una sigma álgebra sobre X y $\mathcal{B}$ una σ-álgebra sobre Y borelianas, con $\mathcal{Y}$ el conjunto de los abiertos de Y, entonces

$$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B},$$

y

$$f(\mathcal{Y}) \subseteq X \in \mathcal{A}$$

$(Bor(X), Bor(Y))$-medible.

Puesto que $Bor(Y) = \sigma(\tau_y)$, demos probar que

$$f^{-1}(\tau_y) \subseteq Bor(X)$$

y como $Bor(X) = \sigma(\tau_x)$

$$f^{-1}(\tau_y) \subseteq f^{-1}(\tau_x)$$

En efecto, si $B \in \tau_y$, entonces $f^{-1}(B) \in \tau_x \subseteq \sigma(\tau_x)$

$$\boxed{f^{-1}(\tau_y) \subseteq \sigma(\tau_x)}$$

Prop.

Sea $(X, \mathcal{A}), (Y, \beta), (Z, \mathcal{C})$ espacios medibles,

$$f: X \to Y, \quad g: Y \to Z$$

funciones $(\mathcal{A}, \beta)$-medibles y $(\beta, \mathcal{C})$-medibles respectivamente, entonces

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

es $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-medible

Demostración. Consideremos

$$g \circ f : X \longrightarrow Z.$$

Sea $A \in \mathcal{C}$, notemos que

$$(g \circ f) = (g(f)) \Rightarrow (g \circ f)^{-1} \Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1})$$

Así, como g es continua

$$g^{-1}(A) \in \beta \quad y$$

como f es continua

$$f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{A}.$$

Como A es arbitrario, hemos probado que

$(g \circ f)$ es $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-medible

Prop.

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, la función $f : X \to \mathbb{R}$ es $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}))$-medible ssi para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Demostración

Definamos

$$\mathcal{K} := \{\,]\alpha, +\infty[\; : \forall \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$\boxed{Bor(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{K})}$$

para las desigualdades restantes
$[\alpha, +\infty[$ $\quad$ $]-\infty, \alpha]$
$]-\infty, \alpha[$

Así

Así

$f: X \to \mathbb{R}$ es $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}))$ medible $\iff f^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{A}$.

$$\iff f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\iff \{x \in X : f(x) \in]\alpha, +\infty[\} \subseteq \mathcal{A} \quad \forall \alpha$$

$$\iff \{x \in X : f(x) > \alpha\} \subseteq \mathcal{A} \quad \forall \alpha$$

11/12/2021

Friday, December 11, 2020 7:10 AM

Proposición

Sean $X, Y \neq \emptyset$ y $f: X \to Y$, Si β es una σ-álgebra sobre Y, entonces

$$\mathcal{A} := \{ A = f^{-1}(B), B \in \beta \} = f^{-1}(B)$$

es una σ-álgebra sobre X.

Demostración

Notemos que,

$$\emptyset \in \mathcal{A}.$$

pues

$$\emptyset_X = f^{-1}(\emptyset_Y) \qquad \text{con } \emptyset_Y \in \beta$$

Además,

$$X = \emptyset_X{}^c = (f^{-1}(\emptyset_Y))^c = f^{-1}(\emptyset_Y) = f^{-1}(Y)$$

de donde

$$X \in \mathcal{A}.$$

P.D.

$$X = f^{-1}(Y).$$

$\Rightarrow$ $X \subseteq f^{-1}(Y)$.

Sea $x \in X$; cualquiera

$$f(x) \in f(X) \subset Y$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \in Y$$

$$\Rightarrow \quad x \in f^{-1}(Y)$$

$\Leftarrow$ $f^{-1}(Y) \subseteq X$.

Sea $x \in f^{-1}(Y)$, cualquiera; notemos que por definición, se tiene que

$$f^{-1}(Y) \subseteq X,$$

pues $f: X \to Y$.

Sea $A \in \mathcal{A}$

P.D.

$$A^c \in \mathcal{A}$$

Así, existe $B \in \beta$ tal que

$$A = f^{-1}(B)$$

$$\Rightarrow \quad A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$$

pero como $B^c \in \beta$ pues β es una σ-álgebra. Y, por lo tanto

$$A^c \in \mathcal{A}.$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, entonces existe $B_n \in \beta$ tal que

$$A_n = f^{-1}(B_n)$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$$

$$= f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

Así, como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$, se sigue que.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

14/12/2021

Monday, December 14, 2020 7:27 AM

Proposición

Sean $X, Y \neq \emptyset$, $f: X \longrightarrow Y$ y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre X, entonces

$$\mathcal{B} = \{ B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

es una σ-álgebra sobre Y.

Demostración

1) Notemos que

- $\emptyset_Y \in \mathcal{B}$ pues $f^{-1}(\emptyset_Y) = \emptyset_X \in \mathcal{A}$
- $Y \in \mathcal{B}$ pues $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$

2) Sea $B \in \mathcal{B}$.

P.D

$$B^c \in \mathcal{B}$$

Así,

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow B^c \in \mathcal{B}.$$

3) Sea $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}$

P.P.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$$

Así,

$$f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}.$$

Proposición

Toda σ-álgebra infinita $\mathcal{A}$ definida sobre un conjunto infinito X es no numerable

Proposición

Sea $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ una familia de σ-álgebras definidas sobre X, entonces

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{A}_i, \text{ para todo } i \in I\}$$

es una σ-álgebra.

Demostración

1) Notemos que, como $\mathcal{A}_i$ es un álgebra para todo $i \in I$; entonces

$$\emptyset \in \mathcal{A}_i \quad y \quad X \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I.$$

Así, se concluye que

$$\emptyset \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \quad y \quad X \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i.$$

2) Sea $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$

P.D.

$$A^c \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i.$$

Notemos que por definición

$$A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \Rightarrow A \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I$$

$$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I$$

$$\Rightarrow A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i.$$

3) Sea $(A_j)_{j\in J} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$,

P.D.

$$\bigcup_{j\in J} A_i \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i.$$

Notemos que

$$A_j \in \mathcal{A}_i \quad \text{para cada } i \in I \text{ y para cada } j \in J.$$

Así, tenemos que

$$\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{A}_i \quad \text{para cada } i \in I$$

y más aún

$$\bigcup_{j\in J} A_j \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i.$$

Así, hemos probado que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ es una σ-álgebra.

01/02/2021

Monday, February 1, 2021 7:05 AM

Prop. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una función $f: X \to \mathbb{R}^n$ es $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}^n))$-medible si y sólo si cada una de sus componentes es $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}))$-medible

Demostración:

$\Rightarrow$ Supongamos que $f: X \to \mathbb{R}^n$ es $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}^n))$-medible, vamos a probar que cada componente es $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}))$-medible.

Consideremos el operador

$$P_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^j$$
$$x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \longmapsto x_j$$

con $j \in \{1, \dots, n\}$.

Como f es $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}^n))$-medible, tenemos que para todo $C \in Bor(\mathbb{R}^n)$

$$f^{-1}(C) \in \mathcal{A}.$$

Además, como P_j es $(Bor(\mathbb{R}), Bor(\mathbb{R}^n))$-medible, definimos

$$P_j \circ f = f_j \qquad \text{para cada } j \in \{1, \dots, n\}$$

Sea $I \in Bor(\mathbb{R})$, tenemos que

$$(P_j \circ f)^{-1}(I) = f^{-1} \circ P_j^{-1}(I)$$

$$= f^{-1}(I^*) \qquad I^* = P_j^{-1}(I) \in Bor(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(I^*) \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow (P_j \circ f)^{-1}(I) \in \mathcal{A}.$$

Consideremos la proyección i-ésima

$$\Pi_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \Pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

$\Leftarrow$ Consideremos el conjunto

$$\mathcal{K} = \left\{ \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[: a_i \leq b_i \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n) = \sigma(K)$$

Para probar que f es medible, consideremos $I \in K$ y verifiquemos

$$f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$$

Así,

$$f^{-1}(I) = \{x \in X : f(x) \in I\}$$

$$= \{x \in X : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\}$$

$$= \{x \in X : f_1(x) \in]a_1, b_1[\} \cap \cdots \cap \{x \in X : f_n(x) \in]a_n, b_n[\}$$

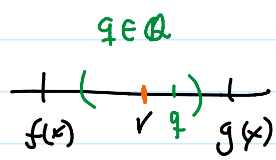
$$= \underbrace{\{x \in X : f_1(x) > a_1\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{x \in X : f_1(x) < b_1\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \cdots$$

$$\cap \underbrace{\{x \in X : f_n(x) > a_n\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{x \in X : f_n(x) < b_n\}}_{\in \mathcal{A}}$$

Prop. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $A \in \mathcal{A}$. Si $f, g : A \to \mathbb{R}$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$-medible, entonces

$$\{x \in A : f(x) < g(x)\}, \ \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}, \ \{x \in A : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{A}$$

Demostración



$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$$

$$]f(x), g(x)[\qquad f(x) < q \quad \text{y} \quad q < g(x)$$

Notamos que la desigualdad $f(x) < g(x)$ implica que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$f(x) < r < g(x);$$

y por lo tanto

$$\{x \in A : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : r < g(x)\} \right)$$

como $\mathbb{Q}$ es numerable, la unión es numerable y como

$$= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \left\{ \{x\in X : f(x) < r\} \cap \mathcal{A} \right\} \cap \left\{ \{x\in X : f(x) > r\} \cap \mathcal{A} \right\}$$

$\{x\in X : f(x) < r\} \in \mathcal{A}$ y $\{x\in X \; r < g(x)\} \in \mathcal{A}$;

entonces

$$\{x\in X : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}.$$

Para $f(x) > g(x)$, análogamente

$$\{x\in A : f(x) > g(x)\} \in \mathcal{A}$$

pero $\mathcal{A}$ es estable por complementos, así:

$$\{x\in A : f(x) > g(x)\}^c = \{x\in A : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{A}$$

03/02/2021

Wednesday, February 3, 2021 7:11 AM

Proposición

Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, $f, g : X \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}))$-medible

1) $f \pm g$, $f \cdot g$, $1/f$ con $f \neq 0$ son medibles

2) $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ son medibles $\quad h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

3) Para todo $p > 0$, $|f|^p$ es medible

Demostración

Consideremos

$$\varphi : X \to \mathbb{R}^2 \qquad y \qquad \mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f(x), g(x)) \qquad\qquad (x, y) \mapsto x + y$$

Sabemos que f y g son medibles, por lo tanto φ y medible; además dado que μ es continua, entonces es medible y dado que la composición de funciones medibles es medible se sigue que

$$f(x) + g(x) = \mu(\varphi(x))$$

es medible.

2).

P.D $\max\{f, g\}$ es medible

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera

P.D. $\{x \in X : \max\{f(x), g(x)\} > \alpha\} \in \mathcal{A}$

Sabemos que

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad y \quad \{x \in X : g(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

$\Rightarrow \{x \in X : \max\{f(x), g(x)\} \ldots f(x) \ldots g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x \in X : \max\{f(x), g(x)\}\}$ $\quad f(x) > g(x) \Rightarrow$

$g(x) > f(x) \Rightarrow$

Cor.

El espacio de las funciones medibles es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

Demostración

- 0 es medible
- $f+g$ medible
- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y f medible

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda \neq 0$

P.D. $\{x \in X : (\lambda f(x)) > \alpha\}$

$= \{x \in X : f(x) \geq \alpha/\lambda \ \cup\ f(x) \leq \alpha/\lambda\} \in \mathcal{A}$

pero $\alpha/\lambda \in \mathbb{R}$

Corolario.

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ medible, entonces

$$f^+ = \max(f, 0) \quad \text{y} \quad f^- = \max(-f, 0)$$

Nota.

- $f^+, f^{-1} \geq 0$
- $|f| = f^+ + f^-$
- $f = f^+ - f^{-1}$

Teorema.

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $(f)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles de $X \to \mathbb{R}$, entonces

1) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es medible

2) $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ es medible

3) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ es medible

Demostración.

Notemos que

$$\{x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : \sup f_n(x) > \alpha\}$$

así, puesto que para cada $n\in\mathbb{N}$

$$\{x \in X : f_n(x) > \alpha\} \in \mathcal{A},$$

entonces se tiene que

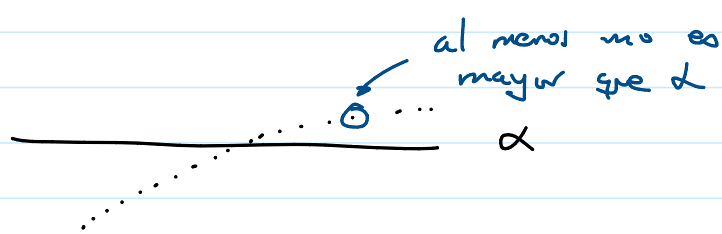
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : \sup f_n(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

lo que implica que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$$

es medible

Dem (clase)



Sea $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} > \alpha\}$$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f(x) > \alpha\}}_{\in \mathcal{A}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\in \mathcal{A}}$$

para el ínfimo usamos la intersección

---

medibles

- $\lim\sup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x)$

→ límite existe cuando

$$\lim\inf = \lim\sup$$

por el literal anterior son funciones medibles

Trabajo en clase 3

Friday, February 5, 2021 8:34 AM

Nombre Daniel Lara

Teoría de la Medida

Semestre 2020B

Trabajo en Clase 3

1. Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $A \subseteq X$. Pruebe que $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ es $(\mathscr{A}, Bor(\mathbb{R}))$–medible si y solo si A es $\mathscr{A}$–medible.

Demostración

$\Rightarrow$) Puesto que

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned} \qquad (1)$$

y dado que es $(X, Bor(\mathbb{R}))$-medible, entonces, para $B \in Bor(\mathbb{R})$

$$\mathbb{1}^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

de donde, para $\{1\} \in Bor(\mathbb{B})$

$$A = \mathbb{1}^{-1}(\{B\}) \in \mathcal{A}.$$

Así, A es $\mathcal{A}$-medible.

$\Leftarrow$) Supongamos que A es $\mathcal{A}$-medible, vamos a probar que $\mathbb{1}_A$ es $(X, Bor(\mathbb{R}))$- medible, es decir

$$\{x \in X : \mathbb{1}(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Así, consideremos los siguientes casos

• Si $\alpha \geq 1$, entonces

$$\{x \in X : \mathbb{1}_A(x) > \alpha\} = \{x \in X : \mathbb{1}_A(x) > 1\} = \emptyset \qquad (2)$$

$$\{x \in X : \mathbb{1}_A(x) > \alpha\} = \{x \in X : \mathbb{1}_A(x) > 1\} = \emptyset \qquad (2)$$

por (1).

- Si $1 > \alpha \geq 0$, entonces

$$\{x \in X : \mathbb{1}_A(x) > \alpha\} = A \qquad (3)$$

por (1).

- Si $\alpha < 0$, entonces

$$\{x \in X : \mathbb{1}_A(x) \geq 0\} = X \qquad (4)$$

por (1)

Así, por (2), (3) y (4) y puesto que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre X, se sigue que

$$X, A, \emptyset \in \mathcal{A},$$

y por lo tanto

$$\{x \in X : \mathbb{1}_A(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Así, como hemos probado las dos implicaciones, obtenemos la equivalencia $\square$

2. Sea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -e^{-\frac{x^2}{2}} < \alpha \right\}$

   (a) Muestre que si $-1 < \alpha < 0$, entonces $A = \left]-\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}, \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}\right[$.

   (b) Utilice el resultado anterior para probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$ es $(Bor(\mathbb{R}), Bor(\mathbb{R}))-$medible.

Parte a)

Supongamos que $-1 < \alpha < 0$; así,

$$-e^{-\frac{x^2}{2}} < \alpha < 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{x^2}{2}} > -\alpha > 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x^2}{2} > \ln(-\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} < \ln(-\alpha^{-1})$$

$$\Rightarrow \quad x^2 < \ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad |x| < \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \left]-\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}, \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}\right[.$$

Así, hemos probado la parte a).

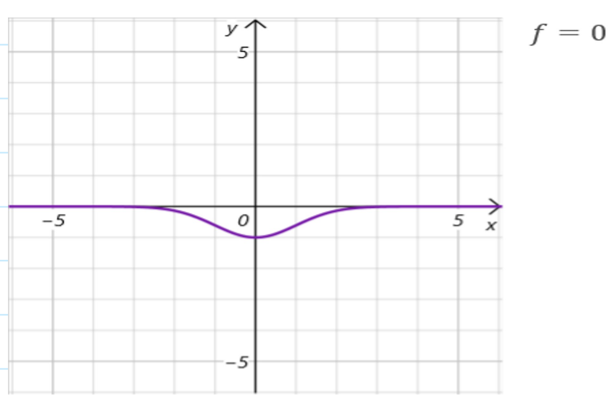
Parte b)

Consideremos la función

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) - e^{-\frac{x^2}{2}},$$

notemos que

$$\operatorname{Im}(f) = [-1, 0[, \qquad (5)$$



Así, vamos a probar que

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in Bor(\mathbb{R}).$$

Así, notemos que

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in Bor(\mathbb{R}).$$

Así, notemos que

$$\{x\in X : f(x) < \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \geq 0 \\ \left]-\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}, \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}\right[& \text{si } -1 \leq \alpha < 0 \\ \varnothing & \text{si } \alpha < -1 \end{cases}$$

por (5), de esta manera se sigue que, por definición $Bor(\mathbb{R})$ tenemos que

- $\varnothing =]a,a[\in Bor(\mathbb{R}) \quad a \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \in Bor(\mathbb{R})$
- $\varnothing \in Bor(\mathbb{R})$

Por lo tanto, se sigue que

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in Bor(\mathbb{R}).$$

Así, f es $(Bor(\mathbb{R}), Bor(\mathbb{R}))$ - medible. $\square$

10/03/2021

Wednesday, February 10, 2021 7:13 AM

Toda función medible es continua.

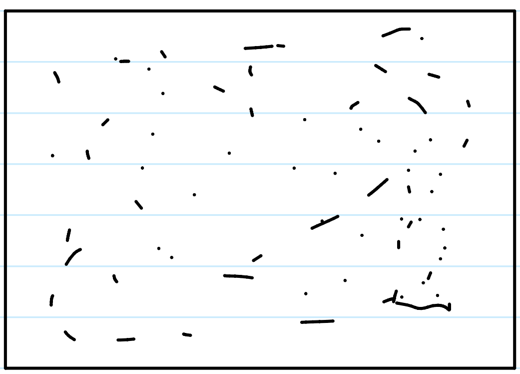
Def: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, diremos que una propiedad $p(x)$ con $x \in X$ es válida μ-ctp (μ-casi todo punto) si

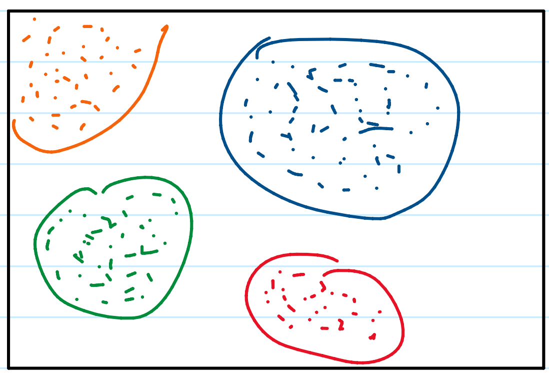
$$\mu\left(\{x \in X : p(x) \text{ no se verifica}\}\right) = 0$$

Def: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y $f, g : X \to \mathbb{R}$, diremos que f y g son iguales μ-ctp ($f = g$ μ-ctp) si

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0$$

Prop. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y $f, g : X \to \mathbb{R}$, la relación $f = g$ μ-ctp, notado por $f R g$ es una relación de equivalencia





$$\mathbb{P}(x) = \{ \{\ \}, \{\ \}, \{\ \}, \{\ \} \}$$

$$[f] \in \mathbb{P}(x)$$

o

y se verifican las siguientes propiedades

1) Si $f R g \Rightarrow \alpha f R \alpha g \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2) Si $f R g$ y $\varphi R \psi \Rightarrow (f + \varphi) R (g + \psi)$

Probemos que es una relación de equivalencia

Sean $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, puesto que

$$\mu(\{x\in X : f(x)\neq f(x)\}) = \mu(\emptyset) = 0$$
entonces $f\mathcal{R}f$.

- Por otra parte, tenemos que

$$f\mathcal{R}g \Rightarrow \mu(\{x\in X : f(x)\neq g(x)\}) = \mu(\{x\in X : g(x)\neq f(x)\}) = 0 \Rightarrow g\mathcal{R}f.$$

- Finalmente, como

$$f\mathcal{R}g \Rightarrow \mu(\{x\in X : f(x)\neq g(x)\}) = 0$$

y

$$g\mathcal{R}h \Rightarrow \mu(\{x\in X : g(x)\neq h(x)\}) = 0$$

entonces, puesto que

$$\{x\in X : f(x)\neq h(x)\} \subseteq \{x\in X : f(x)\neq g(x)\}\cup\{x\in X : g(x)\neq h(x)\}$$

se sigue que

$$\mu(\{x\in X : f(x)\neq h(x)\}) = 0$$

$$\Rightarrow f\mathcal{R}h$$

Para las propiedades, es claro que para $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\text{si } f\mathcal{R}g \Rightarrow \mu(\{x\in X : f(x)\neq g(x)\}) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(\{x\in X : \alpha f(x)\neq \alpha g(x)\}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha f\mathcal{R}\alpha g.$$

por otra parte si $\alpha = 0$, entonces

$$\{x\in X : 0f(x)\neq 0g(x)\} = \emptyset$$

y por lo tanto

$$\mu(\{x\in X : 0f(x)\neq 0g(x)\}) = 0.$$

2. Sean $f\mathcal{R}g$ y $\varphi\mathcal{R}\psi$, notemos que

$$\{x\in X : f(x)+\varphi(x)\neq g(x)+\psi(x)\} \subset \{x\in X : f(x)\neq g(x)\}\cup\{x\in X : \varphi(x)\neq\psi(x)\}$$

$$\{x\in X: f(x)+\varphi(x)\neq g(x)+\psi(x)\}\subset\{x\in X: f(x)\neq g(x)\}\cup\{x\in X: \varphi(x)\neq\psi(x)\}$$

por lo tanto
$$\mu(\{x\in X: f(x)+\varphi(x)\neq g(x)+\psi(x)\})=0$$
$$\Rightarrow (f(x)+\varphi(x))\,\mathcal{R}\,(g(x)+\psi(x))$$

Prop. Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio medido y $f,g: X\to\mathbb{R}$, si $f=g$ μ-ctp μ es completa y f es medible, entonces g es medible.

Def. Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio medido, diremos que μ es completa si verifica lo siguiente

Si $A\in\mathcal{A}$ tal que $\mu(A)=0$, entonces para todo $D\subset A$, se tiene que $D\in\mathcal{A}$.

Demostración.

Supongamos que μ es completa y f es medible.

Sea $t\in\mathbb{R}$, cualquiera y $A\subseteq\mathcal{A}$ tal que $\mu(A)=0$, tal que
$$\{x\in X: f(x)=g(x)\}\subseteq A^c$$

Trabajo en clase 4

Friday, February 12, 2021 7:18 AM

Nombre: Daniel Lara

3. Sea X un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial. Si $(X, \mathscr{A})$ es un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función $(\mathscr{A}, Bor(\mathbb{R}))$-medible y lineal demuestre que, para todo $y \in X$ y para todo $r \in \mathbb{R}$, la función $g : X \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(rx + y)$ es $(\mathscr{A}, Bor(\mathbb{R}))$-medible.

Puesto que f es lineal, se tiene que

$$g(x) = f(rx+y) = rf(x) + f(y)$$

puesto que f es $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}))$ medible, se sigue que considerando la función constante y continua

$$r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto r(x) = r$$

de donde r es $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}))$ medible y por lo tanto

$$rf(x) + f(y)$$

es una función $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}))$ - medible. Así, como

$$g(x) = f(rx+y) = rf(x) + f(y);$$

entonces g es una función $(\mathcal{A}, Bor(\mathbb{R}))$- medible

Forma 2

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$,

P.D. $\{x \in X : g(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$.

- Si $r = 0$

$$\{x \in X : g(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(y) > \alpha\}$$

$$= \begin{cases} X & \text{si } f(y) > \alpha \\ \varnothing & \text{si } f(y) \leq \alpha \end{cases}$$

en ambos casos se tiene que por definición de σ-álgebra

$$X, \emptyset \in \mathcal{A}$$

y por lo tanto

$$\{x \in X : g(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

- Si $r > 0$

$$\begin{aligned} & g(x) > \alpha \\ \iff \quad & f(rx+y) > \alpha \\ \iff \quad & r f(x) + f(y) > \alpha \\ \iff \quad & f(x) > \frac{\alpha - f(y)}{r} \end{aligned}$$

es decir

$$\{x \in X : g(x) > \alpha\} = \left\{x \in X : f(x) > \frac{\alpha - f(y)}{r}\right\}$$

puesto que

$$a = \frac{\alpha - f(y)}{r} \in \mathbb{R},$$

se tiene que

$$\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}.$$

- Análogamente, si $r < 0$, entonces

$$\{x \in X : g(x) > \alpha\} = \left\{x \in X : f(x) < \frac{\alpha - f(y)}{r}\right\} \in \mathcal{A}.$$

Así, hemos probado que $g(x) = f(rx+y)$ es $(\mathcal{A}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$-medible.

Trabajo en clase 4

Trabajo en Clase 4

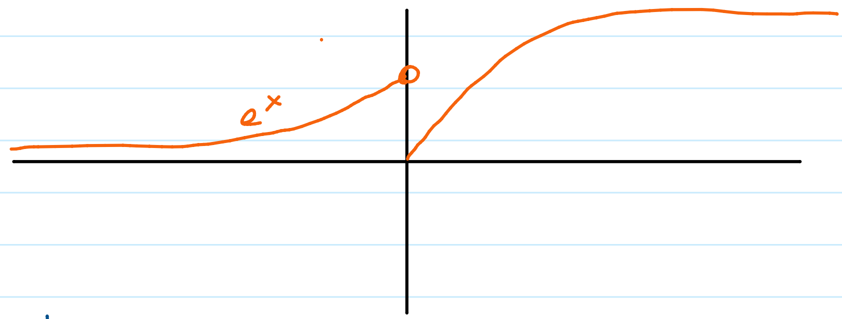
1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0, \\ \arctan(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Muestre que f es una función medible.

P.D.

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$$



Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, cualquiera.
Notemos que, $Im(f) =]0, \pi/2[$ y además

- si $\alpha \geq \pi/2$

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \pi/2\} = \emptyset \in Bor(\mathbb{R})$$

- si $\alpha < 0$

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = \mathbb{R} \in Bor(\mathbb{R})$$

- si $0 \leq \alpha \leq \pi/2$

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = \{x \leq 0 : f(x) > \alpha\} \cup \{x > 0 : f(x) > \alpha\}$$

$$= \{x \leq 0 : e^x > \alpha\} \cup \{x > 0 : \arctan(x) > \alpha\}$$

$$= \{x \leq 0 : x > \log(x)\} \cup \{x > 0 : x > \tan(\alpha)\}$$

$$= (]-\infty, 0] \cap]\ln(\alpha), +\infty[) \cup \{]0, +\infty[\cap]\tan(\alpha), +\infty[\}$$

$$= (]-\infty, 0] \cap]\ln(\alpha), +\infty[) \cup \{]\tan(\alpha), +\infty[\}$$

puesto que cada intervalo está en $Bor(\mathbb{R})$, se sigue que

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in Bor(\mathbb{R}).$$

y puesto que $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces f es $(Bor(\mathbb{R}), Bor(\mathbb{R}))$-medibles.

2. Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de X en $\mathbb{R}$, todas ellas $\mathscr{A}-$medibles. Demuestre que los siguientes conjuntos son $\mathscr{A}-$medibles:

$$A = \{x \in X \,|\, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada inferiormente}\},$$

$$B = \{x \in X \,|\, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada superiormente}\}.$$

Forma 2

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada inferiormente, es decir existe $c\in\mathbb{R}$ tal que

$$x_n > c \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Como $c\in\mathbb{R}$, entonces $-c\in\mathbb{R}$ y por lo tanto, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$m > -c \Rightarrow c > -m$$

por lo tanto, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$x_n > c > -m \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Así, se sigue que

$$A = \{x\in X : \exists m_x\in\mathbb{N} \ \forall n\in\mathbb{N},\ f_n(x) > -m_x\}$$

$$= \bigcup_{m_x\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x\in X : f_n(x) > -m_x\}.$$

donde como f_n es medible para cada $n\in\mathbb{N}$. entonces

$$\{x\in X : f_n(x) > -m_x\}\in\mathscr{A} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

y por lo tanto

$$A = \{x\in X : \exists m_x\in\mathbb{N} \ \forall n\in\mathbb{N},\ f_n(x) > -m_x\}\in\mathscr{A}.$$

17/02/2021

Wednesday, February 17, 2021 7:25 AM

Def Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio medido y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de X en $\mathbb{R}$ diremos que $f_n \to f$ μ-ctp donde $f: X \to \mathbb{R}$ si

$$\mu\left(\{x\in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}\right) = 0$$

Prop. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, $f: X \to \mathbb{R}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de X en $\mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$ μ-ctp si μ es completa y f_n es medible para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces f es medible.

Puesto que

$$\liminf_{n\to\infty} f_n \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} f_n$$

son medibles y además son μ-ctp iguales, entonces

$$f = \liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

es medible

Integral de Lesbegue

Def Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido. Diremos que $f: X \to \mathbb{R}$ es una función simple si

$$\operatorname{Im}(f) = \}\alpha_1, \dots, \alpha_n\{$$

y además

$$f^{-1}(\{\alpha_k\}) \in \mathcal{A} \qquad \forall k \in \}0, \dots, n\{$$

y además

$$f^{-1}(\{\alpha_k\}) \in \mathcal{A} \qquad \forall k \in \{0,\dots,n\}$$

Nota:

Consideremos

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) \end{aligned}$$

• ¿f es simple?

Notemos que $Im(f)$ es finita y además puesto que

$$f^{-1}(\{0\}) = ([0,1]\cap\mathbb{Q})^c$$

y como $[0,1], \mathbb{Q} \in Bor(\mathbb{R})$ entonces.

$$f^{-1}(\{0\}) \in Bor(\mathbb{R})$$

Análogamente se tiene que

$$f^{-1}(\{1\}) = ([0,1]\cap\mathbb{Q}) \in Bor(\mathbb{R})$$

• f es escalonada?

Puesto que

$$f^{-1}(\{1\}) = [0,1]\cap\mathbb{Q}$$

donde $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ no es un intervalo

Trabajo en clase

Friday, February 19, 2021 7:14 AM

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Muestre que si el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces f es medible.

Sea $x \in \mathbb{R}$, cualquiera y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números racionales tal que tal que

$$x - \frac{1}{n} < q_n < x + \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

esto se garantiza puesto que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Así, por la propiedad arquimediana aplicada a 1 y ε con $\varepsilon > 0$ cualquiera tenemos que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

de donde

$$x - \varepsilon < x - \frac{1}{n} < q_n < x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon < q_n - x < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad |q_n - x| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así, como ε es arbitrario, se sigue que $q_n \to x$.

Forma 2

Como $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$ podemos hallar $r_1 \in \mathbb{Q}$ tal que

$$r - 1 < r_1 < r.$$

Se asegura que podemos encontrar $r_2 \in \mathbb{Q}$ tal que

$$r - \frac{1}{2} < r_2 < r \qquad y \qquad r_1 \leq r_2$$

en efecto por absurdo, para todo $p \in \mathbb{Q}$

$$r - \frac{1}{2} \geq p \quad \vee \quad p \geq r \quad \vee \quad r_1 > p \qquad (*)$$

como $r_1 \in \mathbb{Q}$, entonces

$$r_1 \leq r - \frac{1}{2}.$$

y además sabemos que existe $r_2 \in \mathbb{Q}$ tal que

$$r - \frac{1}{2} < r_2 < r$$

así

$$r_1 < r_2$$

De donde como $r_2 \in \mathbb{Q}$, por $(*)$

$$r_1 > r_2$$

lo cual es absurdo. Asi, hemos encontrado una sucesión creciente.

P.D. f es medible.

Sea $r \in \mathbb{R}$, cualquiera

P.D. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < r\} \in \mathcal{A}$

Probemos que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) < r_n\}$$

puesto que r_n es creciente convergente a r, entonces se sigue que

$$\{x \in X : f(x) < r_n\} \subset \{x \in X : f(x) < r\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde se sigue que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) < r_n\} \subset \{x \in X : f(x) < r\}$$

Por otra parte, puesto que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} r_n = r$$

dado que $r_n \to r$, entonces

$$\{x\in X : f(x) < r\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{x\in X : f(x) < r_n\}$$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x\in X : f(x) < r_n\}$$

Así, como

$$\{x\in X : f(x) < r_n\} \in \mathcal{A} \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x\in X : f(x) < r_n\} = \{x\in X : f(x) < r\} \in \mathcal{A}$$

Forma 2

Sea $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x\in X : f(x) < r_n\}$

$$\Rightarrow \exists m\in\mathbb{N} \text{ tal que } x\in \{x\in X : f(x) < r_m\}$$

$$\Rightarrow x\in A.$$

Sea $x\in A$, así

$$f(x) < r$$

$$\Rightarrow r - f(x) < 0$$

Como $r_n \to r$ entonces $|r_n - r| \to 0$ y así podemos hallar $N \geq 0$ suficientemente grande tal que

$$0 < |r_N - r| < r - f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - r < r_n - r < r - f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) < r_n$$

$$\Rightarrow x\in \{x\in X : f(x) < r_n\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x\in X : f(x) < r_n\}$$

22/02/2021

Monday, February 22, 2021 7:12 AM

Def. El espacio de las funciones simples es un espacio vectorial

Demostración: $S(X,\mathcal{A},\mu)$ el espacio de todas las funciones simples de X en $\mathbb{R}$.

- $0 \in S(X,\mathcal{A},\mu)$

Puesto que tomando $\alpha_k = 0$ para $k \in \{1,\dots,n\}$ se tiene que

$$0(x) = f(x) = 0\, \mathbb{1}_X(x).$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in S$. P.D $\lambda f \in S$

$$\lambda f(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbb{1}_{A_k}(x) = g(x) \in S$$

- Sean $f, g \in S$. P.D $f+g \in S$

Así,

$$g(x) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}(x)$$

P.D. $$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} (\alpha_i + \beta_i)\, \mathbb{1}_{C_{ij}}(x)$$

con $C_{ij} = A_i \cap B_j$

$C_{ij} \in \mathcal{A}$ para todo $i \in \{0,\dots,n\}$ y para todo $j \in \{0,\dots,m\}$

$(C_{ij})_{ij}$ es disjunto dos a dos.

Notemos que

$$C_{ij} \cap C_{pq} = (A_i \cap B_j) \cap (A_p \cap B_q)$$

$$\subset A_i \cap A_p$$

$$= \emptyset$$

$$\subset A_i \cap A_p$$
$$= \emptyset$$

- $A_i = \bigcup_{j=0}^{m} C_{ij}$

$$\boxed{C_{ij} = A_i \cap B_j}$$

Notemos que

$$\bigcup_{j=0}^{m} C_{ij} = \bigcup_{j=0}^{m} (A_i \cap B_j)$$
$$= A_i \cap \left(\bigcup_{j=0}^{m} B_j \right)$$
$$= A_i \cap X$$
$$= A_i$$

$$X = \bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{j=0}^{m} C_{ij}.$$

Sea $x \in X$, cualquiera

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= \alpha_p + \beta_q$$
$$= (\alpha_p + \beta_q) \mathbb{1}_{C_{pq}}(x) + 0$$
$$= (\alpha_p + \beta_q) \mathbb{1}_{C_{pq}}(x) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq q}}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{C_{ij}}(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{C_{ij}}(x)$$

Nota:

Notemos que

$$(f \odot g)(x) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i \odot \beta_j) \mathbb{1}_{C_{ij}}(x)$$

$i=1 \quad j=1 \qquad\qquad ij$

con $\odot = +, -, \times, \div, \text{máx}, \text{mín}$

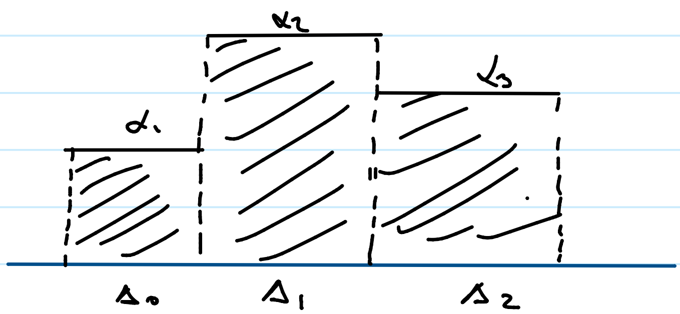
24/02/2021

Wednesday, February 24, 2021 7:14 AM

Definición

Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio medido. Notaremos por $S^+(X,\mathcal{A},\mu)$ el conjunto de las funciones simples positivas, es decir

$$\alpha_i \geq 0. \qquad \forall i.$$



$$f(x) = \alpha_0 \mathbb{1}_{\Delta_0}(x) + \alpha_1 \mathbb{1}_{\Delta_1}(x) + \alpha_2 \mathbb{1}_{\Delta_2}(x)$$

$$\text{Area} = \alpha_0 \mu(\Delta_0) + \alpha_1 \mu(\Delta_1) + \alpha_2 \mu(\Delta_2)$$

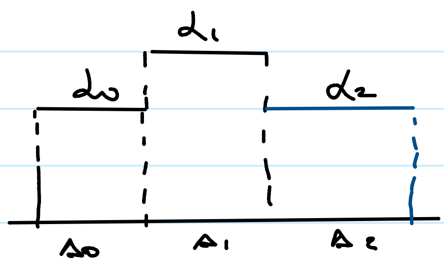
Definición

Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio medido y $f \in S^+(X,\mathcal{A},\mu)$ entonces si

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{\Delta_i}(x)$$

Su integral está dada por

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(\Delta_i)$$



- $f(x) = \alpha_0 \mathbb{1}_{\Delta_0}(x) + \alpha_1 \mathbb{1}_{\Delta_1}(x) + \alpha_2 \mathbb{1}_{\Delta_2}(x)$

  $\Rightarrow \int_X f \, d\mu(x) = \alpha_0 \mu(\Delta_0) + \alpha_1 \mu(\Delta_1) + \alpha_2 \mu(\Delta_2)$

- $B_0 = \Delta_0 \cup \Delta_2$

  $\to f(x) = \alpha_0 \mathbb{1}_{B_0} + \alpha_1 \mathbb{1}_{\Delta_1}$

$$\int_X f \, d\mu(x) = \alpha_0 \mu(B_0) + \alpha_1 \mu(A_1)$$

Proposición

La integral de funciones simples no depende de la expresión de funciones

Demostración:

Sea $f \in S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \quad y \quad f(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}(x)$$

$$\int_X f \, d\mu(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \qquad \int_X f(x) \, d\mu(x) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

Consideremos

$$C_{ij} = A_i \cap B_j \qquad \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad \forall j \in \{0, \dots, m\}$$

$$\begin{aligned}
\int_X f \, d\mu(x) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu\left(\bigcup_{j=0}^{m} C_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu\left(\bigcup_{j=0}^{m} A_i \cap B_j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \sum_{j=0}^{m} \mu(C_{ij}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_i \mu(C_{ij})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_X f \, d\mu(x) &= \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n} C_{ij}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m} \beta_j \sum_{i=0}^{n} \mu(C_{ij}) \\
&= \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \beta_j \mu(C_{ij}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mu(C_{ij})
\end{aligned}$$

Así

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_i \mu(C_{ij}) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mu(C_{ij})$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha_i = \beta_j$$

Pues $\quad x \in C_{ij} \Rightarrow x \in A_i \quad y \quad x \in B_j$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \alpha_i \quad y \quad f(x) = \beta_j$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha_i = \beta_j$$

Nota:

Si $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$, con $A \in \mathcal{A}$

- $f \in S^{+}$

$$f(x) = \mathbb{1}_A(x) + 0\, \mathbb{1}_{A^c}(x)$$

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(A^c)$$
$$= \mu(A)$$

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X \mathbb{1}_A\, d\mu(x) = \int_A \mathbb{1}_A\, d\mu(x)$$
$$= \int_A d\mu(x)$$

Por lo tanto,

$$\mu(A) = \int_A d\mu(x)$$

$$\boxed{\text{Notación} \quad d\lambda x = dx}$$

- $\lambda([a,b]) = b-a = \int_a^b 1\, dx$.

$$\int_A d(x,y) = \iint_A dx\,dy = \text{área}(A) = \lambda(A)$$

con $A \subseteq \mathbb{R}^2$

- Si $A \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint_A dx\,dy\,dz = \text{volumen}(A) = \lambda(A)$$

Prop.

Sean $f, g \in S^{+}(X, \mathcal{A}, \mu)$ entonces:

- Homogeneidad   Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\int_X (\lambda f)(x)\, d\mu(x) = \lambda \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

- Adividad

$$\int_X (f+s) = \int_X f + \int_X s$$

- Monotonia: Si $f \leq g$, entonces

$$\int_X f \leq \int_X g$$

Demostración

Sea $f \in S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$, así,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

$$\Rightarrow (\lambda f)(x) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda \alpha_i) \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

Por lo tanto,

$$\int_X (\lambda f) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda \alpha_i) \mu(A_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

$$= \lambda \int_X \lambda.$$

Ejercicio

Thursday, February 25, 2021 10:38 PM

Nombre Daniel Lara.

Ejercicio 1.

Sea
$$K = \{]-\infty, \alpha[\ : \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \},$$
muestre que
$$Bor(\mathbb{R}) = \sigma(K)$$

Demostración:

Para la demostración de este resultado vamos a probar la doble contenencia.

$\Leftarrow$ P.D. $\sigma(K) \subset Bor(\mathbb{R})$

Sea $A \in K$, cualquiera; entonces A es abierto y por definición de $\mathbb{R}$, se sigue que
$$A \in Bor(\mathbb{R}).$$
Puesto que A es abierto hemos probado que
$$K \subset Bor(\mathbb{R})$$
más aún, se tiene que
$$\sigma(K) \subset Bor(\mathbb{R}).$$

$\Rightarrow$ P.D. $Bor(\mathbb{R}) \subset \sigma(K).$

Sea $b \in \mathbb{R}$, cualquiera, notemos que
$$[b, +\infty[= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (b - 1/n, +\infty) \in \sigma(K)$$
Así, sean $a, b \in \mathbb{R}$ cualesquiera, con $a < b$, tenemos que
$$(a, b) = (a, +\infty) \setminus [b, +\infty)$$

01/03/2021

Monday, March 1, 2021 7:11 AM

2) Sea $f, g \in S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \quad y \quad g(x) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}(x)$$

además

$$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{C_{ij}}(x).$$

Así, tenemos que

$$\int_X (f+g)(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \mu(C_{ij})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_i \mu(C_{ij}) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mu(C_{ij})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \beta_i \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

$$= \int_X f(x)\, d\mu(x) + \int_X g(x)\, d\mu(x)$$

- Sea $f \leq g$; así

$$\int_X g(x) = \int_X f + (g-f) = \underbrace{\int_X f(x)\, d\mu(x)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_X (g-f)(x)\, d\mu(x)}_{\geq 0}$$

$$\geq \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

Teorema.
Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, $f \in S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que

Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio medido, $f \in S^+(X,\mathcal{A},\mu)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Una sucesión creciente en $S^+(X,\mathcal{A},\mu)$ tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in X$$

entonces

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x)$$

Demostración

- P.D $\quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \leq \int_X f$

Así, tenemos que

$$f_n(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \int_X f_n(x) \leq \int_X f(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \leq \int_X f(x)$$

- Por otro lado, vamos a probar que

$$\int_X f(x) \leq \int_X f_n(x)$$

Como $f \in S^+$, entonces

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

Tomemos $\varepsilon \in (0,1)$ y definamos

$$A_{n,i} := \{ x \in A_i : f_n(x) \geq (1-\varepsilon)\alpha_i \}$$

para $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0,\dots,m\}$. Así,

- $A_{n,i} \in \mathcal{A} \qquad \forall n, \forall i$

• $A_{n,i}$ es disjunta 2 a 2 para cada $n \in \mathbb{N}$

Consideremos

$$A_{n,j} \cap A_{n,k} = \{ x \in A_j : f_n(x) \geq (1-\varepsilon)\alpha_j \} \cap \{ x \in A_k : f_n(x) \geq (1-\varepsilon)\alpha_k \}$$

$$\subseteq A_j \cap A_k$$
$$= \emptyset$$

• $A_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,i} \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$

Como $A_{n,i} \subseteq A_i \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,i} \subseteq A_i \qquad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

P.D.

$$A_i \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,i} .$$

Sea $x \in A_i$, entonces existe α_i tal que

$$f(x) = \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x),$$

puesto que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, sabemos que

$$f_n(x) < f(x) = \alpha_i (1) = \alpha_i$$

$$\Rightarrow \qquad f_n(x) < \alpha_i$$

Así, α_i es una cota superior para el conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ x \in A_i : f_n(x) \}$$

y, por definición del supremo, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha_i (1-\varepsilon) \leq f_n(x) < \alpha_i$$

Por lo tanto

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in A_i : \alpha_i(1-\varepsilon) \leq f_n(x)\}$$

Sea $x \in A_i$, así $f(x) = \alpha_i$, como

$$f_n(x) \to f(x)$$

para $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \alpha_i$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$n \geq N \qquad |f_n(x) - f(x)| < \tilde{\varepsilon}$

$\Rightarrow \quad -\varepsilon\alpha_i < f_n(x) - \alpha_i < \varepsilon\alpha_i$

$\Rightarrow \quad (1-\varepsilon)\alpha_i < f_n(x)$

$\Rightarrow \quad x \in A_{n,i} \qquad \forall n \geq N$

$\Rightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,i}$

- $X = \bigcup_{i=0}^{m} A_{n,i}$ para $n \geq N$

- $\bigcup_{i=0}^{m} A_{n,i} \subset X$

- P.D $X \subset \bigcup_{i=0}^{m} A_{n,i}$

Sea $x \in X$, cualquiera, como

$$\bigcup_{i=0}^{m} A_i = X$$

existe un $j \in \{0, \dots, m\}$ tal que

$$x \in A_j$$

y por lo tanto

$$x \in A_{n,j} \qquad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \quad x \in \bigcup_{i=0}^{m} A_{n,j} \qquad \forall n \geq N$$

Definamos

$$g_n(x) = \sum_{i=0}^{m} (1-\varepsilon)\, \alpha_i \, \mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

- $g_n(x) \in S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$
- $g_n \leq f_n \qquad \forall n \geq N$

Sea $x \in X$, existe $j \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $x \in A_j$

Como $n \geq N$

$$\Rightarrow \quad f_n(x) \geq (1-\varepsilon)\, \alpha = g_n(x)$$

pues $x \in A_{n,j}$.
Por lo tanto, tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \int_X g_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{m} (1-\varepsilon)\, \alpha_i \, \mu(A_{n,i})$$

$$= (1-\varepsilon) \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \lim_{n \to \infty} \mu(A_{n,i})$$

$$= (1-\varepsilon) \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \, \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,i}\Big)$$

$$= (1-\varepsilon) \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \, \mu(A_i)$$

$$= (1-\varepsilon) \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

Así,

$$(1-\varepsilon)\int_X f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) \leq \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)$$

tomando $\varepsilon \to 0$, se sigue que

$$\int_X f(x) \leq \int_X f_n(x)$$

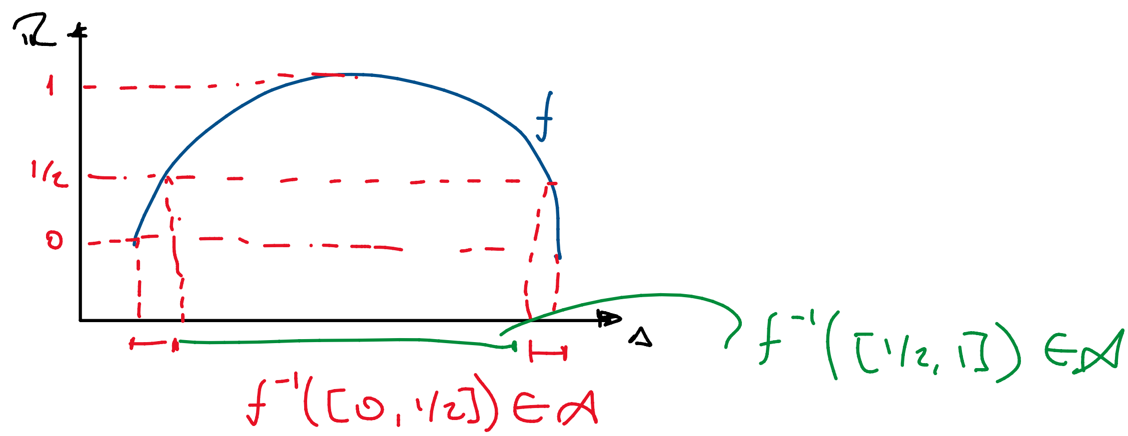
$$\Rightarrow \qquad \int_X f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x)$$

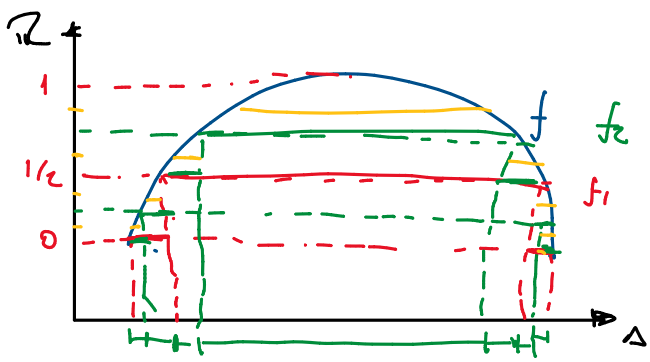
Teorema de aproximación

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, $A \in \mathcal{A}$, $f: A \to \mathbb{R}^+$ medible, entonces existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $S^+(X,\mathcal{A},\mu)$ tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in X.$$

Idea:





$f_1 < f_2$

$f_3 > f_2 > f_1$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones, creciente

03/03/2021

Wednesday, March 3, 2021 7:09 AM

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots, n2^n$, definimos

$$A_{n,k} = \left\{ x \in A : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k}{2^n} \right\}$$

$$= f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] \right)$$

Definamos $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{si } x \in A_{n,k} \\ n & \text{si } x \in A \setminus \bigcup A_{n,k} \end{cases}$$

Además, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Definición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, entonces su integral está definida por

$$\int_X f(x)\, d_\mu(x) = \sup \left\{ \int_X \varphi(x)\, d_\mu(x) : \varphi \in S^+(X, \mathcal{A}, \mu),\ \varphi \leq f \right\}$$

Nota:

Puesto que si $f \in S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$, entonces f es medible positiva y por tanto, las dos definiciones de integral coinciden

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, $f : X \to \mathbb{R}^+$ medible y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ creciente en $S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad \forall x \in X$$

$n \to \infty$

entonces

$$\int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

Demostración

P.D $$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \leq \int_X f$$

Notemos que $f_n \in S^+$ y $f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así, por definición de integral de $\int_X f$

$$\int_X f \geq \int_X f_n \qquad \forall f_n$$

$$\Rightarrow \int_X f \geq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

P.D $$\int_X f \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

Consideremos $\varphi \in S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$ con $\varphi \leq f$ y probemos que

$$\int_X \varphi \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

En efecto, consideremos

$$\varphi_n = \min(\varphi, f_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $\varphi_n \in S^+(X, \mathcal{A}, \mu) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

- $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente

$$\min(f, f_n) \leq f_n \leq f_{n+1}$$

$$\varphi_n = \min(\varphi, \min(\varphi, f_n)) \leq \min(\varphi, f_{n+1}) = \varphi_{n+1}$$

- $\varphi_n \longrightarrow \varphi$

$$\lim_{n\to} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \min(\varphi(x), f_n(x))$$

$$= \min(\varphi(x), f(x))$$

$$= \varphi(x)$$

- $\varphi_n(x) \leq f_n(x) \qquad \forall n$

Por un teorema anterior

$$\int_X \varphi = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dos funciones medibles, se verifican las propiedades de homogeneidad, aditividad y monotonía.

Demostración

Sea $\lambda \in \mathbb{R}^+$, como λf es medible positiva, entonces por el teorema de aproximación podemos encontrar $(\lambda f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda f_n(x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in X$$

por lo tanto

$$\int_X (\lambda f) = \lim_{n\to\infty} \int_X (\lambda f)$$

Así

$$\int_X (\lambda f) = \lim_{n\to\infty} \int_X (\lambda f)$$

Así

$$\int_X \lambda f = \lambda \lim_{n\to\infty} \int_X f$$

- Consideremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones crecientes positivas en $\mathcal{S}^+(X,\mathcal{A},\mu)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} g_n = g$$

por lo tanto

$$f + g = \lim_{n\to\infty} f_n + g_n$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int_X f + g &= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n + g_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n + \int_X g_n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n + \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \\
&= \int_X f + \int_X g
\end{aligned}$$

Definición

Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio medido, $f: X \to \mathbb{R}$ medible

- Diremos que f es μ-integrable si

$$\int_X f^+ < +\infty \quad \text{y} \quad \int_X f^- < +\infty$$

- La integral de Lebesgue está dada por

$$\int_X f := \int_X f^+ - \int_X f^-$$

Lema.

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, f_1, f_2, s_1, s_2 funciones medidas positivas tal que

$$f_1 - f_2 = s_1 - s_2$$

entonces

$$\int_X f_1 - \int_X f_2 = \int_X s_1 - \int_X s_2$$

05/03/2021

Friday, March 5, 2021 7:12 AM

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, $f, g : X \to \mathbb{R}$ medibles, entonces:

1) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_X \lambda f = \lambda \int_X f$$

2) Aditividad

3) Monotonía

Demostración

1) . Si $\lambda = 0$ ✓

Si $\lambda > 0$, se tiene que

$$\int_X \lambda f = \int_X (\lambda f)^+ - \int_X (\lambda f)^-$$

$$= \int_X \max(\lambda f, 0) - \int_X \max(-\lambda f, 0)$$

$$= \int_X \lambda f^+ - \int_X \lambda f^-$$

$$= \lambda \int_X f^+ - \lambda \int_X f^{-1}$$

$$= \lambda \left(\int_X f^+ - \int_X f^{-1} \right)$$

$$= \lambda \int_X f$$

- Si $\lambda < 0$

$$\int_X \lambda f = \int_X (\lambda f)^+ - \int_X (\lambda f)^-$$

$$= \int_X \max(\lambda f, 0) - \int_X \max(-\lambda f, 0)$$

$$= \int_X -\lambda \max(-f, 0) - \int_X -\lambda \max(f, 0)$$

$$= \int_X -\lambda f^- + \int_X \lambda f^+$$

$$= \lambda\left(\int_X f^+ - \int_X f^-\right) \quad = \lambda \int_X f$$

2)

- $f + g = (f+g)^+ - (f-g)^-$
- $f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$

$$= (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

Por el lema anterior

$$\int_X f + g = \int_X (f+g)^+ - \int_X (f+g)^-$$

$$= \int_X (f^+ + g^+) - \int_X f^- + g^-$$

$$= \int_X f^+ + \int_X g^+ - \int_X f^- - \int_X g^-$$

$$= \int_X f^+ - \int_X f^- + \int_X g^+ - \int_X g^-$$

$$= \int_X f + \int_X g.$$

3) Notemos que

$$0 \leq g - f$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_X g - f$$

$$\Rightarrow \quad = \int_X g - \int_X f$$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medibles, iguales μ-ctp. Si f es integrable, entonces g es integrable y

$$\int_X f = \int_X g$$

Consideremos

$$N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

entonces $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$ $\quad (f = g \ \ \mu\text{-ctp})$ y definamos

$$h : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$x \longmapsto h(x) \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in N \\ 0 & \text{si } x \notin N \end{cases}$$

Así,

$$\int_X h = +\infty\, \mu(N) + 0\, \mu(N^c)$$

$$= 0$$

Consideremos

$$h_n(x) = n\, \mathbb{1}_N(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $h_n \in S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$
- $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$

Así

$$\int_X h = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n\, \cancel{\mu(N)}^{0} + 0\, \cancel{\mu(N^c)}^{0} \right)$$

$$= 0.$$

Notemos que

- $f \leq g + h$

Si $x \in N^c \Rightarrow f(x) = g(x)$ y $h(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) + h(x).$$

Si $x \in \mathbb{N}^c \Rightarrow f(x) \neq g(x)$ y $h(x) = +\infty$

$$\Rightarrow f(x) \leq g(x) + h(x)$$

Así,

$$\int_X f \leq \int_X g + \int_X h = \int_X g$$

Por otra parte

$$-g \leq f + h$$

$$\Rightarrow \int_X \leq \int_X f + \int_X \cancel{h}^{\,0} = \int_X f \;//$$

Teorema de convergencia monótona. Beppo-Levy

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ medible $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente con $f_n: X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ medible para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \mu\text{-ctp}$$

entonces

$$\int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

Consideremos por el momento que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in X$$

P.D. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \leq f$

$$f_n \leq f \qquad \forall n$$

$$\int_X f_n \leq \int_X f \qquad \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \leq \int_X f \quad \forall n$$

P.D.

$$\int_X f \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es medible positiva, por el teorema de aproximación existe $(g_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$, creciente en $S^+(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que

$$f_n(x) = \lim_{k\to\infty} g_{n,k}(x) \qquad \forall x \in X$$

Definimos

$$h_n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto h_n(x) = \max\left(g_{1,n}(x), g_{2,n}(x), \dots, g_{n,n}(x)\right)$$

- $h_n \in S^+(X, \mathcal{A}, \mu) \qquad \forall n$

- h_n es creciente

$$h_n(x) = \max(g_{1,n}, g_{2,n}, \dots, g_{n,n})$$
$$\leq \max(g_{1,n+1}, \dots, g_{n,n+1})$$
$$\leq \max(g_{1,n+1}, \dots, g_{n+1,n+1})$$
$$= h_{n+1}$$

- $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in X$

$$h_n \geq g_{i,n} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} h_n \geq \lim_{n\to\infty} g_{i,n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} h_n \geq f_i \qquad \forall i$$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \lim_{n\to\infty} h_n \geq \lim_{i\to\infty} f_i = f$$

Notemos que

$$h_n \leq f_n \qquad \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n \leq \lim_{n\to\infty} f_n = f$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} h_n = f.$$

$\therefore h_n \leq f_n$

$$h_n = \text{máx}(\underbrace{g_{1,n}}_{\leq f_1}, \dots, \underbrace{g_{n,n}}_{\leq f_n})$$

$$\leq \text{máx}(f_1, \dots, f_n)$$

$$= f_n$$

Así.

$$\int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

Supongamos ahora que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \mu\text{-ctp}$$

Así, existe $N \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(N) = 0$, con

$$N = \{x \in X : f(x) \neq \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$$

Definamos

$$\varphi = f \cdot \mathbb{1}_{N^c} \qquad y \qquad \varphi_n = f_n \cdot \mathbb{1}_{N^c} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

con las siguientes propiedades

- φ, φ_n son medibles positivas
- $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente
- $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \qquad \forall x \in X$

· Si $x \in N^c$, entonces $\mathbb{1}_{N^c}(x) = 1$

$$\varphi_n = f_n \qquad y \qquad \varphi = f$$

· Si $x \in N$, entonces $\mathbb{1}_{N^c}(x) = 0$

$$\varphi_n = \varphi = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi = 0$$

Por la primera parte de la demostración tenemos que

$$① \quad \int_X \varphi = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)$$

pero, notemos que

$$\varphi = f \qquad y \quad \varphi_n = f_n \qquad \mu\text{-ctp}$$

de donde

$$\int_X \varphi = \int_X f \qquad y \quad \int_X \varphi_n = \int_X f_n \qquad \forall n$$

por (ii), se sigue que

$$\int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

08/03/2021

Monday, March 8, 2021 7:16 AM

Lema de Fatou

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles de X en $\mathbb{R}^+$, entonces

$$\int_X \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)\, d\mu(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

Consideremos

$$g_n = \inf_{k\geq n} f_k \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

notemos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente donde

$$\lim g_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k$$

Así, por el teorema de convergencia monótona

$$\int_X \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\, d\mu(x)$$

y como

$$g_n = \inf_{k\geq n} f_k \leq f_n \qquad \forall n$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\, d\mu(x) \leq \lim_{n\to\infty}$$

Demostración:

Consideremos

$$g_n = \inf f_k \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Consideremos

$$g_n = \inf_{k\geq n} f_k \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

- g_n es medible positiva para cada $n\in\mathbb{N}$
- $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente
- $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \forall x\in X$
- $g := \liminf_{n\to\infty} f_n$ es medible positiva.
- $g_n \leq f_k \qquad \forall k\geq n$

$$\Rightarrow \int_X g_n \leq \int_X f_k \qquad \forall k\geq n$$

$$\Rightarrow \int_X g_n = \inf_{k\geq n} \int_X g_n \leq \inf_{k\geq n} \int_X f_k$$

y por el teorema de BL,

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x) d\mu(x) = \int_X g = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \int_X f_k$$

$$\Rightarrow \qquad \int_X \liminf_{n\to\infty} f(x)\, d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

Teorema de convergencia dominada de Lesbegue

Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio medido, f y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funciones medibles de X en $\mathbb{R}$ tal que

1) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \mu$-ctp

2) existe $g: X \to \mathbb{R}^+$ tal que
$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \mu$-ctp.

entonces f es integrable y

$$\int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

Demostración

Puesto que

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

se tiene que

$$\left| \int_X f \right| \leq \int_X |f| \leq \int_X g < +\infty$$

Demostración

Supongamos que todas las propiedades se verifican en todo punto y $g(x) < +\infty$ $\forall x \in X$

• P.D f es integrable

$$|f_n(x)| < g(x) \qquad \forall x \in X$$

tomando $n \to \infty$

$$|f(x)| < g(x)$$

$$\Rightarrow \qquad -g(x) < f(x) < g(x)$$

$$\Rightarrow \qquad -\int_X g \leq \int_X f \leq \int_X -g$$

$$\Rightarrow \qquad \left| \int_X f \right| < \int_X g < +\infty$$

$$-g(x) \leq f_n(x) \leq g(x)$$

$$-g(x) \leq f_n(x) \leq g(x)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$(f_n+g) \qquad (g-f_n)$$

Consideremos $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$

→ f_n+g es medible positiva para todo $n\in\mathbb{N}$

→ $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n+g)(x) = (f+g)(x) \qquad \forall x\in X$

Por el lema de Fatou, tenemos que

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (f_n+g) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (f_n+g)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n + \int g \right)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n + \int_X g$$

$$\Rightarrow \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n + \int_X g \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n + \int_b g$$

$$\Rightarrow \int_X f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n$$

Consideremos $(g-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- $g-f_n$ es medible positiva para todo $n\in\mathbb{N}$

- $\lim_{n\to\infty} (f-g_n)(x) = (g-f)(x) \qquad \forall x \in X$

Por el lema de Fatou

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (g-f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X g - f_n$$

$$\int_X g - f \qquad \leq \int_X g + \liminf_{n\to\infty} \int_X - f_n$$

$$\int_X g - \int_X f$$

Así

$$-\int_X f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X -f_n$$

$$= - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n$$

$$\Rightarrow \quad \int_X f \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n.$$

Así,

$$\int_X f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \leq \int_X f$$

entonces

$$\int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

Se concluye como en el teorema de B.L.

10/03/2021

Wednesday, March 10, 2021 7:11 AM

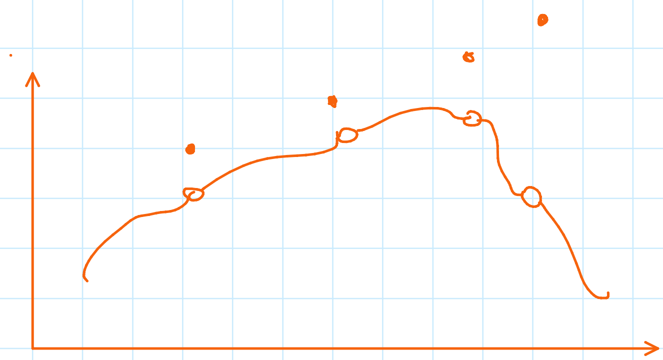
Espacios de Lebesgue

Def. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y $f: X \to \mathbb{R}$, medible. El supremo esencial de f está dado por

$$\operatorname*{supess}_{x \in X} f(x) = \inf \{ c \in \overline{\mathbb{R}} : \mu(\{x \in X : f(x) > c\}) = 0 \}$$

análogamente definimos el ínfimo esencial

$$\operatorname*{infess}_{x \in X} f(x) = \sup \{ c \in \overline{\mathbb{R}} : \mu(\{x \in X : f(x) < c\}) = 0 \}$$



Nota.

$$\operatorname*{supess}_{x \in X} f(x) = - \operatorname*{infess}_{x \in X} (-f(x))$$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y $f, g: X \to \mathbb{R}$ medidas.

1) Si $f = g$ μ-ctp, entonces

$$\operatorname*{supess}_{x \in X} f(x) = \operatorname*{supess}_{x \in X} g(x)$$

2) $f(x) \leq \operatorname*{supess}_{x \in X} f(x)$ μ-ctp

3) Para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < \operatorname{sup\,ess}_{x \in X} f(x)$ se tiene que

$$\mu(\{x \in X : f(x) > c\}) > 0$$

Demostración

1) Consideremos

$$N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

así, $N \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(N) = 0$

Notemos que

$$\{x \in X : f(x) > c\} = \{x \in N : f(x) > c\} \cup \{x \in N^c : f(x) > c\}$$

$$\Rightarrow \quad \mu(\{x \in X : f(x) > c\}) = \mu(\{x \in N^c : g(x) > c\})$$

2). PD $\quad f(x) < \operatorname{sup\,ess}_{x \in X} f(x) \quad \mu\text{-ctp}$

PD $\quad \mu(\{x \in X : f(x) > \operatorname{sup\,ess}_{x \in X} f(x)\}) = 0$

consideremos

$$A_n = \{x \in X : f(x) > \operatorname{sup\,ess}_{x \in X} f(x) + \tfrac{1}{n}\}$$

- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n,$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow$

Sea $x \in A_n$

$$\Rightarrow f(x) > \underset{x \in X}{\operatorname{supess}} f(x) + \frac{1}{n}$$

$$> \underset{x \in X}{\operatorname{supess}} + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow x \in A_{n+1}$$

- $\mu(A_n) = 0 \qquad \forall n$
- $\{x \in X : f(x) > \underset{x \in X}{\operatorname{supess}} f(x)\} = \lim_{n \to \infty} A_n$

finalmente por el teorema de continuidad de medidas

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) > \underset{x \in X}{\operatorname{supess}} f(x)\}\right) = \lim_{n \to \infty} A_n = 0$$

3) Si $c < \underset{x \in X}{\operatorname{supess}}$ y por absurdo supongamos que

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) > c\}\right) = 0$$

lo que contradice el Infimo.

Definición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, $f: X \to \mathbb{R}$ medible, definimos la cota esencial por

$$\|f\|_{L^\infty} = \underset{x \in X}{\operatorname{supess}} |f(x)|$$

Nota.

- $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$

- $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$

- Si $c \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) \leq c$ μ-ctp
  $\Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \leq c$ μ-ctp

Definición
Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, definimos el conjunto

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ medibles} : \|f\|_{L^\infty} < +\infty \}$$

Prop
$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio vectorial

Nota.
Si $|f(x)| \leq |g(x)|$ μ-ctp, entonces

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^\infty}$$

Notemos que

$$|f(x)| \leq |g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty}$$

Demostración

- $0 \in \mathcal{L}^\infty$ pues $\|0\|_{L^\infty} = 0$
- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ P.D $\|\lambda f\|_{L^\infty} < +\infty$

$$\|\lambda f\|_{L^\infty} = \operatorname*{supess}_{x \in X} |\lambda f(x)|$$

$$= \operatorname{Inf}\{ c \in \overline{\mathbb{R}} : \mu\{ x \in X : |\lambda f(x)| > c \} = 0 \}$$

Así, como

$$\|f\|_{L^\infty} < +\infty$$

$$\Rightarrow \operatorname{Inf}\{ c \in \overline{\mathbb{R}} : \mu(\{ x \in X : |f| > c \}) = 0 \} < +\infty$$

entonces

$$\operatorname{Inf}\{ c \in \overline{\mathbb{R}} : \mu(\{ x \in X : |\lambda||f| > c|\lambda| \}) = 0 \} < +\infty$$

$$\Rightarrow \operatorname{Inf}\{ \tilde{c} \in \overline{\mathbb{R}} : \mu(\{ x \in X : |\lambda f| > \tilde{c} \}) = 0 \} < +\infty$$

$$\Rightarrow \operatorname*{sup\,ess}_{x \in X} |\lambda f(x)| < +\infty$$

$$\Rightarrow \|\lambda f\|_{L^\infty}$$

$$\|\lambda f\|_{L^\infty} = \operatorname*{sup\,ess}_{x \in X} |\lambda f|$$

$$= \operatorname{Inf}\{ c \in \mathbb{R} : \mu(\{ x \in X : |f(x)| > \tfrac{c}{|\lambda|} \}) > c \}$$

$$= \operatorname{Inf}\{ |\lambda| \tilde{c}$$

$$= |\lambda| \, \|f\|_{L^\infty}$$

Sean $f, g \in \mathcal{L}^\infty$

P.D $\qquad f + g \in \mathcal{L}^\infty$

P.D $\quad f+g \in \mathcal{L}^{\infty}$

Notemos que

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \quad y \quad |g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty}$$

$$\Rightarrow \quad |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$
$$\leq \underbrace{\|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}}_{C}$$

$$\Rightarrow |(f+g)(x)| \leq \|f+g\|_{L^\infty} \leq \|L\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$$

$$\therefore \quad \|f+g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$$

Teorema

$\mathcal{L}^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio vectorial semi normado

Demostración

Notemos que si $\|f\|_{L^\infty} =$

$$\Rightarrow f = 0 \qquad \mu\text{-ctp}$$

Definición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, definimos

$L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{R}$ medible $\mid \|f\|_{L^\infty} < +\infty$ μ-ctp$\}$

es decir

$$L^\infty(X,\mathcal{A},\mu) = \mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)/R_\mu$$

Teorema.

$L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ es un espacio vectorial normado

$$\|[f]\|_{L^\infty} = 0 \Rightarrow [f] = [0]$$
$$\Rightarrow f = 0 \quad \mu\text{-ctp}$$

Teorema

$L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ es de Banach

Demostración

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en L^∞, es decir

$\forall k>0 \ \exists N_0$ tal que $\forall n,m \geq N_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\| < 1/k$

Así, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe A_k tal que

$\mu(A_k) = 0$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall x \in X \setminus A_k$$

Definiendo

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

se tiene que $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$, así

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$

$$\Rightarrow \quad |f_n(x) - f_m(x)| < 1/k$$

si $x \in X \setminus A$.

Es decir, si $x \in X \setminus A$, entonces $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y como $\mathbb{R}$ es completo para todo $x \in X \setminus A$, existe $f(x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

es decir

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad \mu\text{-ctp}$$

$$\Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^\infty} \to 0$$

17/03/2021

Wednesday, March 17, 2021 7:15 AM

Espacios L^p

Definición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ medible, definimos

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$$

con $0 < p < +\infty$

Proposición:

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y $f, g: X \longrightarrow \mathbb{R}$ medibles

1) Si $|f(x)| < |g(x)| \Rightarrow \|f\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^p}$

2) Si $\mu(X) < +\infty \Rightarrow \|\mathbb{1}_X\|_{L^p} < +\infty$

Demostración

1)
$$\int_X |f|^p \leq \int_X |g|^p$$

$$\Rightarrow \left(\int_X |f|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |g|^p \right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} \le \left(\int_X |g|^p\right)^{1/p}$$

2)

$$\|\mathbb{1}_X\|_{L^p} = \left(\int_X |\mathbb{1}_X(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_X d\mu(x)\right)^{1/p}$$

$$= (\mu(X))^{1/p} < +\infty$$

Defición

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido $0 < p < +\infty$.
El espacio de Lesbegue está definido por

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f: X \to \mathbb{R} \text{ medibles} : \|f\|_{L^p} < +\infty \}$$

Nota.

Sea $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces

- Si $0 < p < 1$

$$(a+b)^p \le a^p + b^p$$

- $1 \le p \le +\infty$

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + \underbrace{2ab}_{\leq a^2+b^2} + b^2 \leq 2(a^2+b^2)$$

Proposición

$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ co $0 < p < +\infty$ son espacios vectoroniales

- $0 \in \mathcal{L}^p$
- Sea $\lambda \neq 0$

$$\|\lambda f\|_{L^p} = \left(\int_X |\lambda f|^p \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_X |\lambda|^p |f|^p \right)^{1/p}$$

$$= |\lambda| \, \|f\|_{L^p}$$

- Sea $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medibles, elementos de $\mathcal{L}^p$

- $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq |f|^p + |g|^p$ si $0<p<1$

- $|f+g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p+|g|^p)$ si $1 \leq p < +$

integrando

- $\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p$ si $0<p<1$

- $\|f+g\|_{L^p}^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\right)$ si $1\leq p\leq\infty$

Por lo tanto,

$$f+g \in \mathcal{L}^p$$

Proposición

Desigualdad de Minkowsky

Si $1\leq p\leq +\infty$ y $f,g\in\mathcal{L}(X,\mathcal{A},\mu)$, entonces

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Supongamos que $f\neq 0$ y $g\neq 0$ y definimos

$$A(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_{L^p}} \quad \text{y} \quad B(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_{L^p}}$$

Así

$$\|A\|_{L^p} = \|B\|_{L^p} = 1$$

Notemos que

$$|(f+g)|^p \le (\|f\|+\|g\|)^p \, |J A + (1-J) B|^p$$

con

$$J = \frac{\|f\|}{\|f\| + \|g\|}$$

Así

$$|f+g|^p \le (\|f\| + \|g\|)^p \, (J|A| + (1-J) B)^p$$

Integrando

$$\int_X |f+g|^p \le (\|f\| + \|g\|)^p \left(J \int_X |A|^p + (1-J) \int_X |B|^p \right) \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad \int_X |f+g|^p \le (\|f\| + \|g\|)^p$$

$$\Rightarrow \quad \|f+g\|^p \le (\|f\| + \|g\|)^p$$

$$\Rightarrow \quad \|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$$

Proposición

$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ con $1 \le p < +\infty$ es un espacio

$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ con $1 \leq p < +\infty$ es un espacio vectorial seminormado

Demostración

Si $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-ctp

Definición

Sea $1 \leq p < +\infty$, definimos

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ medible} / \|f\|_{\mathcal{L}^p} < +\infty \ \mu\text{-ctp} \} = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) / \mathcal{R}_\mu$$

Teorema