Teoría de Operadores Lineales Acotados.

Evaluación. (Primer Bimestre) ← Pueden variar para el siguiente bimestre

- Parcial 1 (3.5/10) Viernes 2 de junio
- Parcial 2 (3.5/10) Viernes 30 de junio
- Deberes (1/10) Viernes 19 de mayo
  Viernes 2 de junio
  Viernes 23 de junio
- Microevaluaciones (1/10) 31 de mayo
  1 de ~~mayo~~ (junio)
  14 de junio
- Conocimientos del curso (1/10) 25 de mayo
  21 de junio

total $\overline{\;10\;}$

[1] Brezis
[2] Paul Acevedo
[3] Zuly..
[4] Analyse Fonctionelle et theorie des operateurs. Josselle Charles

[4] Introductory Functional Analysis Kreyzig
[5] Complémants en Analyse course et exercises.
[6] [illegible] Vol 2

Clases: Lunes, Martes y Miércoles. Viernes (Ejercicios)

Contenido.

Capítulo 1: Nociones topológicas

Capítulo 2: Topologías Débiles en Espacios de Banach

↳ Suplementario topológico y relaciones de ortogo[illegible]

Capítulo 3: Operadores lineales en espacios de Banach y Hilbert.

↳ Operadores compactos

↳ Introducción a la Teoría Espectral

Capítulo 4: Álgebras de Banach.

Lunes, 8 de mayo de 2023.

Capítulo 0: Nociones topológicas.

Definición 0.1 Sea (X, τ_X) un espacio topológico, $A \subseteq X$ no vacío. Decimos que $x \in X$ es un punto de la clausura secuencial de A si existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ en (X, τ_X).

Al conjunto de la clausura secuencial de A se lo nota $[A]^{\tau_X}$

Propiedades.

- $A \subseteq [A]^{\tau_X}$
- $[A]^{\tau_X} \subset \overline{A}$
- $A \subseteq B \Rightarrow [A] \subseteq [B]$
- $[A] \subseteq [[A]]$
- $[A] \cup [B] = [A \cup B]$
- $[A \cap B] \subseteq [A] \cap [B]$

En espacios metrizables la clausura secuencial y la clausura coinciden.

Definición 0.2. Sea (X, τ_X) una topología. Se dice que τ_X es I-numerable si todo punto admite una base de vecindades numerable

Los espacios métricos son I-numerables.

Si (X, τ_X) es I-numerable, entonces para todo $A \subseteq X$,

$$\overline{A} = [A]$$

Definicio 0.3. Sea (X, τ_X) un e.t. Decimos que (X, τ_X) es II-numerables si admite una base numerable

- II-numerable $\Rightarrow$ I-numerable
- Espacio métrico y separable $\Rightarrow$ II-numerable
- ℓ^∞ y $L^\infty(\Omega)$ no son II-numerables.

Definición 0.4. Sea (X, τ_X) un e.t. y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Decimos que $x \in X$ es un valor adherente de la sucesión si

$$\forall V_x \in \mathcal{V}(x) \qquad \{n : x_n \in V_x\} \text{ es infinito.}$$

- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente entonces admite un valor adherente
- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un valor adherente.
- Si (X, τ_X) es I-numerable (en particular un espacio metrizable) entonces

valor adherente $\Rightarrow$ subsucesión convergente.

Contraejemplo

$$\begin{aligned} S_n : \ell^\infty &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x &\longmapsto S_n(x) = x_n \end{aligned} \qquad S_n \in \overline{B}_{(\ell^\infty)'} \text{ compacta en } \sigma((\ell^\infty)', (\ell^\infty))$$

Propiedad B-W $\Rightarrow$ Valor adherente. en $\sigma((\ell^\infty)', \ell^\infty)$

Por absurdo, si suponemos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente a $S \in (\ell^\infty)'$ en $\sigma((\ell^\infty)', \ell^\infty)$

$$y = (-1)^{n_k} \in \ell^\infty$$

Entonces

$$S_{n_k}(y) = (-1)^{n_k} \text{ no converge en } (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

Definición 0.5 Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos e.t. y $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$. Decimos que f es secuencialmente continua en $x \in X$ si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$ en (X, τ_X)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

- Decimos que f es secuencialmente continua en (X, τ_X) si f es secuencialmente continua en todo punto de X.
- Si f es continua entonces f es secuencialmente continua. (En general, la recíproca es falsa)

- Secuencialmente - continua $\Rightarrow$ continua

Sea F un cerrado en Y. P.D. $f^{-1}(F)$ es cerrado

P.D. $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$

Sea $x \in \overline{f^{-1}(F)}$, entonces existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n \to x$, luego $f(z_n) \to f(x)$

$$f(x) \in [F] \subseteq \overline{F} \subseteq F \quad \Rightarrow \quad x \in f^{-1}(F)$$

$$Id : (\ell^1, \sigma(\ell^1, \ell^\infty)) \longrightarrow (\ell^1, \sigma(\ell^1, \|\cdot\|))$$

$$x^n \to 0 \quad \Rightarrow \quad x^n \to 0 \quad \text{en } \sigma(\ell^1, \|\cdot\|)$$

Si fuera continua, las topologías serían equivalentes, i.e.,

$$\sigma(\ell^1, \ell^\infty) \approx \sigma(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$$

Esto no es posible pues $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ no es metrizable

Compacidad.

- Si (X, τ_X) es compacto
  $A \subseteq X$ A cerrado $\Rightarrow$ A compacto
- Si (X, τ_X) es separado
  A compacto $\Rightarrow$ A cerrado.

Martes, 9 de mayo de 2023.

Si $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua.

$A \subseteq X$ compacto $\Rightarrow$ $f(A)$ compacto en τ_Y

Definición 0.6. Sea (X, τ_X) un e.t. y $A \subseteq X$. Decimos que A es secuencialmente compacto si toda sucesión de A convergente en A.

- Si (X, τ_X) es separado y A secuencialmente compacto, entonces A es secuencialmente cerrado.
- En general, no existe ninguna implicación entre un conjunto compacto y un conjunto secuencialmente compacto.

Ejemplo: $\overline{B}_{\sigma(E';E)}$ con $E = \ell^\infty$ es compacta (Por Banach-Alaoglu) pero no es secuencialmente compacto.

$(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio de Banach si y solo si $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ es metrizable

Supongamos que $(E, \|\cdot\|_E)$ no es separable

¿$(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ es secuencialmente compacto?

Por Banach-Alaoglu siempre es compacta. ← Pregunta abierta.

En el caso de que (X, τ_X) sea metrizable

Compacto si y solo si Secuencialmente compacto

si y solo si Precompacto

Precompacidad.

Se tiene que (X, τ_d) es precompacto si:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists (x_1^\varepsilon, \dots, x_{n_\varepsilon}^\varepsilon) \in X) \text{ tal que } X = \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(x_i^\varepsilon, \varepsilon)$$

$A \subseteq X$ es precompacto si es precompacto como subespacio topológico con la topología inducida.

- (X, τ_d) y $A \subseteq X$, entonces se tienen las siguientes equivalencias
  - A es compacto
  - A es secuencialmente compacto
  - A es cerrado y precompacto

• A admite la propiedad de Bolzano - Weirestrass. (B-W)

Definición 0.7 Decimos que (X, τ_x) admite la propiedad de B-W si toda sucesión admite un valor adherente para la topología τ_x

› Si (X, τ_x) es separado

Si X es compacto entonces X admite la propiedad B-W

› Si (X, τ_x) es un e.t.

Si X es secuencialmente compacto entonces X admite la propiedad B-W.

Definición 0.8 Sea (X, τ_x) un e.t. $A \subseteq X$. Decimos que

A es relativamente compacto si $\bar{A}$ es compacto

(relativamente secuencialmente) (secuencialmente compacto)

Si (X, τ_d), $A \subseteq X$, se tienen las siguientes equivalencias.

› A es relativamente compacto
› A es relativamente secuencialmente compacto
› $\bar{A}$ admite la propiedad B-W
› A es precompacto (X, τ_d) es completo.

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado entonces si $\dim(E) < +\infty$

$A \subseteq E$ es relativamente compacto $\Leftrightarrow$ A es acotado

si $\dim(E) = +\infty$

$A \subseteq E$ es relativamente compacto $\Rightarrow$ A es acotado.

Criterios particulares de precompacidad para el curso.

Proposición 0.9. Sea (X, d) un e.m. completo

• $A \subseteq X$ con la siguiente propiedad

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K_\varepsilon \subset X$ compacto) tal que $(\forall x \in A)$ $d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon$

Entonces A es relativamente compacto

Proposición 0.10 Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach $A \subset E$ tq verifica que

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists L_\varepsilon$ s-e-v de dimensión finita) tal que

$\forall x \in A \qquad d(x, L_\varepsilon) < \varepsilon$

si y solo si A es relativamente compacto en $(E, \|\cdot\|_E)$

Metrizabilidad de un espacio compacto.

Proposición 0.11 Sea X no vacío sobre el cual definimos τ_1 y τ_2 tales que verifican que

1) (X, τ_1) es compacto
2) (X, τ_2) es separado
3) $\tau_2 \subseteq \tau_1$

Entonces $\tau_1 \approx \tau_2$

Proposición 0.12. Sea (X, τ_x) un espacio compacto y cosideremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de aplicaciones continuas que separen puntos en X, entonces (X, τ_x) es metrizable

Pág 113
Ver: Apuntes topología

Capítulo 1: Topologías débiles en Espacios de Banach

- Sea $X \neq \emptyset$
- $(Y_i, \tau_i)_{i\in I}$ familia de espacios topológicos
- $(\varphi_i)_{i\in I}$ una familia de aplicaciones tales que

$$\varphi_i : X \to (Y_i, \tau_i)$$

Nuestro interés es proveer una topología sobre X tal que

- La familia $(\varphi_i)_{i\in I}$ sea continua, i.e. $\forall i \in I$ $\varphi_i : (X, \tau_x) \to (Y_i, \tau_i)$ sea continua
- La topología encontrada sea la más pequeña con esta propiedad.

Proposición 1.1. Con las notaciones anteriores, tenemos que $\tau_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ con

$\tau_x = \{$ Uniones arbitrarias de intersecciones finitas de preimagenes de abiertos a partir de elementos de $(\varphi_i)_{i\in I}$ $\}$

$$= \left\{ \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in F_i} \varphi_i^{-1}(B_j) \text{ con } F_i \subseteq I \text{ finito y } B_j \in \tau_j \text{ un abierto} \right\}$$

Así, τ_x es una topología que hace continuas las aplicaciones $(\varphi_i)_{i\in I}$ y es la más pequeña con esta propiedad. Una base para esta topología está dada por

$\beta_x = \{ \bigcap$ finitas de preimágenes de abiertos a partir de elementos de $(\varphi_i)_{i\in I}$ $\}$

$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(B_i) \text{ con } B_i \in \tau_i \right\}$$

Si $x \in X$ entonces una base de vecindades de x para la topología τ_x está escrita como

$$\mathcal{V}(x) = \left\{ v^x \subset X : v^x = \bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(B_j) \text{ con } J \subseteq I \text{ finito. Con } B_j \text{ vecindad de } \varphi_j(x) \text{ en la topología } \tau_j \right\}$$

Por otro lado, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en (X, τ_x) si y solo si para todo $i \in I$ $(\varphi_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi_i(x)$ en (Y_i, τ_i)

Miércoles, 10 de mayo de 2023.

Proposición 1.2. Sea (X, τ_x) un espacio topológico donde τ_x es la topología más pequeña que deja continuas los $\varphi_i : X \to (Y_i, \tau_i)$ y consideremos (Z, τ_Z) otro e.t. y $\Psi : (Z, \tau_Z) \to (X, \tau_x)$. Entonces Ψ es continua si y solo si $\varphi_i \circ \Psi$ es continua de (Z, τ_Z) en (Y_i, τ_i)

Ejemplo: Consideremos $X = \mathcal{C}([0,1])$ y $x \in [0,1]$

$$P_x : X \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f \longmapsto P_x = f(x)$$

Describir la topología más pequeña que hace continuas las aplicaciones $(P_x)_{x\in[0,1]}$

Para $x \in [0,1]$, con $f \in C([0,1])$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\beta_x = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} P_{x_i}^{-1}(v_i) \text{ donde } v_i \in \tau_{|\cdot|} \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \right\}$$

Recordemos que: $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge para la topología τ_X si y solo si para todo $x \in [0,1]$

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{en} \quad (\mathbb{K}, |\cdot|)$$

Ejemplo 2: Topología producto

Sea $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ una familia arbitraria de espacios topológicos. Definamos el espacio producto

$$(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \quad \text{si y solo si} \quad \forall i \in I \quad x_i \in X_i$$

Dado $k \in I$, definimos la proyección

$$P_k : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow (X_k, \tau_k)$$
$$(x_i)_{i\in I} \longmapsto P_k((x_i)_{i\in I}) = x_k$$

una topología sobre $\prod_{i\in I} X_i$ tal que haga continuas las proyecciones $(P_k)_{k\in I}$ y además que sea la más pequeña con esta propiedad.

Ejemplo 3: Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. $C(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \}$ continuas

Se puede mostrar que existe una familia de compactos en $\mathbb{R}^n$ $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ con las siguientes propiedades

a) $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m = \Omega$

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subseteq \operatorname{Int}(K_{n+1})$

c) Todo compacto dentro de Ω está en algún K_m con $m \in \mathbb{N}$.

Definimos para todo $m \in \mathbb{N}$

$$P_m : C(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f \longmapsto P_m(f) = \sup_{x\in K_m} |f(x)|$$

- Muestre que $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una familia de seminormas
- Describir la topología más pequeña en $C(\Omega)$ que hace continua la familia $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$
- Demuestre que dicha topología es metrizable y completa.
- Demostrar que $f_n \longrightarrow f$ en esta topología si y solo si $f_n \longrightarrow f$ converge uniformemente en cualquier compacto de Ω
- Muestre que esta topología no es normalizable.

Parte a) $P_m(f) = \sup_{x \in K_m} |f(x)|$

N1) $P_m(f) = \sup_{x \in K_m} |f(x)| \geq 0$

N2) $P_m(\alpha f) = \sup_{x \in K_m} |\alpha f(x)| = |\alpha| \sup_{x \in K_m} |f(x)| = |\alpha| P_m(f)$

N3) $P_m(f+g) = \sup_{x \in K_m} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x \in K_m} |f(x)| + \sup_{x \in K_m} |g(x)| = P_m(f) + P_m(g)$

N4*) $P_m(0) = \sup_{x \in K_m} |0(x)| = 0$ | $0 = \sup_{x \in K_m} |f(x)| \geq 0$ | Así, P_m es una seminorma para cada $m \in \mathbb{N}$.

Pero f no es nula

Parte b)

La topología más pequeña que deja continua a la familia $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$

$\beta_x = \} \bigcap_{i=1}^{n} P_i^{-1}([0, a_i[)$ con $a_i \in \mathbb{R}^{+*}$ para cada $\{$ $(\mathbb{R}^+, \tau_{|\cdot|})$

Parte c) ↳ Si $f \in C(\Omega)$ $\mathcal{V}(f) = \{ \mathcal{V}_{f,\varepsilon} = \} g \in C(\Omega)$ $\forall j \in J$ $P_{k_j}(f-g) < \varepsilon \{ \}$

Definamos una métrica,

$P_{k_j}(f-g) = \sup_{x \in K_j} |f(x) - g(x)|$

$$d_m(f,g) = P_m(f-g) = \sup_{x \in K_m} |f(x) - g(x)|$$

Como cada K_m es compacto, el supremo existe

$$d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \sup_{x \in K_n} |f(x) - g(x)|$$

$$\hookrightarrow = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \left(\frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \left(\frac{P_n(f-g)}{1 + P_n(f-g)} \right)$$

Mostremos que d es una métrica,

M1) $d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{P_n(f-g)}{1 + P_n(f-g)} \geq 0$ Pues es la suma de términos positivos

M2) $d(f,f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{P_n(f-f)}{1 + P_n(f-f)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot 0 = 0$

M3) $d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{P_n(f-g)}{1 + P_n(f-g)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{P_n(g-f)}{1 + P_n(g-f)} = d(g,f)$

M4) $\cancel{d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{P_n(f-g)}{1 + P_n(f-g)}}$ ← Realizar la propiedad triangular.

Así, d es una métrica sobre Ω, por lo tanto es metrizable

Mostremos que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$P_m : (C(\Omega), d) \longrightarrow \mathbb{K}^+$$
$$f \longmapsto P_m(f) = \sup_{x \in K_m} |f(x)|$$

Queremos probar que la familia $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es continua pues esto implicaría que

$$\tau_x \equiv \tau_d$$

con τ_x la topología débil y τ_d la métrica.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n \to f$, i.e., $d(f_n, f) \to 0$; luego

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \frac{d_m(f_n-f)}{1+d_m(f_n-f)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\iff d_m(f_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Con este razonamiento hemos probado que $\tau_x \subseteq \tau_d$, resta probar que $\tau_d \subseteq \tau_x$

Sea $\mathcal{V}$ una vecindad de $f\in C(\Omega)$, i.e.,

$$\mathcal{V} = B(f,\varepsilon) = \{ h\in C(\Omega) : d(f,h) < \varepsilon \}$$

Sea $g\in \mathcal{V}$, cualquiera. P.D Existe W un abierto de τ_x tal que

$$g \in W \subseteq \mathcal{V}$$

Usando un razonamiento visto anteriormente, notemos que

$$\mathcal{V}_g = \bigcap_{i=1}^{N_s} P_i^{-1}\left(B_{\mathbb{K}}\left(P_i(g), \tfrac{1}{2} N_s \cdot s\right)\right)$$

con $s = \varepsilon - d(f,g)$ con N_s el natural dado por la convergencia de la serie

Viernes 12 de mayo de 2023 (Clase ejercicios)

Ejercicio 1. Sea la sucesión $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\ell^\infty)'$ definida por

$$\delta_n((x_p)_{p\in\mathbb{N}}) = x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostrar que $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee un valor adherente para la topología débil-* pero no posee una subsucesión convergente para dicha topología.

Idea: Teorema de Banach-Alaoglu y contradicción

Primero, notemos que $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $(\ell^\infty)'$

Sea $n\in\mathbb{N}$:

(linealidad) $\delta_n((x_p)_p + \lambda(y_p)_p) = \delta_n((x_p+\lambda y_p)_p) = x_n + \lambda y_n = \delta_n((x_p)_p) + \lambda \delta_n((y_p)_p)$

para cada $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ y $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

(Acotación) $|\delta_n(x_p)_p| = |x_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty}$

Más aún, se sigue que $\|\delta_n\|_{(\ell^\infty)'} \leq 1$, es decir $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B}_{(\ell^\infty)'}$

Así, como $(\overline{B}_{(\ell^\infty)'}, \sigma((\ell^\infty)', \ell^\infty))$ es separado y compacto, toda sucesión admite la propiedad (B-W), i.e., la sucesión admite un valor adherente

Ver Prop 7.25 [5]

Por otro lado, por absurdo, supongamos que $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente a $\delta \in (\ell^\infty)'$ para $\sigma((\ell^\infty)', \ell^\infty)$

Gracias a la caracterización de convergencia débil-* tenemos que

$$(\forall x = (x_p)_p \in \ell^\infty)\ (\delta_{n_k}(x) \to \delta(x))$$

$$\iff (\forall x = (x_p)_p \in \ell^\infty)\ (x_{n_k} \to \delta(x))$$

Esto nos dice que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente

Considerando la sucesión $(x_n)_n$

$$x_n = \begin{cases} 1 & n = nk \quad \text{con } k \text{ par} \\ -1 & n = nk \quad \text{con } k \text{ impar} \\ 0 & n \neq nk \end{cases}$$

Esta sucesión es acotada pero no admite una subsucesión convergente.

Ejercicio 2. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita y
$$\mathcal{U} = \{ x \in E : \|x\| < 1 \} = B_E$$
Mostrar que $\mathcal{U}$ no es abierto para $\sigma(E, E')$

Idea: Por absurdo, contradecir la dimensión de E

Por absurdo, supongamos que $\mathcal{U}$ es abierto para $\sigma(E,E')$, es decir, todos sus puntos son interiores en $\sigma(E,E')$, en particular 0_E es un punto interior.

Así, s.p.g. existe $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{V}(0)$ tal que
$$0 \in \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{U}$$
Por lo tanto, por la forma de la topología débil, podemos suponer que
$$\mathcal{V}_0 = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(B(\varphi_i(0), \varepsilon)) \quad \text{con } \varepsilon > 0 \text{ y } \varphi_i \in E' \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}$$
$$= \{ x \in E : |\varphi_i(x)| < \varepsilon \quad \text{con } i \in \{1, \dots, n\} \}$$
Probemos que existe $y \in E \setminus \{0\}$ tal que
$$y \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \quad \text{i.e.} \quad \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \neq \{0\}.$$

Si no fuera así, para cada $y \in E \setminus \{0\}$ existe $i_y = i \in \{1, \dots, n\}$ tal que
$$y \notin \ker(\varphi_i) \iff \varphi_i(y) \neq 0 \qquad [1]$$
Luego, definamos
$$\Psi : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$y \longmapsto \Psi(y) = (\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y))$$
En primer lugar, Ψ es lineal e inyectiva. En efecto, sea $x \in \ker(\Psi)$
$$x \in \ker(\Psi) \iff \Psi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = (0, \dots, 0)$$
$$\Rightarrow x = 0 \qquad \text{Por } [1]$$
Por lo tanto,
$$\dim(E) \leq \dim(\mathbb{K}^n) = n$$
lo cual es imposible pues la dimensión de E es infinita. Con esto, hemos probado que
$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \neq \{0\}.$$

Consideremos
$$z = 2 \frac{y}{\|y\|}$$

Notemos entonces que $z \in V_0$ gracias a la linealidad de φ_i.
Sin embargo,

$$\|z\| = 2\frac{\|y\|}{\|y\|} = 2 \geq 1$$

$$\therefore z \notin \mathcal{U}$$

Lo cual contradice que $V_0 \subseteq \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U}$ no es abierto para $\sigma(E,E')$

Problema 3. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita

1) Sea $x_0 \in E$ y $\varepsilon > 0$ $f_1, \dots, f_n \in E'$ y
$V = \{ x \in E : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon$ con $i \in \{1, \dots, n\} \}$

a) Muestre que existe $y_0 \in E \setminus \{0\}$ tal que
$$\langle f_i, y_0 \rangle = 0 \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$
(Se sigue el resultado gracias a lo realizado en el problema 2)

$x = \vec{p} + t\vec{A}$

b) Deducir que V contiene una recta que pasa por x_0.
Una recta que pasa por x_0 tiene la forma
$$L := \{ z = x_0 + \alpha y \in E : \alpha \in \mathbb{K} \} \quad \text{con} \quad y \in E$$

Idea: Hallar $y \in E$ tal que $L \subseteq V$

Por el literal anterior, para cada $\alpha \in \mathbb{K}$
$$x_0 + \alpha y_0 \in V$$
pues
$$(\forall i \in \{1, \dots, n\})(|\langle f_i, x_0 + \alpha y_0 - x_0 \rangle| = |\langle f_i, \alpha y_0 \rangle| = 0 < \varepsilon)$$
Así, basta tomar $y = y_0$.

2) Mostrar que toda vecindad de x_0 para la topología débil $\sigma(E,E')$ contiene una recta que pasa por x_0.

Notemos que V es un elemento de la base de vecindades de x_0 para $\sigma(E,E')$, a saber
$$V = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B(f_i(x_0), \varepsilon))$$
por lo hecho anteriormente cualquier vecindad contiene una recta que pasa por x_0.

Problema 4. Sea E un e.v.n. de dimensión finita. Mostrar que la topología débil coincide con la topología fuerte.

Idea. Aprovechar que E' es de dimensión finita de modo que se pueda expresar cualquier elemento de E en términos de la base dual

Sabemos que $\sigma(E,E') \subseteq \sigma(E, \|\cdot\|_E)$. P.D. $\sigma(E, \|\cdot\|_E) \subseteq \sigma(E,E')$
Como E es de dimensión finita, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(e_i)_{i=1}^{n}$ base ortonormal de E

Es decir, para cada $x \in E$, existen únicos $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ tales que
$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$
Ahora, definimos para cada $j \in \{1, \dots, n\}$
$$\begin{aligned} \delta_j : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \delta_j(x) = \alpha_j \end{aligned}$$
Vemos que $\{\delta_j\}_{j=1}^{n}$ está bien definida. Más aún, $(\delta_j)_{j=1}^{n}$ forma una base para E'.

Notemos que podemos escribir
$$x = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x) e_i$$
[i]

Sea $x \in E$ y $r > 0$,
$$\text{P.D.} \quad B(x,r) \in \sigma(E, E')$$
$$\text{P.D} \quad \forall y \in B(x,r) \ \left(\exists V_y \in \mathcal{V}(y) \text{ en } \sigma(E,E') \right) \text{ tal que } \left(V_y \subseteq B(x,r) \right)$$
Sea $y \in B(x,r)$; así,
$$\| x - y \| < r$$
Consideremos lo siguiente
$$V_y = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_{\delta_i}^{-1} \left(B(\delta_i(y), \varepsilon) \right)$$
con $\varepsilon > 0$ por determinar.
$$= \{ x \in E : |\delta_i(x-y)| < \varepsilon \ \text{ con } i \in \{1, \dots, n\} \}.$$
Es decir, dado $z \in V_y$, busquemos un valor de ε tal que
$$z \in B(x,r).$$
Observemos que, si $z \in V_y$
$$\begin{aligned} \| z - x \| &\leq \| z - y \| + \| y - x \| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x-y) e_i \right\| + \| y - x \| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\delta_i(x-y)| + \| x - y \| \end{aligned}$$
Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}(r - \|x-y\|)$, se tiene que
$$\| z - x \| < r,$$
es decir, hemos probado que $V_y \subseteq B(x,r)$ con lo que se sigue el resultado.

Lunes, 15 de mayo de 2023. - Clase 5.

Continuación

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(\Omega)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$d(f_n, f_m) < \varepsilon \qquad \forall n,m \geq N$$

Sea $x \in \Omega$, cualquiera, entonces existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_{n_x}$. Por lo tanto,

$$\frac{|(f_n - f_m)(x)|}{1 + |(f_n - f_m)(x)|} \leq \frac{p_{n_x}(f_n - f_m)}{1 + p_{n_x}(f_n - f_m)} \leq d(f_n, f_m) < \varepsilon$$

de donde, se sigue que

$$|(f_n - f_m)(x)| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq N.$$

Como $\mathbb{K}$ es completo, se sigue que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

con lo que definimos

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

Debemos probar que $f \in C(\Omega)$ y $\lim\limits_{n \to +\infty} d(f_n, f) = 0$

Mostremos que f es continua en cada punto de Ω. Sea $x \in \Omega$, cualquiera, tal que $x_n \to x$.

Como $x \in \Omega$, entonces existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \mathrm{Int}(K_{n_x+1})$, más aún, existe $r_x > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq \mathrm{Int}(K_{n_x+1})$$

Ahora, como $x_n \to x$, existe $n_0^x \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B(x, r) \subset K_{n_x+1} \qquad \forall n \geq n_0^x,$$

es decir $(x_{n_0^x+n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K_{n_x+1}$ y además $x_{n_0^x+n} \to x$. Luego, tomando $k \geq n_x + 1$ se tiene que ...

$$d(f_n, f_m) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad p_j(f_n - f_m) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{x \in K_j} |(f_n - f_m)(x)| < \varepsilon \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{m \to +\infty}{|(f_n - f_m)(x)|} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in K_j \quad |(f_n - f_m)(y)| < \varepsilon$$

Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, tenemos que

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$

$$p_j(f_n - f_m) < \varepsilon \quad n, m \geq \tilde{n}_0 \quad \Rightarrow \quad \underset{m \to +\infty}{\forall x \in K_j} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \tilde{n}_0$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in K_j \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$n \geq \hat{n}_0 \quad p_j(f_n - f) < \varepsilon$$

lo que implica que $(f_n)_n$ converge uniformemente a f en K_j $\forall j \in \mathbb{N}$, así $f|_{K_j}$ es continua.

Con lo que se sigue lo deseado. Resta probar que $d(f_n, f) \to 0$.

• Mostremos que: $f_n \to f$ uniformemente en K_j si y solo si $f_n \to f$ en τ_d

Notemos que para todo $j \in \mathbb{N}$, $f_n \to f$ converge uniformemente en K_j es equivalente a que

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad P_j(f_n - f) \longrightarrow 0$$

Note que $\tau_d \approx \tau_x$ donde τ_x es la topología más pequeña que hace continuas las $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Es decir que, $f_n \to f$ en τ_d si y solo si $f_n \to f$ en τ_x.

Por tanto, por caracterización de la convergencia en τ_x tenemos que

$$f_n \to f \text{ en } \tau_x \text{ si y solo si } \forall j \in \mathbb{N} \quad P_j(f_n - f) \longrightarrow 0$$

y esto se tiene por hipótesis.

• Faltaría mostrar que (X, τ_d) no es normalizable.

Teorema. Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico, entonces (X, τ) es normalizable si y solo si el origen admite una vecindad convexa.

Sección: Topologías débiles en espacios de Banach.

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y notamos $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual.
Nuestro objetivo es dar la topología más pequeña sobre E que deja continuas la familia de aplicaciones $(\varphi_f)_{f\in E'}$ donde

$$f : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

la cual es continua con la topología fuerte.

Proposición 1.3. Con las notaciones anteriores consideramos

$$\sigma(E, E') = \left\{ A = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in F_i} \varphi_{f_j}^{-1}(B_j) \text{ con } I \text{ un conjunto de índices, } F_i \text{ finito} \right\}$$

$$\forall j \in F_i \qquad \varphi_{f_i} : E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \varphi_{f_i}(x) = f_i(x) \qquad \text{con } f_j \in E' \quad \forall j \in F_i$$

con B_j un abierto en $\mathbb{K}$

• Una base para esta topología está dada por

$$\beta_x = \left\{ V = \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(B_j) \text{ con } f_j \in E' \text{ para cada } j \in \{1, \dots, n\} \text{ con } B_j \text{ un abierto en } \mathbb{K} \right\}$$

• Dado $x_0 \in E$ una base de vecindades de x_0 para $\sigma(E, E')$ (topología débil en E) es de la forma

$$\mathcal{V}(x_0) = \left\{ \mathcal{V}_{x_0}^{\varepsilon} = \{ y \in E \text{ tal que } |f_i(x - y)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B(f_i(x), \varepsilon))$$

Además, se tienen las siguientes propiedades.

- $x_n \longrightarrow x$ en $\sigma(E, E')$ si y solo si para todo $f \in E'$:
$$f(x_n) \longrightarrow f(x) \quad \text{en} \quad (\mathbb{K}, |\cdot|)$$
- Si $x_n \rightarrow x$, entonces $x_n \longrightarrow x$
- Si $x_n \longrightarrow x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$
- Si $f_n \longrightarrow f$ en $(E', \sigma(E', \|\cdot\|_{E'}))$ y $x_n \longrightarrow x$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

Ver las demostraciones en cuaderno anterior.

Note que si H es un espacio de Hilbert entonces gracias al teorema de representación de Riesz $(H \approx H')$ se tiene que para $(x_n)_n \subseteq H$ y $x \in H$
$$x_n \longrightarrow x \quad \text{en} \quad \sigma(H, H')$$
si y solo si para todo $y \in H$
$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle_H = \langle x, y\rangle_H \qquad \lim_{n\to+\infty} \langle y, x_n\rangle_H = \langle y, x\rangle_H$$

Martes, 16 de mayo de 2023.

Caracterización de la topología débil en algunos espacios de Banach

Consideramos $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ el espacio de sucesiones en $\mathbb{K}$ tal que $\sum_{n\geq 1} |x_n|^p < +\infty$

Si $p = +\infty$ $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de sucesiones acotadas

Propiedades

- $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ son espacios de Banach
- $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ es separable $p \geq 1$ $p \neq +\infty$

$F_N = \{$ sucesiones a soporte finito $\}$

$\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell \mid$ Existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = 0$ para $k \geq n_x \} = \text{gen}((e_n)_n)$

$\forall x \in \ell^p \quad B(x, r) \cap F_N \neq \emptyset \quad \forall r > 0.$

Dado $r > 0$, existe $n_r \in \mathbb{N}$ tal que
$$\sum_{n=n_r+1}^{+\infty} |x_n|^p \leq (r^p)$$

Tomando $y \in F_n$ tal que
$$y_n = \begin{cases} y_n = x_k & \text{para } k \leq n_r \\ y_n = 0 & \text{para } k > n_r \end{cases}$$

con esto, se tiene que
$$\|y - x\|_{\ell^p}^p = \sum_{n=n_r+1}^{+\infty} |x_k|^p \leq r^p \qquad \|x - y\|_{\ell^p} < r$$
$$\|x - y\|_{\ell^p}^p < r$$

Así, el ℓ^p es separable para $p \geq 1$ con $(p \neq +\infty$.

Considerando, $F_N^{\mathbb{Q}}$ similar al F_N pero con coeficientes racionales.

$c_0 = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim x_n = 0 \}$.

Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en c_0, así para cada $n\in\mathbb{N}$. $(y_n^k)_k$ es una sucesión que converge a 0.

Además, $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, resta probar que $\lim\limits_{k\to+\infty} y^k = 0$.

En efecto, notemos que

$$|y^k| = |y^k - y_n^k + y_n^k| \leq |y^k - y_n^k| + |y_n^k|$$
$$\leq \|y - y_n\| + |y_n^k|$$
$$< \varepsilon$$

Pues $y_n \to y$ Pues $y_n^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Ahora, consideremos $(c, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ el conjunto de las sucesiones convergentes.

Más aún, se tiene que $c_0 \approx c$ pues si consideramos

$$T: c \longrightarrow c_0$$
$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto T(x) = ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} - \hat{x})$$

Es continua.

T no es inyectivo pero sí sobreyectivo. (Se puede cocientar)

Inyección $\rightarrow$ $I: c_0 \to c$

Ahora, recordemos las inclusiones

$$(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p}) \subseteq (\ell^q, \|\cdot\|_{\ell^q}) \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$$

Dualidad

$$\varphi: \ell^p \to (\ell^p)'$$
$$x \mapsto \varphi(x) = \Psi_x : \ell^p \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$y \longmapsto \Psi_x(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \bar{y}_n$$

$\|\varphi(x)\|_{(\ell^p)'} = \|x\|_{\ell^{p'}}$ es una isometría por tanto inyectiva y sobreyectiva.

Miércoles, 17 de mayo de 2023.

P.D. φ es sobreyectiva.

Sea $f\in(\ell^p)'$. Mostremos que existe $x\in\ell^{p'}$ tal que $f = \varphi_x$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\|f\|_{(\ell^p)'} = 1$. Mostremos que $(f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ está en $\ell^{p'}$, notando $x = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$

Bastaría mostrar que para todo $\tilde{n}\in\mathbb{N}$

$$\left(\sum_{n=1}^{\tilde{n}} |\varphi(e_n)|^p\right)^{1/p} = 1$$

Mostremos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\tilde{n}} |y_n|^{p'}\right)^{1/p'} = \sup_{(x_1,\dots,x_{\tilde{n}})} x_1 y_1 + \dots + x_{\tilde{n}} y_{\tilde{n}} = (|y_1|$$

Notemos que

$$(x_1^p + \dots x_n^p) \leq 1 \quad , \text{ luego } \quad x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right)^{1/p'}$$

$$\Rightarrow \sup_{(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} \leq 1} x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right)^{1/p'}$$

Notemos que

$$x_i = \frac{\operatorname{sgn}(y_i) \, |y_i|^{\frac{p'}{p}}}{\left(|y_1|^{p'} + \dots + |y_n|^{p'}\right)^{1-\frac{1}{p'}}}$$

$$\left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p} = 1 \quad \text{y además} \quad x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^{p'}\right)^{1/p'}$$

Por lo tanto,

$$\left(\sum_{i=1}^{N} (|y_i|^{p'}\right)^{1/p'} = \sup_{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

y así

$$\|\varphi\| = 1 = \sup_{\substack{x \in \ell^p \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| \geq f\left(\sum_{i=1}^{N} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \quad \text{donde} \quad \left(|x_1|^p + \dots + |x_N|^p\right)^{1/p} \leq 1$$

con lo que

$$1 \geq \sup_{(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} \leq 1} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right)^{1/p'}$$

Mostremos que $f = \varphi_x$, con $x = (f(e_n)_{n \in \mathbb{N}})$

$\forall y \in \ell^p \quad f(y) = \varphi_x(y)$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \overline{f(e_i)}\, y_i = f\left(\sum_{i=1}^{+\infty} e_i y_i\right) = f(y)$$

——— o ———

Con esto se tiene que

$$(\ell^\infty)' \not\approx \ell^1 \qquad \ell^1 \subseteq (\ell^\infty)' \qquad (c_0)' \approx \ell^1$$

Ahora, consideremos $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en (ℓ^p) y $x \in \ell^p$

Se tiene que $x^n \rightharpoonup x$ si y solo si para todo $y \in \ell^{p'}$

$$\langle y, x^n \rangle_{\ell^{p'} \times \ell^p} \longrightarrow \langle y, x \rangle_{\ell^{p'} \times \ell^p}$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$P_k : \ell^p \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto P_k(x) = x_k$$

Con esto $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\ell^p)' \approx \ell^{p'}$

Podemos dar la topología más pequeña que deja continuas las aplicaciones $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$\tau_e \subseteq \sigma(\ell^p, \ell^{p'})$$

Así,

$x^n \to$ en (ℓ^p, τ_e) si y solo si para todo $k \in \mathbb{N}$ $\quad p_k(x^n) = x_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k$

Con lo que se tiene que

$$x^n \xrightarrow{\tau_e} \Leftarrow x^n \rightharpoonup x$$

Muestre que $x^n \xrightarrow{\tau_e} x \Rightarrow x^n \rightharpoonup x$

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\| < +\infty$

P.D. $x^n \rightharpoonup x$, i.e. Para todo $f \in (\ell^p)'$ $\quad f(x^n) \longrightarrow f(x)$, por caracterización existe $z \in \ell^{p'}$ tal que (en $\mathbb{K}$)

$$f(x^n) = \langle z, x^n\rangle \longrightarrow \langle z, x\rangle = f(x)$$

Luego, notemos que

$$\langle z, x^n\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} z_k x_k^n \qquad y \qquad \langle z, x\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} z_k x_k$$

Así, notemos (en $\mathbb{K}$)

$$\left|\langle z, x^n\rangle - \langle z, x\rangle\right| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} z_k x_k^n - \sum_{k=1}^{+\infty} z_k x_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty}\left[z_k x_k^n - z_k x_k\right]\right| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} z_k (x_k^n - x_k)\right|$$

$$\Rightarrow \left|\langle z, x^n\rangle - \langle z, x\rangle\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{+\infty} z_k (x_k^n - x_k)\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} |z_k (x_k^n - x_k)|$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |z_k|^q\right)^{1/q}}_{<+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^n - x_k|^p\right)^{1/p} \qquad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$< K \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^n - x_k|^p\right)^{1/p}$$

Tomando el límite, cuando $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} |\langle z, x^n\rangle - \langle z, x\rangle| < \lim_{n\to+\infty} \cancel{\|x^n - x\|} \leftarrow \text{convergencia fuerte}$$

Sabemos que si $y \in \text{span}(e_n)$, entonces

$$\langle x^n, y\rangle \longrightarrow 0$$

Como $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en $\ell^{p'}$ con $p \neq +\infty$, entonces existe $\tilde{y} \in \text{span}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})$ tal que

$$\|y - \tilde{y}_n\|_{\ell^{p'}} < \frac{1}{n}$$

Con esto, tenemos que

$$|\langle x^n, y\rangle| = |\langle x^n, y + \tilde{y} - \tilde{y}_n\rangle| \leq |\langle x^n, \tilde{y}_n\rangle| + |\langle x^n, y - \tilde{y}_n\rangle|$$

$$\leq |\langle x^n, \tilde{y}_n\rangle| + \|x^n\|_{\ell^p} \|y - \tilde{y}_n\|_{\ell^{p'}}$$

$$\leq |\langle x^n, \tilde{y}_n\rangle| + \frac{M}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Por tanto, $x^n \to 0$ $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$. Consideremos la sucesión con término general $x^n = n e_n$, así $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$

$P_k(x_n) = n e_n^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en $\sigma(\ell^p, \tau e)$

Pero no en $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$

Consideremos ℓ^p, $p>1$ con $p \neq +\infty$. Así, $e_n \to 0$ en $\sigma(\ell^p, (\ell^p)')$

- En c_0 $e_n \to 0$ en $(c_0, \sigma(c_0, \ell^1))$
- En $p=1$ $e_n \to 0$ en $(\ell^1, \sigma(\ell^1, \ell^\infty))$

$\langle e_n, x_n\rangle = x_n$ No converge a cero.

$(x_n)_n \in \ell^\infty$

- $p = +\infty$

$e_n \to 0$? $(\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, (\ell^\infty)'))$

Sea $f \in (\ell^\infty)'$, cualquiera.

P.D. $f(e_n) \to 0$.

Supongamos que $f(e_n) \to 0$, así,

Utilizando el T-HB forma analítica

$$f : (c, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto f(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n = \tilde{x}$$

Donde f es lineal y acotada y además, $\|f\| \leq 1$

Utilizando H-B, existe $\hat{f} \in (\ell^\infty)'$ tal que

$$\hat{f}|_c = f \qquad \|\tilde{f}\|_{(\ell^\infty)'} = \|f\|_{(c)'} \neq 0$$

Supongamos que existe $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ tal que

$$\varphi_y = \hat{f}$$

Mostremos que $y = 0_{\ell^1}$. Lo cual sería absurdo.

$$\hat{f}|_{c_0} = f = 0$$

Como suponemos que $\varphi_y(x) = \hat{f}(x) = x \in \ell^1$. En particular $x = e_n$

$$\varphi_y(e_n) = y_n = f(e_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Clase 8 : viernes 19 de mayo de 2023.

Ejercicio. Sea E un espacio de Banach complejo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E.

1.1) Supongamos que

$$(\forall f \in E')\ (\langle f, x_n\rangle)_n \text{ es una sucesión de cauchy}$$

Mostrar que esta sucesión es acotada.

Idea: Usar el principio de acotación uniforme

Para cada $f \in E'$, por hipótesis la sucesión $(\langle f, x_n \rangle)_n$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ y por lo tanto convergente y por lo tanto acotada.

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la siguiente función

$$\varphi_n : E' \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longmapsto \varphi_n(f) = \langle f, x_n \rangle$$

Mostremos que $\varphi_n \in \mathcal{L}(E', \mathbb{C}) = E''$.

Así, claramente φ_n es lineal y acotada por construcción, en efecto,

$$|\varphi_n(f)| = |\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\|_{E'} \underbrace{\|x_n\|_E}_{\leq \|\varphi_n\|}$$

$\therefore \varphi_n \in E''$ para cada $n \in \mathbb{N}$

Gracias a que la sucesión $(\langle f, x_n \rangle)_n$ está acotada, entonces

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(f)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, x_n \rangle| < +\infty.$$

Así, por el principio de acotación uniforme

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\| < +\infty$$

$$\iff \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|f\| \leq 1} |\varphi_n(f)| < +\infty$$

Finalmente, por el teorema de Hanh-Banach forma topológica

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |f(x_n)| = \|x_n\|_E$$

Así,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_E < +\infty \iff \text{La sucesión está acotada}$$

Supongamos que existe una subsucesión $(x_{n_p})_p$ de $(x_n)_n$ en E y $y \in E$ tal que

$$x_{n_p} \longrightarrow y \quad \rightarrow \text{la sucesión está acotada}$$

$$\|y\| \leq \liminf \|x_{n_p}\|$$

Mostrar que $x_n \longrightarrow y$.

P.D. $\forall f \in E'$ $\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, y \rangle$.

Por hipótesis sabemos que $\langle f, x_{n_p} \rangle \longrightarrow \langle f, y \rangle$, i.e., para todo $f \in E'$

Sea $f \in E'$ cualquiera, entonces, por el primer literal

$$(\langle f, x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es de Cauchy}$$

Por lo tanto, $(\langle f, x_{n_p} \rangle)_p$ es convergente a $\langle f, y \rangle$. Así, $\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, y \rangle$.

1.2. Sea E un espacio reflexivo

Mostrar que toda sucesión acotada admite una subsucesión convergente para $\sigma(E,E')$

Use: $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach reflexivo y separable $\Rightarrow$ $(\overline{B}_E, \sigma(E,E'))$ es compacta y metrizable.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada, por lo tanto, consideremos

$$\tilde{x}_n = \frac{x_n}{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|}$$

por lo tanto, $(\tilde{x}_n)_n \subseteq \overline{B}$ y además $\overline{B}$ es compacta. Por lo tanto, admite la propiedad B-W, i.e., admite un punto de adherencia.

Si la bola fuera metrizable el resultado es directo.

Consideremos el siguiente conjunto

$$H_0 = \text{span}\{x_n\} \quad \text{y} \quad H = \overline{H_0}$$

Como H es cerrado, entonces H es reflexivo. Además, como

$$\text{span}_{\mathbb{Q}}(\{x_n\})$$

es denso y numerable en H_0; así H es separable y reflexivo.

Por lo tanto, se tiene que

$$(\overline{B}_H, \sigma(H,H'))$$

es compacta y metrizable; i.e es secuencialmente compacta.

Como $(x_n)_n$ es una sucesión en $\overline{B}_H$, posee una sucesión convergente para $\sigma(H,H')$ y así puesto que

$$\sigma(H,H') \approx \sigma(E,E')$$

se sigue que $(x_n)_n$ admite una subsucesión convergente para $\sigma(E,E')$.

Ejercicio 2. Propiedad de Banach-Saks

Sea H un espacio de Hilbert complejo, $(x_n)_n$ una sucesión en H que converge débilmente a 0.

Mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que las medias de Cesaro convergen fuertemente a 0.

2.1. Mostrar que existe una subsucesión $(y_j)_j$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$(\forall j,k\in\mathbb{N}) \; (j>k \Rightarrow |\langle y_j, y_k\rangle| \leq 1/j)$$

Idea: Utilizar la caracterización de convergencia débil.

Las medias de Cesaro son las medias aritméticas de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

P.D. $y_n \longrightarrow 0$ con $y_n = x_{n_k}$, i.e una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Por hipótesis $x_n \longrightarrow 0$, i.e, $\forall f\in H'$ $f(x_n) \longrightarrow 0$.

Como H es de Hilbert,

$$(\forall y\in H)(\langle y, x_n\rangle \longrightarrow 0 \text{ en } \mathbb{C})$$

Sea $n_1 := 1$, por lo anterior

$$\langle x_n, x_{n_1}\rangle \longrightarrow 0$$

así, existe $n_2 > n_1$ tal que

$$|\langle x_{n_2}, x_{n_1}\rangle| \leq \frac{1}{2}$$

Puesto que $\langle x_{n_2}, x_{n_1}\rangle \to 0$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle x_n, x_{n_2}\rangle| \leq \frac{1}{3} \qquad \forall n \geq m_1$$

Además, como $\langle x_n, x_{n_1}\rangle \longrightarrow 0$, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle x_n, x_{n_2}\rangle| \leq \frac{1}{3} \qquad \forall n \geq m_2$$

Tomamos $n_3 = \max\{m_1, m_2, n_2\} + 1$; así

$$|\langle x_n, x_{n_k}\rangle| \leq \frac{1}{3} \qquad \forall k = 1, 2, \ldots$$

Por inducción tenemos que para cada $j\in\mathbb{N}$, como

$$\langle x_n, x_{n_k}\rangle \longrightarrow 0 \qquad \forall k = 1, \ldots, j-1$$

existe $m_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle x_n, x_{n_k}\rangle| \leq \frac{1}{j} \qquad \forall n \geq m_k$$

de donde tomamos $n_j = \max\{m_1, \ldots, m_{j-1}, n_{j-1}\}$ y así

$$|\langle x_{n_j}, x_{n_k}\rangle| \leq \frac{1}{j} \qquad k = 1, \ldots, j-1$$

Por lo tanto, basta tomar la sucesión con $(y_j)_j$ con $y_j = x_{n_j}$

Mostrar que

$$\left\| \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \right\|^2 \leq \frac{C^2 + 2}{n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Idea. Usar el hecho de que $\|\cdot\|^2 = \langle\cdot,\cdot\rangle$ y el literal anterior.

$$\left\| \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \right\|^2 = \left\langle \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}, \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \right\rangle \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$= \frac{1}{n^2}\langle y_1 + \cdots + y_n, y_1 + \cdots + y_n\rangle$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\langle y_1, y_1\rangle + \langle y_1, y_2\rangle + \cdots + \langle y_1, y_n\rangle + \cdots + \langle y_n, y_n\rangle \right)$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + 2 \right.$$

Notemos que $(y_j)_j$ también converge débilmente pues es una subsucesión y así está acotada.

$$C = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|y_j\| < +\infty$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, definamos

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j ,$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\|V_n\|^2 = \langle V_n, V_n\rangle &= \left\langle \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} y_i , \frac{1}{n}\sum_{j}^{n} y_j \right\rangle \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|y_j\|^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}}^{n}\langle y_i, y_j\rangle\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|y_j\|^2 + 2\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}}^{n}\mathrm{Re}(\langle y_i, y_j\rangle)\right) \\
&\leq \frac{1}{n^2}\left(C^2 n + 2\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}}|\langle y_i, y_j\rangle|\right) \\
&\leq \frac{1}{n^2}\left(C^2 n + 2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right) \\
&\leq \frac{1}{n^2}\left(C^2 n + 2n\right) \\
&= \frac{1}{n}(C^2+2)
\end{aligned}$$

En conclusión, $V_n \to 0$ en $\|\cdot\|_H$, es decir, V_n converge fuertemente a cero.

Ejercicio Sea $(x^n)_n$ una sucesión en $\ell^1(\mathbb{K})$ y $x\in\ell^1(\mathbb{K})$.
Probar que $x^n \xrightarrow{\omega} x$ $\Rightarrow$ $(x^n)_n$ está acotada, y
$(\forall k\in\mathbb{N})\ \left(\Pi_k(x^n) \to \Pi_k(x) \text{ en } \mathbb{K}\right)$

convergencia débil.

$(c_0)' = \ell^1$

Lunes, 22 de mayo de 2023.

Proposición 1.4. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach de dimensión infinita y consideremos $A\subseteq E$ convexo. Entonces

$$\overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)} = \overline{A}^{\sigma(E,E')}$$

En particular, la bola cerrada es convexo. Así,

$$B \text{ es cerrada en } \sigma(E,E') \Leftrightarrow B \text{ es cerrada en } \sigma(E,\|\cdot\|_E)$$

Sabemos que $\overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)} \subseteq \overline{A}^{\sigma(E,E')}$. Por lo tanto,

$$\overline{A}^{\sigma(E,E')} \subseteq \overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)} \iff \left(\overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)}\right)^c \subseteq \left(\overline{A}^{\sigma(E,E')}\right)^c$$

Sea $x\notin\overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)}$, mostremos que existe $\mathcal{V}_x\in\mathcal{V}(x)$ tal que

$$\mathcal{V}_x\cap A = \emptyset$$

Como $x\notin\overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)}$ utilizando T-H-B 2da forma geométrica existe $f\in E'$ que separa en

Es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Re}(f(x)) < \alpha < \mathrm{Re}(f(y)) \qquad \forall y \in A$$

Tomando

$$\mathcal{V}_x = \{ y \in E : |\langle f, x-y \rangle| < \alpha - \mathrm{Re}(f(x)) \}$$

Entonces $\mathcal{V}_x \in \sigma(E,E')$, $x \in \mathcal{V}_x$ tales que

$$\mathcal{V}_x \cap A = \emptyset$$

por lo tanto, $x \notin (\overline{A}^{\sigma(E,E')})$

Proposición 1.5 Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach de dimensión infinita

a) $S_E = \{ y \in E : \|y\| = 1 \}$ no es cerrada en $\sigma(E,E')$

b) $B_E = \{ y \in E : \|y\| < 1 \}$ no es abierta

c) Toda vecindad de cero en $\sigma(E,E')$ contiene un s-e-v de al menos una dimensión

d) Toda vecindad de un elemento de E en $\sigma(E,E')$ contiene un s-e-v afín de al menos una dimensión

Propiedad. Sea $T : (Y, \|\cdot\|_Y) \to (E, \sigma(E,E'))$, entonces T es continuo si para todo $f \in E'$

$$f \circ T : (Y, \|\cdot\|_Y) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$$

es continua.

Proposición 1.6. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach, las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ continua

b) $T : (E, \sigma(E,E')) \to (F, \sigma(F,F'))$ es continua

c) $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \sigma(F,F'))$ es continua.

Proposición 1.7 Si $T : (E, \sigma(E,E')) \to (F, \|\cdot\|_F)$ es continua y su imagen es de dimensión finita, entonces

$$T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$$

es continua.

Proposición Si $T : (E, \sigma(E,E')) \to (F, \|\cdot\|_F)$ continua entonces $\dim(T) < +\infty$.

Mostremos que $(\mathrm{Img}\, T, \sigma(F, \|\cdot\|_F)) \simeq (\mathrm{Img}(T), \sigma(F,F'))$ entonces $\dim(\mathrm{Img}\, T) < +\infty$.

Martes, 23 de mayo de 2023.

Como T es continua, existe $\mathcal{V}_0^\varepsilon \in \sigma(E,E')$ tal que si $x \in \mathcal{V}_0^\varepsilon$, entonces

$$\|Tx\|_F < \varepsilon$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\mathcal{V}_0^\varepsilon = \{ x \in E : \forall i \in \{1,\dots,n\} \ |f_i(x)| < \delta \}.$$

Así, $H = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i)$, luego sabemos que $H \neq \{0\}$ con H s.e.v.

Note que si $x \in H$, entonces $Tx = 0$.

Mostremos que H es de codimensión finita i.e $\dim(E/H) < +\infty$.

$$\vec{F} : E/_H \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$[x] \longmapsto \vec{F}[x] = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

Note que esta función está bien definida (invariante por el representante) $\vec{F}$ es lineal e inyectiva. Así $\dim(E/H) < n$, i.e., H es de codimensión finita.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\operatorname{codim}(H) = n$, así H admite un suplementario topológico, digamos F tal que $\dim(F) = n$ tal que

$$E = F \oplus H$$

donde $\operatorname{Img}(T) = T(F)$, y por lo tanto $\dim(\operatorname{Img}(T)) = n$.

Notemos que $x = x_F + x_H$, luego $T(x) = T(x_F) + \cancel{T(x_H)}^{0} = T(x_F)$

Sección: Topología débil $*$ en E'

El objetivo de la topología débil $*$ es obtener una topología más pequeña que nos permita tener la compacidad de la bola cerrada.

Definición 1.9 -Inyección canónica-
Sea E un espacio de Banach y $(E'', \|\cdot\|_{E''})$ su bidual. Definamos la inyección canónica como

$$J : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (E'', \|\cdot\|_{E''})$$
$$x \longmapsto J(x) = J_x$$

donde

$$J_x : E' \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f \longmapsto J_x(f) = f(x) = \langle J_x, f \rangle_{E'' \times E'} = \langle f, x \rangle_{E' \times E}$$

Algunas propiedades

- J es una inyección lineal $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$ continua.

Definición 1.10 Sobre E' llamaremos la topología débil $*$ la topología más pequeña que hace continuas las aplicaciones $(J_x)_{x \in E}$

Observación:

1) Una base para $\sigma(E', E)$ está dada por
$$\beta = \{ \mathcal{V} = \bigcap_{i=1}^{n} J_{x_i}^{-1}(W_i) \text{ con } W_i \text{ un abierto en } \mathbb{K} \text{ y } x_i \in I \text{ con } I \text{ finito} \}$$

2) Una base de vecindades de $\varphi_0 \in E'$ está dada por
$$\mathcal{V}(f) = \{ \Psi \in E' : |\langle \varphi_0 - \Psi, x_i \rangle_{E' \times E}| < \epsilon \text{ con } x_i \in I \text{ finito} \}$$

3) Notemos que
$$\sigma(E', E) \subseteq \sigma(E', E'') \subseteq \sigma(E, \|\cdot\|_E)$$

4) La topología $\sigma(E', E)$ es de Hausdorff

5) Note que en $\sigma(E',E)$ no se tiene que

$$\xi : (E', \sigma(E',E)) \longrightarrow \mathbb{K}$$

sea continuo. (Este resultado sí es cierto cuando $\sigma(E, \|\cdot\|_E)$ y $\sigma(E', E''))$

Proposición 1.11. Propiedades de convergencia en $\sigma(E',E)$ [Ver en los apuntes anteriores 1.13]

$E = c_0$, $E' = \ell^1$, $E'' = \ell^\infty$ $\quad \sigma(E, \|\cdot\|_E)$, $\sigma(E,E') = \sigma(c_0, \ell^1)$ $\quad \overset{*}{\sigma}(E',E) = \sigma(\ell^1, \ell^\infty)$

Ejercicio. Sea $\xi \in E''$ tal que

$$\xi : (E', \sigma(E',E)) \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{es continua.}$$

Muestre que existe x_ε tal que $\xi = J_x$

Supongamos que $\xi : (E', \sigma(E',E))$ es continua, en particular en 0_E. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{Si } \Psi \in \mathcal{V}^\varepsilon_{0_{E'}} \Rightarrow |\langle \xi, \Psi \rangle| < 1$$

$$\mathcal{V}^\varepsilon_{0_{E'}} = \{ \Psi \in E' : \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |\langle \Psi, x_i \rangle| < \varepsilon \}$$

Con esto

$$\{0_{E'}\} \neq \bigcap_{i=1}^n \ker J x_i \subset \mathcal{V}^\varepsilon_{0_E}$$

lo que implica que

$$\forall \Psi \in \bigcap_{i=1}^n \ker(J x_i) \Rightarrow \langle \xi, \Psi \rangle_{E'' \times E'} = 0$$

Con esto definamos

$$\vec{F} : E' \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$$

$$\Psi \longmapsto \vec{F}(\Psi) = (\langle \xi, \Psi \rangle, \langle \Psi, x_1 \rangle, \dots, \langle \Psi, x_n \rangle)$$

como $(1, 0, \dots, 0) \notin \operatorname{Img}(\vec{F})$ usando Hanh-Banach existen $(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tal que

$$\operatorname{Re}(\lambda) < \alpha < \operatorname{Re}\left(\lambda \langle \xi, \Psi \rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \Psi, x_i \rangle\right)$$

Así, se prueba que

$$\langle \xi, \Psi \rangle = \left\langle \Psi, -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\rangle$$

tomando $x_\varepsilon = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$

Ejercicio 2. Sea H un hiperplano cerrado en $\sigma(E',E)$ en E'

Miércoles 24 de mayo de 2023.

Teorema 1.12. Banach-Alaoglu-Bourbaki: La bola cerrada unitaria

$$B_{E'} = \{ f \in E' : \|f\| \leq 1 \}.$$

Revisar apuntes del curso anterior.

$$\Psi : \left(\overline{B}_{E'}, \sigma(E',E)\right) \longrightarrow \Big(\underbrace{\prod_{x\in E} [-1,1]^{x}, \prod_{x\in E} \mathcal{T}_{1.1^x}}_{\text{Espacio topológico compacto.}}\Big)$$

$\|f\|_{E} \leq 1$ $\qquad f \longmapsto (f(x))_{x\in E}$

$f \in E'$

Lunes, 29 de mayo de 2023.

Sea.

Ejercicios. Sea $\varphi \in D^{\infty}(\mathbb{R})$

Muestre que

- $u_n(x) = \varphi(x-n)$ converge débilmente $L^2(\mathbb{R})$ y que no es fuertemente continua
- $u_n(x) = \sqrt{n}\,\varphi(nx)$ converge débilmente en $L^2(\mathbb{R})$ y que no converge fuertemente

Notaciones. $D^{\infty}(\mathbb{R}) = \{$ Espacio de funciones $C^{\infty}(\mathbb{R})$ a soporte compacto $\}$

donde

$$\operatorname{sopp}(f) = \overline{\{ x \in \mathbb{R}^{(\Omega)} : f(x) \neq 0 \}}^{\text{abierto}}$$

Existe $K \subseteq \mathbb{R}(\Omega)$ compacto tal que $f=0$ en K^c

$$D^{\infty}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx < +\infty \right\}$$

Si $f \in D^{\infty}(\mathbb{R})$ (funciones test) Entonces. $f \in L^p(\mathbb{R})$ $p \in [1,+\infty]$

luego

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p = \int_{\operatorname{sopp}(f)} |f|^p \leq \sup_{x\in \operatorname{sopp}(f)} |f(x)|^p \int_{\operatorname{sopp}} dx \leq \|f\|_{L^\infty} |\operatorname{sopp}(f)|$$

Si $f \in D^{\infty}(\Omega)$ $\qquad \operatorname{sopp}(\partial_{x_i} f) \subset \operatorname{sop}(f)$

Sabemos que

$$\overline{D^{\infty}(\Omega)}^{L^p} = L^p$$ con Ω un abierto en $\mathbb{R}$, $p \in [1,+\infty[$

Las funciones test no son densas en $L^{\infty}(\Omega)$

Propiedades sobre los espacios L^p

Espacio dual

$(L^p(\Omega))' \simeq L^{p'}(\Omega)$ con $p \in [1,+\infty[$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

- $L^p(\Omega)$ es reflexivo $p \in]1,+\infty[$
- $L^p(\Omega)$ es separable $p \in [1,+\infty[$

Desigualdad de Hölder

Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $g \in L^q(\mathbb{R})$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces

$$\int_\Omega f\cdot g \, dx < +\infty \Rightarrow \int_\Omega |fg| \, dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Inclusiones

Si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ y $|\Omega| < +\infty$

$$L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$$

Si $|\Omega| = +\infty$, no se tiene ninguna relación entre los espacios.

Demostración

$$\int |f|^p = \int |f|^p \mathbb{1}(\Omega) \leq \left(\int |f|^{p\cdot \hat{q}}\right)^{\frac{1}{\hat{q}}} \underbrace{\left(\int |\mathbb{1}(\Omega)|^{\hat{q}'}\right)^{\frac{1}{\hat{q}'}}}_{<+\infty}$$

Acotado pues la medida del conjunto lo es.

donde necesitamos que $q = p\cdot\hat{q}$, entonces $\hat{q} = q/p$, con esto

$p\cdot \hat{q} = q \quad \wedge \quad \frac{1}{\hat{q}} = \frac{1}{q} \Rightarrow q = \hat{q}$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r} = 1+\frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{r} = 1+\frac{1}{q}+\frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{qp+p+q}{qp}$$

Continuación ejercicio.

P.D $u_n \rightharpoonup 0$ pero $u_n \not\to 0$.

Para que $u_n \not\to 0$, entonces $\|u_n\| \not\to 0$, es decir, $\|u_n\| \neq 0$ para todo n

Revisar ejercicio en el deber 01 2022B y 2023-A.

P.D $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle u_n, g\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega u_n(x) g(x)\, dx$

Probamos primero que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x-n) h(x)\, dx \qquad \text{con} \qquad h \in D^\infty(\mathbb{R})$$

Así, si consideramos $\underbrace{\text{sopp}(f\varphi)}_{\text{compacto}} \subseteq \text{sopp}(f) \cap \text{sopp}(\varphi) = K$,

Luego podemos encontrar $\hat{n} \in \mathbb{N}$ tal que $x+n \notin \text{sopp}(f\varphi)$ con $n \geq \hat{n}$

$$\|u_n(\cancel{x})\|^2 = \left(\int |\sqrt{n}\,\varphi(nx)|^2 dx\right) \quad \left(\int |\sqrt{n}\,\varphi(z)|^2 \frac{dz}{n}\right) = \|\varphi\|_{L^2} \qquad \begin{array}{l} z = nx \\ dz = n\,dx \end{array}$$

Ejercicio. Sea $E = \ell^\infty$ y

$$C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : \liminf u_n \geq 0\}$$

Muestre que C es un convexo fuertemente cerrado pero no es cerrado en la topología débil *

Notemos que C es convexo pues si $(u_n)_n$ y $(w_n)_n \in C$, entonces

$$\liminf u_n \geq 0 \quad \text{y} \quad \liminf w_n \geq 0 \Rightarrow \liminf \lambda u_n \geq 0 \text{ y } \liminf (1-\lambda) w_n \geq 0$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\liminf \lambda(u_n) + \liminf (1-\lambda) w_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \liminf [\lambda u_n + (1-\lambda) w_n] \geq 0$$

Así, C es convexo.

Es cerrado (se puede probar ~~fácilmente~~ por sucesiones)

Sea $(u^m)_m$ en C tal que $u^m \to u$. P.D. $u \in C$

$u = (u_1, u_2, \ldots)$ $\quad u^m = (u_1^m, u_2^m, \ldots)$ $\quad$ P.D. $\liminf\limits_{n \to +\infty} u_n \geq 0$.

$$u_n = \lim_{m \to +\infty} u_n^m, \quad \text{pero} \quad \liminf_{n \to +\infty} u_n^m \geq 0, \text{ más aún } u_n^m \geq 0 \ \forall n, m \in \mathbb{N}$$

luego

$$u_n = \lim_{m \to +\infty} u_n^m \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\liminf_{n \to +\infty} u_n \geq \liminf \lim_{m \to +\infty} u_n^m \geq 0.$$

← Esto no es cierto salvo en el caso del valor absoluto

$\cancel{\liminf\limits_{n \to +\infty} |x_n|} \geq 0$

$\liminf\limits_{n \to +\infty} |x_n| \leq |x_n|$

Mostremos que no es débilmente cerrado, i.e.

$$\overline{C}^{\sigma(\ell^\infty, \ell^1)} \neq C$$

Martes, 30 de mayo de 2023.

$x^n = x$ en $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \liminf\limits_{k \to +\infty} x_k^n \geq 0$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim\limits_{n \to +\infty} x_k^n = x_k$ $\qquad$ Utilizando

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad |x_k^n - x_k| < \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon \leq x_k^n - x_k \leq \varepsilon$

Otra idea,

$$x_k = x_k - x_k^n + x_k^n \geq -\varepsilon + x_k^n$$

Mostremos que C no es cerrado en $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$

P.D. $-\mathbb{1} = (-1, -1, -1, \ldots) \in \overline{C}^{\sigma(\ell^\infty, \ell^1)}$, luego

Base de Schauder

$$V_{\mathbb{1}}^\varepsilon \cap C \neq \emptyset$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$V_{\mathbb{1}}^\varepsilon = \{ y \in \ell^\infty : \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ |\langle y - \mathbb{1}, e_i \rangle| < \varepsilon \}$$

luego, reemplazando

$V_{\mathbb{1}}^\varepsilon = \{ y \in \ell^\infty : \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ |y_i - 1| < \varepsilon \}$ donde $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

definiendo,

$$y = (y_k)_k = \begin{cases} y_k = 1 & \text{si } k \in \{1, \ldots, n\} \\ y_k = 0 & \text{si } k \notin \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

Con esto se tiene que

$$-\mathbb{1} \in \overline{C}^{\sigma(\ell^\infty, \ell^1)} \qquad -\mathbb{1} \notin \overline{C}^{\sigma(\ell^\infty, (\ell^\infty)')} = \overline{C}^{\sigma(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)}$$

Ahora mostremos por qué las vecindades son de esa forma

$$\mathcal{V}_x^\varepsilon = \{ \tilde{x} \in \ell^\infty : |\langle \tilde{x} - x, \underset{\in \ell^1}{y_1} \rangle| < \varepsilon \} \quad \leftarrow \text{Vecindad con un solo elemento}$$

Como $y_1 \in \ell^1$, entonces

$$y = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i e_i .$$

Por otro lado, inicialmente tenemos que

$$|\langle \bar{x} - x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{+\infty} (\bar{x}_i - x_i) y_i \right| \leq \underbrace{\|\bar{x} - x\|_{\ell^\infty}}_{\in \ell^\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|$$

Como $\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i| < +\infty$, entonces la cola de la sucesión converge a cero. Con esto, para $\hat{\varepsilon} > 0$, se tiene que existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=N_\varepsilon}^{+\infty} |y_i| < \hat{\varepsilon}$$

Luego, con este argumento se sigue que

$$|\langle \bar{x} - x, e_i \rangle| < \hat{\varepsilon}$$

Ejercicio. Consideremos p distinto de $+\infty$ y

$$F = \{ x = e_n + n e_m : n \in \mathbb{N} \text{ y } m \in \mathbb{N} \}$$

Muestre que $0 \notin [F]^{\sigma(\ell^p, \ell^{p'})}$ y $0 \in [[F]]^{\sigma(\ell^p, \ell^{p'})}$

Convergencia débil

Recordemos que

$$[F]^{\sigma(\ell^p, \ell^{p'})} \subseteq \left[[F]^{\sigma(\ell^p, \ell^{p'})} \right]^{\sigma(\ell^p, \ell^{p'})}$$

Se tiene la igualdad cuando el espacio es I-Numerable.

Queremos demostrar que $0 \notin [F]$, es decir, no es el límite de una sucesión de elementos de F.

Por contradicción supongamos que existe $(x_k)_k$ tal que $x_k \to 0$ donde $x_k \in \dots$ y $(x_k)_k \in F$.

~~Notemos que~~

$$\cancel{\|x\| = \|e_n + n e_m\| \leq \|e_n\|^{1} + n\|e_m\|^{1} = 1 + n}$$

La sucesión en principio no es acotada

Así, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$x_k = e_{n_k} + n_k e_{m_k}$$

Luego, como $(x_k)_k$ es convergente, entonces $(x_k)_k$ es acotada. Así, se tiene que existe $M > 0$ tal que

$$\|x_k\| < M.$$

Luego, por la desigualdad triangular inversa

$$\cancel{\|x_k\| = \|e_{n_k} + n_k e_{m_k}\| < M \Rightarrow \|e_{n_k}\| - n_k \|e_{m_k}\| < M}$$

$$\cancel{\Rightarrow \|e_{n_k}\| < M + n_k}$$

Se tiene que

$$n_k \|e_{m_k}\| - \|e_{n_k}\| < M \Rightarrow n_k < M+1 \qquad (n_k)_k$$

Así, la sucesión es acotada, y por lo tanto convergente, más aún esto implica que la sucesión es convergente salvo en un número finito de términos.

$$e_m + m e_{m_k} \longrightarrow 0$$

Pero $(m_k)_k$ no puede ser acotada pues tendría una subsucesión convergente (Revisar ejercicio deber)

literal b).

Ahora, probemos que $0 \in [[F]]^{\sigma(\ell^p, \ell^{p'})}$, i.e., 0 es límite de elementos en $[F]$. Es decir, existe una sucesión de $[F]$ tal que converge débilmente a 0.

Fijando $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$e_m = \lim_{n \to +\infty} (e_m + m e_n),$$

entonces $e_m \in [F]$. Así $(e_m)_m \subseteq [F]$ y como $e_m \longrightarrow 0$, entonces

$$0 \in [[F]]$$

$p = 1$

$$0 \in [F]^{\sigma(\ell^1, c_0)} \leftarrow \text{topología débil estrella}$$

$$0 \in [[F]]^{\sigma(\ell^1, c_0)}$$

$p = +\infty$

$$0 \notin [F]^{\sigma(\ell^\infty, \ell^1)}$$

$$0 \in [[F]]^{\sigma(\ell^\infty, \ell^1)}$$

Ejercicio Muestre que la topología débil $(E, \sigma(E, E'))$ no es metrizable.

Construyamos $(x_n)_n$ tal que $\|x_n\| = n$ y $x_n \longrightarrow 0$. Por lo tanto, se tiene una contradicción pues la sucesión debe ser acotada.

Si la topología es metrizable sobre todo el espacio entonces existe una métrica d tal que

$$\tau_d \approx \sigma(E, E')$$

Luego, como es metrizable admite una base de vecindades numerable. Así para $0 \in E$ se tiene que

$$(B(0, 1/n))_{n \in \mathbb{N}}$$

es una familia de vecindades numerable. Luego como las topologías coinciden entonces existe V_0^n un abierto tal que

$$0 \in V_0^n \subseteq B(0, 1/n)$$

Luego dentro de la vecindad existe una recta que pasa por 0 con dirección x_0, donde $x_0 \in \bigcap \ker(f_i)$

$p \Rightarrow q$

E' es separable si y solo si $(\overline{B}_E, \sigma(E,E'))$ es metrizable $\quad \neg q \Rightarrow \neg p$.

Miércoles, 31 de mayo de 2023.

Caracterización de densidad por Hanh-Banach

$$(\forall f \in E')(f=0 \text{ sobre } F \Rightarrow f=0 \text{ sobre } E) \Rightarrow \overline{F}=E$$

Definición 1.13. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach. Decimos que E es reflexivo si la inyección canónica

$$J: E \to E''$$
$$x \mapsto J_x$$

es sobreyectiva.

Observación:

- Si E es reflexivo, entonces E es isométricamente isomorfo a E''
- La recíproca es falsa. Es decir, que existan espacios isométricamente isomorfos a su bidual tal que E no es reflexivo
- Si E es reflexivo, entonces $(E', \sigma(E',E'')) \approx (E', \sigma(E',E))$

Sabemos que $\sigma(E',\sigma(E',E)) \subseteq \sigma(E',\sigma(E',E''))$

Como E es reflexivo, para todo $\xi \in E''$, existe $x_\xi \in E$ tal que

$$J_{x_\xi} = \xi$$

Por definición de la topología débil $*$, se tiene que

$$J_{x_\xi}: (E', \sigma(E',E)) \longrightarrow \mathbb{K}$$

es continua, así $\sigma(E',E'') \subset \sigma(E',E)$

Teorema 1.14 (Kakutani) Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un es espacio de Banach. Luego, las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $(\overline{B}_E, \sigma(E,E'))$ es compacto

b) Es reflexivo

Revisar lema 1.16 cuaderno anterior (Revisar continuidad en espacios producto)

Propiedad 3.8 (Topología)

La función $f: (X, \tau_X) \longrightarrow \left(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i\right)$ es continua si y solo si para todo $i \in I$,

$$p_i \circ f: (X, \tau_X) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$$

Notemos entonces que

$$\begin{tikzcd}
(X, \tau_X) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_i \circ f"'] & \left(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i\right) \arrow[d] \\
& (X_i, \tau_i)
\end{tikzcd}$$

Lema 1.25. (Caracterización de separabilidad)

Lunes, 5 de junio de 2023

Existe $x_{\xi_\mu} \in E$ tal que $J x_{\xi_\mu} = \xi_\mu$. P.D. $x_{\xi_\mu} \in K$

Por absurdo, supongamos que $x_{\xi_\mu} \notin K$, entonces existe $\eta \in E'$ tal que

$$\eta(x_{\xi_\mu}) < \alpha < \eta(K)$$

donde cada uno es no nulo

$$\eta\left(J^{-1}(\xi_\mu)\right) < \alpha < \eta(K)$$

$$\eta(x_{\xi_\mu}) < \alpha < \eta(z) \qquad \forall z \in K$$

$\xi_\mu|_{K'} = \mu|_{K'}$

$0 < \eta\left(z - x_{\xi_\mu}\right)$

$E' \subseteq F$

$F = C(K) = \{ f$ funciones continuas $(K, \sigma(E,E'))$ en $\mathbb{R}\}$

$f \in F \Rightarrow f : K \to \mathbb{R}$

F' e.v.

Martes, 6 de junio de 2023

Proposición 1.20 Sea E un espacio de Banach reflexivo. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, entonces admite una subsucesión que converge en $\sigma(E,E')$

Observación: Si E es reflexivo $(\overline{B}_E, \sigma(E,E'))$ es compacta y secuencialmente compacta pero no necesariamente metrizable (en general)

Observación: Si E es separable, entonces:

- $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E',E))$ es metrizable y compacta, por tanto secuencialmente compacta.
- Si $(\varphi_n)_n \subseteq E'$ es una sucesión acotada, entonces admite una subsucesión convergente.

Proposición 1.21 Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, entonces E es reflexivo y separable si y solo si E' es reflexivo y separable.

Observación: Se puede mostrar que E es reflexivo si y solo si todo funcional de E' alcanza su norma

Es decir que:

$$(\forall f \in E')\,(\exists x_f \in \overline{B}_E) \text{ tal que } \|f\|_{E'} = \langle f, x_f \rangle_{E' \times E}.$$

Capítulo 2: Ortogonalidad y Suplementario topológico

Definición 2.1 Sea $M \subseteq E$, $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach.
Definimos el ortogonal fuerte de M como

$$M^{\perp} = \{ f \in E' : \forall x \in M \;\; f(x) = 0 \} \subseteq E'$$

Observaciones: $M^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de E

$M^{\perp}$ es cerrado en $\sigma(E',E'')$ y $\sigma(E',E)$

Notemos que

$$H^{\perp} = \bigcap_{x\in H} \mathfrak{J}_x^{-1}(\{0\})$$

Definición 2.2. Sea $N \subset E'$, definimos el ortogonal débil de N como

$${}^{\perp}N = \{ x \in E : \forall f \in N \ f(x) = 0 \}$$

Observación: Notemos que

* ${}^{\perp}N$ es un subespacio vectorial cerrado en $\sigma(E, \|\cdot\|_E)$, $\sigma(E, E')$

Proposición 2.3. Sea M un s-e-v de E y N s-e-v de E', entonces

$$({}^{\perp}N)^{\perp} = \overline{N}^{\sigma(E',E)} \qquad ({}^{\perp}N)^{\perp} \subset \overline{N}^{\sigma(E,E')}$$

Proposición 2.4 Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y G, L dos subespacios cerrados de E, entonces

a) $G \cap L = {}^{\perp}(G^{\perp} + L^{\perp})$

b) $\overline{G^{\perp} + L^{\perp}}^{\sigma(E', \|\cdot\|)} \subset (G \cap L)^{\perp}$

c) ${}^{\perp}(G^{\perp} \cap L^{\perp}) = \overline{G + L}$

Proposición 2.5 Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, G y L dos s.e.v. cerrados. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $G + L$ es cerrado en E

b) $G^{\perp} + L^{\perp}$ es cerrado en E'

c) $G + L = {}^{\perp}(G^{\perp} \cap L^{\perp})$

d) $G^{\perp} + L^{\perp} = (G \cap L)^{\perp}$

Definición 2.6. Sean E y F dos espacios de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ y $T \in \mathcal{L}(E,F)$

Definimos el operador adjunto de T notado por T^* como

$$T^* : (F', \|\cdot\|_F) \longrightarrow (E', \|\cdot\|_E)$$
$$\varphi \longmapsto T^*\varphi$$

donde

$$T^*\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \langle T^*\varphi, x \rangle_{E' \times E} = \langle \varphi, Tx \rangle_{F' \times F}$$

más aún $\|T\| = \|T^*\|$

$$\|T^*\| = \sup_{f \in \overline{B}_{F'}} \|T^* f\|_{E'} = \sup_{f \in \overline{B}_{F'}} \left(\sup_{x \in \overline{B}_E} |\langle T^* f, x \rangle|_{E' \times E} \right)$$

$$= \sup_{f \in \overline{B}_{F'}} \left(\sup_{x \in \overline{B}_E} |\langle f, Tx \rangle|_{F' \times F} \right) = \sup_{x \in \overline{B}_E} \left(\sup_{f \in \overline{B}_{F'}} |\langle f, Tx \rangle|_{F' \times F} \right)$$

$$= \sup_{x \in \overline{B}_E} \|Tx\|_F = \|T\|$$

Observación Si consideramos $*: \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F',E')$, entonces este operador tiene las siguientes propiedades

a) Antilineal

b) Isometría ($\|T\| = \|T^*\|$)

c) No es necesariamente sobreyectiva

d) Para $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y $S \in \mathcal{L}(F,G)$, entonces $(ST)^* = T^* S^*$

Miércoles, 7 de junio de 2023

Proposición 2.7 Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$, entonces

a) $\ker(T) = {}^{\perp}(\operatorname{Img} T^*)$

b) $\ker(T^*) = (\operatorname{Img} T)^{\perp}$

c) $\ker(T)^{\perp} \supset \overline{\operatorname{Img}(T^*)}$

d) ${}^{\perp}\ker(T^*) = \overline{\operatorname{Img}(T)}$

Además, las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $\operatorname{Img}(T)$ es cerrado

b) $\operatorname{Img}(T^*)$ es cerrado

c) $\operatorname{Img}(T) = {}^{\perp}\ker(T^*)$

d) $\operatorname{Img}(T^*) = \ker(T)^{\perp}$

Ver las demostraciones en los apuntes anteriores

Proposición Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$, entonces: $\operatorname{Img}(T)$ es cerrada si y solo si existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx\| \geq c\|x\| \qquad \forall x \in E.$$

(Revisar demostración) $(\ker(T))$

Si está en el kernel existe una contradicción

Ejercicio. Consideremos

$$I(E,F) = \{ T \in \mathcal{L}(E,F) : T \text{ es inyectivo } \operatorname{Img}(T) \text{ cerrada} \}$$

$$S(E,F) = \{ T \in \mathcal{L}(E,F) : T \text{ es sobreyectivo} \}$$

a) $T \in I(E,F)$ si y solo si $(\exists c > 0)(\forall x \in E \quad \|Tx\| \geq \alpha \|x\|)$

b) $I(E,F)$ es un abierto en $\mathcal{L}(E,F)$

c) $T \in S(E,F)$ si y solo si $T^* \in I(F',E')$

$T \in I(E,F)$ si y solo si $T^* \in S(F',E')$

d) $S(E,F)$ es un abierto en $\mathcal{L}(E,F)$

Viernes, 9 de junio de 2023

Ejercicio Sea $x \in \ell_0(\mathbb{N})$ y $(x^n)_n$ una sucesión en $\ell_0(\mathbb{N})$. Mostrar que

$$x^n \to x \iff (x^n)_n \text{ es acotada y } (\forall k)\,(\pi_k(x^n) \to \pi_k(x))$$

Demostración

$\Rightarrow$ Trivialmente se tiene el resultado.

La acotación es directa, para la convergencia como $(c_0)' = \ell^1$ y $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$

$\Leftarrow$ Supongamos que $(x^n)_n$ está acotada y

$$(\forall k)\,(\pi_k(x^n) \to \pi_k(x))$$

Definamos $F := \operatorname{span}(\{e_k\})$, notemos entonces que

$$\ell_{00} = F$$

donde ℓ_{00} es denso en ℓ^p para $p \in [1, +\infty[$, así

$$\overline{F}^{\ell^1} = \ell^1 \qquad \leftarrow \text{Esto es conocido.}$$

Por [*] tenemos que

$$\pi_k(x^n) \to \pi_k(x) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

es decir,

$$\langle x^n, e^k \rangle \to \langle x, e^k \rangle \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

por linealidad se tiene que

$$\langle x^n, z \rangle \to \langle x, z \rangle \qquad \forall z \in F \qquad [1]$$

Sea $\varepsilon > 0$. Así, existe $y_\varepsilon \in F$ tal que

$$\| z - y_\varepsilon \| < \frac{\varepsilon}{2M}_{\ell^1}$$

con $M := \sup_n \|x^n\| + \|x\| > 0$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\langle x^n - x, y \rangle| &\leq |\langle x^n - x, y - y_\varepsilon \rangle| + |\langle x^n - x, y_\varepsilon \rangle| \\
&\leq \|x^n - x\|_{\ell^\infty} \|y - y_\varepsilon\|_{\ell^1} + |\langle x^n - x, y_\varepsilon \rangle| \qquad \text{(Desigualdad de Hölder)} \\
&\leq M \|y - y_\varepsilon\|_{\ell^1} + |\langle x^n - x, y_\varepsilon \rangle| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\langle x^n - x, y_\varepsilon \rangle|
\end{aligned}$$

Como $y_\varepsilon \in F$, entonces usando [1] se sigue que existe $N_\varepsilon = N > 0$ tal que

$$n \geq N_\varepsilon \implies |\langle x^n - x, y_\varepsilon \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, para $n \geq N$

$$|\langle x^n - x, y \rangle| < \varepsilon,$$

así, $x^n \to x$.

Ejercicio 2. Sea $\varphi : [1,2] \to \mathbb{R}$ una función continua y consideremos la sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\ell_0(\mathbb{N})$, definidas como

$$x^n_k = \begin{cases} \varphi(k/n) & \text{si } k = n, \dots, 2n \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$x^n = (0, \dots, \varphi(n/n), \dots, \varphi(2n/n), \dots)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que $x^n \longrightarrow 0$.

Idea: Usar el ejercicio anterior

Por el literal anterior hay que probar que $(x^n)_n$ es acotada y

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \ (\Pi_k(x^n) \to \Pi_k(x))$$

Como φ es continua sobre $[1,2]$ que es compacto, entonces

$$\|x^n\|_{\ell^\infty} = \sup_{k \in \{n, \dots, 2n\}} |\varphi(k/n)| \leq \sup_{x \in [1,2]} |\varphi(x)| < +\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

así, la sucesión es acotada.

Sea $k \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Así, existe $N \overset{=k+1}{>} 0$ suficientemente grande tal que

$$\Pi_k(x^n) = 0 \qquad \forall \ n \geq N$$

y así,

$$\Pi_k(x^n) \xrightarrow[n]{} 0$$

Ejercicio 3. Sea $(f_n)_n$ una sucesión en $L^1([0,1])$ y $f \in L^1([0,1])$. Mostrar que $f_n \rightharpoonup f$ si y solo si se cumple que

a) $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\int_0^1 |f_n(x)| \, dx < M \right)$

b) Para cada $E \subseteq [0,1]$, Lebesgue medible,

$$\int_E f_n(x) \, dx \to \int_E f(x) \, dx \qquad [*]$$

$\Rightarrow$) Si $f_n \rightharpoonup f$ entonces $(f_n)_n$ es acotada, así $\|f\| \leq \liminf_n \|f_n\|$, con lo que existe $M>0$ tal que

$$\|f\|_{L^1} = \left(\int_0^1 |f_n(x)| \, dx \right) < M$$

y más aún es acotada.

Además, sabemos que

$$(\forall g \in L^\infty([0,1])) \left(\langle f_n, g \rangle_{L^1, L^\infty} \to \langle f_n, g \rangle \right)$$

En particular, tomando $\mathbb{1}_E = g$, para cada $E \subseteq [0,1]$ Lebesgue medible. Así,

$$\langle f_n, \mathbb{1}_E \rangle = \int_E f_n(x) \, dx \to \langle f, \mathbb{1}_E \rangle = \int_E f(x) \, dx$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $(f_n)_n$ es acotada y $[*]$

Sea $g \in L^\infty([0,1])$, notemos que $S([0,1], Bor([0,1]), \lambda|_{[0,1]}, \mathbb{K}) =: S$ es un espacio medido σ-finito, en efecto, consideremos la sucesión

$$A_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n} \right]$$

Vemos que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0,1]$$

y además, $\lambda(A_n) < +\infty$

Las funciones simples

Así, sabemos que S es denso en $L^\infty([0,1])$

De esta manera, por [*], tenemos que

$$(\forall h \in S)\left(\int_0^1 h(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 h(x) f(x)\, dx \right)$$

Como $g \in L^\infty([0,1])$ existe $g_\varepsilon \in S$ tal que

$$\| g - g_\varepsilon \| < \frac{\varepsilon}{2H}$$

con $H = \sup_n \|f_n\|_{L^1} + \|f\|_{L^1} > 0$. Por lo tanto,

$$|\langle f - f_n, g \rangle| \leq |\langle f - f_n, g - g_\varepsilon \rangle| + |\langle f_n - f, g_\varepsilon \rangle|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + |\langle f_n - f, g_\varepsilon \rangle|$$

Se sigue que existe $N_\varepsilon = N > 0$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |\langle f_n - f, g \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donde $n \geq N$, entonces

$$|\langle f_n - f, g \rangle| < \varepsilon \iff f_n \to f$$

Lunes,
12 de junio de 2023

Sección: Suplementario Topológico

Motivación: Si consideramos $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado y $H \subseteq E$ un s.e.v. cerrado siempre existe N s.e.v. de E tal que

$$E = H \oplus N$$

A partir de esta descomposición se puede definir

$$P_H : E \longrightarrow H$$
$$x \longmapsto P_H(x) = x_H \quad \text{con} \quad x = x_H + x_N$$

Observación: No necesariamente P_H es continua.

El objetivo es encontrar condiciones para que la proyección asociada sea continua

Lema de Riez 2.8 Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y consideremos $G \subseteq E$ y $L \subseteq E$ s-e-v cerrados tales que $G + L$ es cerrado. Entonces existe $c > 0$ tal que para todo $z \in G + L$, existen $x_G \in G$ y $x_L \in L$ tales que $z = x_G + x_L$ y

$$\|x_G\| \leq c\|z\| \quad \text{y} \quad \|x_L\| \leq c\|z\|$$

Ver demostración: apuntes 2022-B Lema 2.2.

Corolario 2.9. Con las mismas hipótesis del Lema 2.8, existe $\tilde{c} > 0$ tal que

$$d(x, G \cap L) \leq \tilde{c}\left(\operatorname{dist}(x, G) + \operatorname{dist}(x, L) \right) \quad \forall x \in E$$

Demostración: Sea $z \in E$ fijo. Dado $\varepsilon > 0$, existe $x_G \in G$ y $x_L \in L$ tal que $z = x_G + x_L$
Luego, por caracterización de ínfimo

$$d(x, G) + \varepsilon \geq d(x, x_G) \quad \text{y} \quad d(x, L) + \varepsilon \geq d(x, x_L)$$

Tomando $z = x_G + x_L$, gracias al Lema de Riez 2.8, existe $\tilde{x}_G \in G$, $\tilde{x}_L \in L$

entonces $z = \tilde{x}_G + \tilde{x}_L$ y además $\|\tilde{x}_G\| \leq C\|z\|$ y $\|\tilde{x}_L\| \leq C\|z\|$

↳ Demostración: Ver Corolario 2.11 Brezis.

Proposición 2.10 Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y H s.e.v. cerrado. Si H es de dimensión finita, entonces H admite un suplementario topológico.

Además, si H es de codimensión finita, entonces H admite un suplementario topológico

Observación: Si H es un espacio de Hilbert entonces tales todo s.e.v. cerrado admite un suplementario topológico.

- Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio de Banach tal que no sea isomorfo a ningún espacio de Hilbert, entonces existe $M \subseteq E$ s.e.v. cerrado tal que no admite un suplementario topológico.
- $(\ell_0, \|\cdot\|_\infty) \subseteq (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ no admite un suplementario topológico.
- Si un s-e-v cerrado H admite un suplementario topológico, este es único salvo por isomorfismos

Demostración: (Proposición 2.10) Esquema

a) Si $\dim(H) < +\infty$, admite una base $(e_i)_{i=1}^n$ y $(e_i^*)_{i=1}^n \in H'$ $\Rightarrow (\tilde{e}_i^*)_{i=1}^n \in E'$

tomando $N = {}^{\perp}\operatorname{span}\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ Este cumple lo requerido

b) Ver demostración: clase 23 de enero de 2023

Observación: Si H es un s.e.v. de $\dim(H) < +\infty$, existe N suplementario topológico cuya codimensión es igual a la dimensión de M

Si H es un s-e-v de $\operatorname{codim}(H) < +\infty$ entonces existe N suplementario topológico de H de dimensión igual a la codimensión de N.

Proposición 2.11. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y H un s-e-v cerrado de E. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) H admite un suplementario topológico

b) Existe $P \in \mathcal{L}(E)$, idempotente $(P^2 = P)$ tal que $\operatorname{Img}(P) = H$.

En general, se tiene que b) $\Rightarrow$ a)

Demostración: Ver Proposición 2.3 Apuntes 2022-B.

Martes, 13 de junio de 2023

Definición 2.12. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach tales que $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Decimos que T admite un ~~suplemen~~ inverso por derecha (izquierda) si existe $S \in \mathcal{L}(F,E)$ tal que

$$TS = id_F \qquad (ST = id_E)$$

Ejemplo: Si T es invertible, entonces T admite inversos por izquierda y derecha.

Por otro lado, consideremos

$$S : \ell^p \longrightarrow \ell^p$$
$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto Sx = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

S es lineal, $S \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)$, S es sobreyectivo, pero no inyectivo $\|S\| = 1$

Entonces S admite un inverso por derecha

$$S^*: \ell^p \to \ell^p$$

$$x = (x_n) \longmapsto S^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=1 \\ x_{n-1} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$y = S^* x = (0, x_1, x_2, \dots)$ $\qquad S S^* = Id_{\ell^p}$

S^* admite un inverso por la izquierda

<u>Observación:</u> Si consideramos $\ell^p(\mathbb{Z}) = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p \}$

En este espacio, S y S^* es invertible

<u>Observación:</u> Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que
(Pregunta)
- T admite inversa por derecha, entonces T es sobreyectiva. Sí
- T admite inversa por izquierda, entonces T es inyectiva. Sí

Pregunta.
↳ Supongamos que $T \notin Inv(E,F)$ y además, T admite un inverso por izquierda, entonces $ker(T) = \{0\}$.

Ahora, en dimensión infinita, existe $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que $ker(T) = \{0\}$, entonces

$\overline{Img(T)} = F \qquad Img(T) \neq F$

→ Continuación: Ejercicio; Miércoles 7 de junio de 2023

$T \in \mathcal{L}(E,F)$, $S \in \mathcal{L}(E,F)$, T

Proposición 2.13. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios de Banach

- Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es inyectiva, entonces se tiene las siguientes equivalencias
  a) T admite inversa por izquierda
  b) $Img(T)$ es cerrada y admite un suplementario topológico.
- Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es sobreyectiva, entonces se tiene las siguientes equivalencias
  a) T admite inversa por derecha
  b) $ker(T)$ admite un suplementario topológico

¿Pregunta. T admite inversa por izquierda, entonces T es inyectiva pero $Img(T)$ no es cerrada?

$\lambda = (\lambda_n)_n \in \ell^\infty$ con $p \in [1, +\infty[$

$$T_\lambda : \ell^p \to \ell^p$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto T_\lambda((x_n))_n = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$\|T_\lambda\|_{\ell^p} = \|\lambda\|_{\ell^\infty}$

T_λ es inyectivo si y solo si $\forall n\in\mathbb{N}\ \lambda_n\neq 0$

T_λ es invertible si y solo si $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| > 0$

Consideremos el caso en el que

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \lambda_n\neq 0 \quad \text{e} \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 0$$

Miércoles, 14 de junio de 2023

Demostración: (Proposición 2.13)

Ver demostración: Apuntes 2022-B (Proposición 2.5)

Si T admite inversa por izquierda $\Rightarrow$ T es inyectiva y si $T\notin \underline{Inv}(E,F)$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$Img(T)$ es cerrada $\qquad\qquad\qquad$ T no es sobreyectiva

$$\overline{Img(T)} = F \qquad\qquad \overline{Img(T)} = Img(T) \subsetneq F$$

Consideremos S^*.

Notemos que el problema radica en tomar la hipótesis de que T admite inversa por izquierda.

Viernes, 16 de junio de 2023

Ejercicio 3. Para cada $n\in\mathbb{N}$, definimos

$$f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$$

Mostrar que $f_n\to 0$ en $\sigma(L^p,(L^p)')$ con $p\in]1,+\infty[$, donde $1/p+1/q=1$.

Sea $g\in L^q$, mostremos que

$$\langle f_n, g\rangle_{L^p\times L^q} \xrightarrow[n]{} \langle 0, g\rangle$$

Puesto que $\overline{D(\mathbb{R})}^{L^q} = L^q$. Basta probar que [1]

$$(\forall \varphi\in D(\mathbb{R}))\ \left(\langle f_n,\varphi\rangle_{L^p\times L^q} \to 0\right)$$

Sea $\varphi\in D(\mathbb{R})$. P.D. $\langle f_n,\varphi\rangle_{L^p\times L^q}\to 0$.

Notemos que

$$\langle f_n,\varphi\rangle = \int f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_n^{n+1}\varphi(x)\,dx$$

$f_n\varphi\in L^1(\mathbb{R})$. $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\varphi\,dx = \int_n^{n+1}\varphi\,dx \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|\int_n^{n+1}dx = \|\varphi\|_\infty$$

Por lo tanto $|f_n\varphi|\leq\|\varphi\|$ c.t.p en $\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (con $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$)

P.D. $f_n(x)\varphi(x)\to 0$ c.t.p $x\in\mathbb{R}$

Observemos que para c.t.p $x\in\mathbb{R}$

Sea $t \in [0,1]$. Consideremos g_t, definida como

$$g_t(x) = \mathbb{1}_{[0,t]}(x)$$

Vemos que $g_t \in L^q([0,1])$; por lo tanto, como $f_n \rightharpoonup f$

$$\langle f_n, g_t \rangle_{L^q \times L^p} \longrightarrow \langle f, g_t \rangle$$

es decir

$$\int_0^t f_n(x)\, dx \xrightarrow[n]{} \int_0^t f(x)\, dx$$

$\Leftarrow$) Supongamos i) y ii), gracias a que

$$\overline{D([0,1])}^{L^q} = L^q([0,1])$$

basta probar que

$$\langle f_n, \varphi \rangle_{L^p \times L^q} \xrightarrow[n]{} \langle f, \varphi \rangle_{L^p \times L^q} \qquad \forall \varphi \in D([0,1])$$

Sea $\varphi \in D([0,1])$. Veamos que

$$|\langle f_n - f, \varphi \rangle| = \left| \int_0^1 (f_n - f)(x)\, \varphi(x)\, dx \right|$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \left| \int_0^1 (f_n - f)(x)\, dx \right| \longrightarrow 0$$

gracias a i) con $t \to 1$

Ejercicio 2 - Parte b Sea $(a_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $(b_n)_n$ una sucesión en $[0,1]$, tales que $(|a_n| b_n^{\frac{1}{p}})_n$ es acotada y

$$a_n b_n \xrightarrow[n]{}$$

Mostrar que la sucesión de funciones $(f_n)_n$ definida por

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,b_n]}(x)\, a_n$$

es débilmente convergente en $L^p([0,1])$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n\|_{L^p([0,1])} = \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p\, dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^{b_n} |a_n|^p\, dx \right)^{1/p} = \left(|a_n|^p\, b_n \right)^{1/p} = |a_n|\, b_n^{\frac{1}{p}}$$

Puesto que $(|a_n| b_n^{\frac{1}{p}})_n$ es acotada, entonces $(f_n)_n$ es acotada en $L^p([0,1])$

Para $t \in [0,1]$, mostremos que

$$\int_0^t f_n(x)\, dx \xrightarrow[n]{} 0$$

Ejercicio 4. Sea $(a_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las formas lineales $T_n \in (\ell_0)'$ por

$$T_n(x) = a_n x_n,$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_0(\mathbb{N})$. Muestre que la sucesión $(T_n)_n$ es débilmente * convergente a 0 si y solo si

Lunes, 19 de junio de 2022

Capítulo 3: Operadores sobre espacios de Hilbert

Como supp φ es compacto, existe $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subseteq K = [-R, R] \quad \text{con } R > 0$$

> Si $x \notin K$,

$$f_n(x)\varphi(x) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f_n(x)\varphi(x) \xrightarrow[n]{} 0$$

> Si $x \in K$, tomamos $N = \lfloor R \rfloor + 1$, así

$$f_n(x) g(x) = 0 \qquad \forall n \geq N$$

lo que prueba que

$$f_n(x) g(x) \xrightarrow[n]{} 0$$

Gracias al teorema de convergencia dominada L^1, tenemos que

$$\langle f_n, \varphi \rangle_{L^p \times L^q} = \int_{\mathbb{R}} f_n \varphi \longrightarrow 0.$$

Con lo hecho hasta ahora, veamos que es suficiente para probar el resultado.

Por [1], para $g \in L^q(\mathbb{R})$, existe $g_\varepsilon \in D(\mathbb{R})$ tal que

$$\| g - g_\varepsilon \|_{L^q} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g\rangle| &= |\langle f_n, g + g_\varepsilon - g_\varepsilon \rangle| \\ &\leq |\langle f_n, g - g_\varepsilon \rangle| + |\langle f_n, g_\varepsilon \rangle| \\ &\leq \|f_n\|_{L^p} \, \|g - g_\varepsilon\|_{L^q} + |\langle f_n, g_\varepsilon \rangle| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{|\langle f_n, g_\varepsilon \rangle|}_{\text{Converge a cero por lo anterior}} \end{aligned}$$

Entonces existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle f_n, g_\varepsilon \rangle| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Con lo que

$$|\langle f_n, g \rangle| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall n \geq N_\varepsilon.$$

Ejercicio 2. Para $1 \leq p < +\infty$, consideramos el espacio $L^p([0,1])$ y $f \in L^p([0,1])$

Mostrar que

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{si y solo si}$$

i) $(\forall t \in [0,1]) \left(\int_0^t f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_0^t f(x)\,dx \right)$

ii) $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p dx \leq M \right)$

$\Rightarrow$ Supongamos que $f_n \rightharpoonup f$ (en $\sigma(L^p, L^q)$ con $1/p + 1/q = 1$)

Así, $(f_n)_n$ es acotada en $L^p([0,1])$, lo que prueba ii)

Definición 3.1 Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ sobre el cual definimos $\langle \cdot,\cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ sesquilineal. Decimos que H es un producto interior o producto escalar o producto punto si verifica que

a) $\forall x, y \in H \quad \langle x, y \rangle_H = \overline{\langle y, x \rangle_H}$

b) $\forall x, y \in H \quad \langle x, \lambda y \rangle_H = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle_H \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

c) $\forall x, y, z \in H \quad \langle x+y, z \rangle_H = \langle x, z \rangle_H + \langle y, z \rangle_H$

d) $\forall x \in H \quad \langle x, x \rangle \geq 0$

Si H es prehilbertiano, entonces es normable $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle_H$

Definición 3.2. Sea $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano. Decimos que $u, v \in H$ son ortonormales si u, v son ortogonales y además $\|u\| = \|v\| = 1$.

Definición 3.3. Sean $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano, S y G dos e.v. propios de H. Decimos que S es ortogonal a G, si $S \perp G$. i.e.,

$$\forall g \in G \quad \forall s \in S \qquad \langle g, s \rangle_H = 0$$

Observación: Si G admite una base finita $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ y S admite una base finita $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, entonces $G \perp S$ si y solo si

$$\langle g_i, s_j \rangle = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Proposición 3.4 Sea $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano, se tienen los siguientes enunciados

a) $\forall x, y \in H : \quad x \perp y = 0 \implies \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

b) $\forall x, y \in H : \quad \|x-y\|_H^2 + \|x+y\|_H^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

c) $\forall x, y \in H : \quad 4\langle x, y \rangle = \sum \alpha \|x + \alpha y\|^2 \quad$ con $\alpha = \{1, -1, i, -i\}$

d) $\forall x, y \in H : \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$

$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \, \|y\|$ si y solo si x y y son colineales.

e) $\langle x, y \rangle = 0 \iff \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \|y\| \leq \|x + \lambda y\|$

f) $\langle \cdot,\cdot \rangle_H$ es continuo.

Definición 3.5 Sea $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano. Decimos que H es un espacio de Hilbert si $(H, \|\cdot\|_H)$ es un espacio completo. (espacio de Banach)

Proposición 3.6. Sea $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. Los siguientes enunciados se cumplen

a) (Teorema de la proyección sobre un convexo cerrado no vacío) Sea C un convexo, cerrado y no vacío, entonces

$$(\forall x \in H)(\exists!\, x_C \in C) \text{ tal que } d(x, C) = \|x - x_C\|$$

b) (Teorema de Riesz)

$$(\forall f \in H')(\exists!\, x_f \in H) \text{ tal que } \forall y \in H \quad f(y) = \langle y, x_f \rangle \qquad \|f\|_{H'} = \|x_f\|_H$$

c) Sea H un s-e-v cerrado de H, se tiene que

$$H = M \oplus H^{\perp}$$

d) (Desigualdad de Bessel)

Sea $(e_i)_{i\in I}$ un sistema ortonormal

$(\forall i,j \in I \quad i\neq j \quad \langle e_i, e_j\rangle_H = 0 \quad$ y $\quad \forall i\in I \quad \|e_i\|_H = 1)$

Se tiene que

$\forall x\in H \qquad (\langle e_i, x\rangle)_{i\in I} \in \ell^2(I)$ y además

$$\sum_{i\in I} |\langle e_i, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Observaciones:

a) Si C es un s-e-v. podemos definir $P_C : H \longrightarrow C$ donde

$P_C(x) = x_C \qquad P_C$ es lineal, continuo y sobreyectivo

b) H y H' son isométricamente isomorfos. Así, el producto dual se caracteriza con el producto escalar

d) Si $H = \overline{\text{span}(\{e_i\})}$

Definición 3.7. Sea $(e_i)_{i\in I}$ un sistema ortonormal de H si $H = \overline{\text{span}\{e_i\}}$

Observación: a) $(e_i)_{i\in I}$ es una base de Hilbert si y solo si $\forall x\in H \quad \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2$

b) $(e_i)_{i\in I}$ es una base de Hilbert de H si y solo si $J = \text{span}((e_i)_i)$

c) H es separable si y solo si toda base de Hilbert de H es finita o numerable.

d) Todo espacio de Hilbert separable es isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$

Ejemplo: $L^2((-\pi,\pi)) \quad \langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad \overline{C((-\pi,\pi))}^{L^2} = L^2(-\pi,\pi)$

Proposición 3.8 Sean $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1})$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2})$ dos espacios de Hilbert y $T\in\mathcal{L}(H_1,H_2)$ entonces existe $T^*\in\mathcal{L}(H_2,H_1)$ único tal que

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^*y\rangle_{H_1} \qquad \forall x\in H_1 \quad \forall y\in H_2$$

tal que $\|T\| = \|T^*\|$

Observación: Notemos que

- $(T^*)^* = T$
- $*: \mathcal{L}(H_1,H_2) \longrightarrow \mathcal{L}(H_2,H_1)$ es antilineal, isométrica, sobreyectiva
- Sean H_1, H_2 y H_3 espacios de Hilbert

$T: H_1 \longrightarrow H_2, \qquad S: H_2 \longrightarrow H_3 \qquad (ST)^* = T^* S^*$

Definición 3.9. Sean $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dos espacios de Hilbert

a) Decimos que T es unitario si $T^* = T^{-1}$, $\quad TT^* = id_{H_2} \quad T^*T = id_{H_1}$

b) T es isométrico si $\forall x\in H_1 \quad \|Tx\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$

c) $T\in\mathcal{L}(H_2)$ es normal si $TT^* = T^*T$

d) $T\in\mathcal{L}(H_1)$ es autoadjunto si $T = T^*$

e) T es definido positivo si T es autoadjunto y $T \geq 0$ i.e. $\forall x\in H_1 \quad \langle Tx, x\rangle_{H_1} \geq 0$

Martes, 20 de junio de 2023.

Proposición 3.10. Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) T es una isometría

b) $T^* T = id_H$

Demostración

b) $\Rightarrow$ a) Notemos que

$$\|x\|_H^2 = \langle x, x \rangle = \langle T^* T x, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|_H^2$$

b) $\Rightarrow$ a) Supongamos que T es una isometría

$$\forall x \in H_1 \quad T^* T x = x \iff \forall y \in H_1 \quad \langle T^* T x, y \rangle_{H_1} = \langle x, y \rangle$$

Usando la identidad de polarización, tenemos que

$$\langle Tx, Ty \rangle = \frac{1}{4}\Big(\langle T(x+y), T(x+y) \rangle - \langle T(x-y), T(x-y) \rangle + i \langle T(x+iy), T(x+iy) \rangle - i \langle T(x-iy), T(x-iy) \rangle \Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle + i \langle x+iy, x+iy \rangle - i \langle x-iy, x-iy \rangle \Big)$$

$$= \langle x, y \rangle$$

Con lo que,

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^* T x, y \rangle = \langle x, y \rangle \qquad \forall y \in H$$

Así, $T^* T = id_{H_1}$

Corolario 3.11 Sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Las siguientes enunciados son equivalentes:

a) T es unitario

b) $T^* T = id$ con T sobreyectivo

c) T es una isometría sobreyectiva.

Proposición 3.12. Sea $T \in \mathcal{L}(H_1)$, si T es normal, entonces

$$\ker(T) = \ker(T^*)$$

Demostración

Si $x \in \ker(T)$, entonces $\|Tx\| = 0$

Luego, como

$$0 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^* T x, x \rangle = \langle T T^* x, x \rangle = \langle T^* x, T^* x \rangle = \|T^* x\|^2 = 0$$

Así, $\ker(T) \subseteq \ker(T^*)$, análogamente, se tiene el recíproco

Ejercicio. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, entonces H un espacio de Hilbert complejo.

a) Si $\langle Tx, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H$ si y solo si $T = 0$

b) $\forall x \in H \quad \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ si y solo si T es autoadjunto

c) Si T es autoadjunto, entonces $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

d) $\forall x \in H \quad \langle Tx, x \rangle \geq 0$ entonces $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$

Demostración

literal a)

$\Leftarrow$) Si $T=0$, se sigue el resultado.

$\Rightarrow$) Si $\langle Tx, x\rangle_H = 0 \quad \forall x \in H$

Notemos que, por hipótesis $\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle = 0$. luego, como

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle\right)$$

entonces $\langle Tx, y\rangle = 0$ y así, $T=0$

literal b

$\Leftarrow$ Si $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, entonces $\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$, así, como

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^* x\rangle$$

como se quería.

$\Rightarrow$ Notando $S = T - T^*$, entonces

$$\forall x \in H \quad \langle Sx, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle (T-T^*)x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \langle T^*x, x\rangle$$
$$= \langle Tx, x\rangle - \langle x, Tx\rangle$$
$$= 0.$$

literal c)

Sea $\lambda \in \sigma(T)$, mostremos que $\lambda = \overline{\lambda}$, por lo tanto

$$\underbrace{T - \lambda Id}_{\text{no es invertible}} \iff \underbrace{(T-\lambda Id)^*}_{\text{no es invertible}} \iff \underbrace{T^* - \overline{\lambda}\, Id}_{\text{no es invertible}} \iff \underbrace{T - \overline{\lambda}\, Id}_{\text{no es invertible}}$$

↳ Revisar solución ejercicio 1 capítulo 6 [4]

literal d)

Por el literal b), T es autoadjunto. Por el literal c), $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

Así, resta probar que si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $\lambda \geq 0$

Por absurdo, si $\lambda < 0$, mostremos que $\lambda \notin \sigma(T)$

Así

$$\|(T-\lambda Id)x\|_H^2 = \|Tx\|^2 - 2\lambda\langle Tx, x\rangle + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2$$

Ejercicio 2. Sea H un espacio de Hilbert complejo

a) Muestre que $A = T + iS$, con T y S autoadjuntos si y solo si

$$T = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad S = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

Miércoles, 21 de julio de 2023

Demostración

$\Leftarrow$) Trivial

$\Rightarrow$) Si $A = T + iS$, donde T y S son autoadjuntos, entonces

$$A^* = T^* - iS^* = T - iS$$

entonces

$$A + A^* = 2T \quad \text{y} \quad A - A^* = 2iS$$

b) A es normal si y solo si $ST = ST$

c) Supongamos que A es normal. Muestre que A es invertible si y solo si $T^2 + S^2$ es invertible $A^{-1} = A^* (T^2+S^2)^{-1}$

Demostración

($\Leftrightarrow$) Supongamos que A es normal. entonces

$$AA^* - A^*A = 0$$

Con esto

$$(T+iS)(T-iS) - (T-iS)(T+iS) = 0 \iff -2i(ST - TS) = 0$$

Lo que equivale a que

$$ST = TS$$

como se querra

literal c

Supongamos que A es normal, por el literal anterior $ST = TS$
Ahora, recordemos que la composición de operadores invertibles tambien lo es y además

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Si A es invertible, entonces A^* tambien lo es y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Con esto

$$AA^* = T^2 + S^2$$

$\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que A es normal y además $T^2 + S^2$ es invertible

Por lo tanto, AA^* es invertible, eso implica que A y A^* son invertibles. En efecto, si A no es invertible o A^* no es invertible y por lo tanto AA^* no es invertible lo cual es absurdo.

Finalmente

$$AA^* = T^2 + S^2 \Rightarrow AA^*(T^2+S^2)^{-1} = Id$$

Ejercicio 3. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$

a) Muestre que $x \neq 0$ es un vector propio si y solo si $|\langle Tx, x\rangle| = \|Tx\| \, \|x\|$

b) Muestre que T admite un valor propio λ tal que $|\lambda| = \|T\|$ si y solo si existe $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$ y

$$|\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$$

c) Sea $(\alpha_n)_n$ una sucesión, muestre que si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^2 = 1$$

entonces

$$\sum_n \alpha_n \alpha_{n+1} < 1$$

Demostración

literal a) Si x es un vector propio y $\lambda \neq 0$ su valor propio asociado, se sigue el resultado.

$\Leftarrow$) Revisar en [4]

literal b

$\Rightarrow$ Sea x_λ el vector propio asociado a λ, entonces

$$Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$$

luego tomando $\tilde{x}_\lambda = x_\lambda / \|x_\lambda\|$ se sigue el resultado.

$\Leftarrow$) Por hipótesis existe $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|T\| = |\langle Tx, x\rangle|$. Por lo tanto, como

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \Rightarrow \|Tx\| \leq |\langle Tx, x\rangle|$$

y por Cauchy-Schwarz

$$\|Tx\| = |\langle Tx, x\rangle|$$

Con lo que, x es un vector propio de T, por lo tanto existe λ tal que

$$Tx = \lambda x,$$

de donde

$$|\langle Tx, x\rangle| = |\langle \lambda x, x\rangle| = |\lambda| \|x\|^2 = |\lambda| = \|T\|$$

literal c

Recordemos que

$$S: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$$
$$x \longmapsto Sx = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

Para $y = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mostremos que $\langle Sy, y\rangle < 1$ donde $\|S\| = 1$

Recordemos que $\sigma_p(S) \neq \emptyset$ y $\sigma(S) \subseteq \bar{D}(0,1)$, más aún $\sigma_p(S) = D(0,1)$

Notemos que $\sum_n \alpha_n \alpha_{n+1}$ no puede ser mayor que 1 pues si lo fuera existiría una contradicción.

Así, por absurdo, se tiene que $\sum_n \alpha_n \alpha_{n+1}$. Por lo tanto, como

$$|\langle Sx_\alpha, x_\alpha\rangle| = \|S\| \quad \text{y} \quad \|x_\alpha\| = 1$$

entonces existe λ_α un v.p de S tal que $|\lambda_\alpha| = 1$, pero $\sigma_d(S_\alpha) = D(0,1)$ lo cual no es posible.

Ejercicio 4. Sea H un espacio de Hilbert complejo y sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Sea

$$W(T) = \left\{ \frac{|\langle Tx, y\rangle|}{\|x\| \|y\|} \;;\; 0 \neq \|x\| \leq 1 \text{ y } 0 \neq \|y\| \leq 1 \right.$$

1) Muestre que

$$\|T\| = \sup W(T)$$

2) Para todo $T \in \mathcal{L}(H)$

$$\omega(T) = \sup \{ |\langle Tx, x\rangle| : \|x\| \leq 1 \}$$

a) Muestre que $\frac{1}{2}\|T\| \leq \omega(T) \leq \|T\|$

b) Muestre que $\omega(T^2) \leq \omega(T)^2$

c) Suponga que T es normal. Muestre que $\|T\| = \omega(T)$

Demostración

literal 1

Notemos que, para x, y no nulos

$$\frac{|\langle Tx, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} \leq \frac{\|Tx\|\,\|y\|}{\|x\|\,\|y\|} \leq \|T\| \quad \Rightarrow \quad W(T) \leq \|T\|$$

Tomando $y = Tx$ con $x \neq 0$, entonces

$$\frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{\|x\|\,\|Tx\|} = \frac{\|Tx\|^2}{\|x\|\,\|Tx\|} = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

con lo que $\|T\| \leq \sup W(T)$ y así

$$\|T\| = \sup(W(T))$$

literal 2

Viernes, 23 de junio de 2023.

Ejercicio 1. Sean E y F espacios de Banach, con $F = \ell^1$ y $T \in \mathcal{L}(E, F)$ sobreyectiva. Muestre que existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que $TS = Id_F$, es decir T admite un inverso por derecha.

Demostración

Como T es sobreyectiva, por el teorema de la aplicación abierta, existe $R > 0$ tal que

$$R B_F = B(0, R) \subseteq T(B_E)$$

Notemos que la base canónica $\{e^n\}_n$ cumple que

$$\frac{1}{2} e^n \in B_F$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\tilde{u}_n \in B_E$ tal que

$$\frac{R}{2} e^n = T\tilde{u}_n \qquad u_n = \frac{2}{R}\tilde{u}_n$$

Con esto, definamos

$$S : F \longrightarrow E$$
$$y \longmapsto Sy = \sum_{j \geq 1} y_i u_i$$

Veamos que S está bien definida

$$\|Sy\|_E \leq \sum_{j \geq 1} |y_i|\,\|u_j\|_E = \sum_{j \geq 1} |y_j| = \|y\|_{\ell^1} < +\infty \qquad [1]$$

Claramente, S es lineal y por [1] está acotada así $S \in \mathcal{L}(E, F)$

Notemos que

$$TS(y) = T\left(\sum_{j \geq 1} y_j u_j\right) = \sum_{j \geq 1} y_j T u_j = \sum_{j \geq 1} y_j e^i = (y_1, y_2, \ldots) = y$$

$$\therefore\ TS = I_F$$

Problema 2. Sean E y F dos espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_F$ respectivamente y $T\in\mathcal{L}(E,F)$ tal que $\operatorname{Img}(T)$ es cerrada y $\dim(\ker(T))<+\infty$

Sobre E definimos otra norma, denotada por $|\cdot|_E$, la cual es más débil que $\|\cdot\|_E$ en el siguiente sentido

$$(\exists M>0)\,(\forall x\in E)\,(\,|x|_E\leq M\|x\|_E)$$

Mostrar que existe $c>0$ tal que

$$(\forall x\in E)\quad(\,\|x\|_E\leq C(\|Tx\|_F+|x|_E))$$

Demostración

Supongamos que para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $\tilde{x}_n\in E$ tal que

$$\|\tilde{x}_n\|>n\left(\|T\tilde{x}_n\|+|\tilde{x}_n|\right) \qquad [1]$$

notemos que para cada $n\in\mathbb{N}$, $\tilde{x}_n\neq 0$. Así, para cada $n\in\mathbb{N}$, escribimos

$$x_n=\frac{1}{\|\tilde{x}_n\|}\tilde{x}_n$$

Gracias a [1], se sigue que

$$\frac{1}{n}>\|Tx_n\|_F+|x_n|_E \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow\qquad \|Tx_n\|<\frac{1}{n}\qquad\wedge\qquad |x_n|<\frac{1}{n}$$

Entonces, como $T:E\to\operatorname{Img}(T)$ es lineal, continuo y sobreyectivo. Además, como T es una aplicación abierta.

Por tanto, existe $R>0$ tal que

$$R\,B_{\operatorname{Img}(T)}\subset T(B_E)$$

Notar que $nTx_n\in B_{\operatorname{Img}(T)}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Así, para todo $n\in\mathbb{N}$, existe $\tilde{y}_n\in B_E$ tal que

$$RnTx_n=T\tilde{y}_n$$

y escribimos $y_n=\tilde{y}_n/Rn$. Con lo que, $x_n-y_n\in\ker(T)$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$x_n=y_n+z_n\qquad\text{con}\quad z_n\in\ker(T),\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

Además, como

$$\big|\|z_n\|-1\big|\leq\big|\|x_n\|+\|y_n\|-1\big|<\left|1+\frac{1}{nR}-1\right|\longrightarrow 0$$

y, por otra parte

$$|z_n|\leq|x_n|+|y_n|<\frac{1}{n}+M\|y_n\|=\frac{1}{n}+\frac{M}{nR}\longrightarrow 0$$

Con lo que $\|z_n\|_E\longrightarrow 1$ y $|z_n|_E\to 0$, pero esto no es posible pues $\ker(T)$ es de dimensión finita.

Problema 3. Sean E y F dos espacios de Banach y $T\in\mathcal{L}(E,F)$ sobreyectiva. Sea $H\subseteq E$, muestre que

$$T(H)\subseteq F\text{ es cerrada si y solo si } H+\ker(T)\subseteq E\text{ es cerrado}$$

$\Rightarrow$) Supongamos que $T(H)$ es cerrada. Sea $x\in E$ tal que $x_m+z_m\longrightarrow x$ con $x_m\in E$ y $z_m\in\ker(T)$

Gracias a la continuidad de T

$$Tx_m = T(x_m + z_m) \longrightarrow Tx \quad \text{en } F$$

Con lo que $Tx \in \overline{Img(T)}$ y así, $x \in H$, como

$$x = x + 0,$$

entonces $x \in H + Ker(T)$. Así, $X + Ker(T)$ es cerrado.

$\Leftarrow)$

Supongamos que $H + Ker(T)$ es cerrado. Como T es una aplicación abierta

$$T((H + Ker(T))^c) \text{ es abierto}$$

luego, como

$$T((H + Ker(T))^c) = T(H + Ker(T))^c = T(H)^c \quad \text{es abierto.}$$

Entonces, $T(H)$ es cerrado.

b)

Lunes, 26 de junio de 2023

Ejercicio. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert complejo

1) Sea T un operador positivo.

a) Muestre que

$$\forall x, y \in H \qquad |\langle Tx, y\rangle|^2 \leq |\langle Tx, x\rangle| |\langle Ty, y\rangle|$$

b) Deduzca que

$$\forall x \in H \qquad \|Bx\|^2 \leq \langle Bx, x\rangle \|B\|$$

c) Sea $C = \|B\| Id - B$. Muestre que existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \|Cy_n\| = 0$$

y que $0 \in \sigma(C)$

2) Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto y notemos

$$a = \inf\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\} \quad \text{y} \quad b = \sup\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$$

a) Muestre que $a, b \in \sigma(A)$

b) Muestre que $\sigma(A) \subseteq [a, b]$

3) Sean A, B operadores definidos positivos con $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$A_1 = \frac{1}{\|A\|} \cdot A \quad \text{y} \quad A_{n+1} = A_n - A_n^2$$

a) Muestre que $0 \leq A_n \leq Id$

b) Muestre que si $AB = BA$, entonces AB es definido positivo.

Demostración

i.b) $\langle Tx, Tx\rangle^2 \leq \langle Tx, x\rangle \langle TTx, Tx\rangle \leq \langle Tx, x\rangle \|T\| \langle Tx, Tx\rangle$

$$\Rightarrow \langle Tx, Tx\rangle \leq \|T\| \langle Tx, x\rangle$$

i.a) Sean $x, y \in H$ fijos, definamos

$$\varphi_x(z) = \langle Tx, z\rangle \qquad \varphi_y(z) = \langle Ty, z\rangle$$

$$|\varphi_x(z)| \leq \|Tx\| \|z\| \qquad \|\varphi_y(z)\| \leq \|Ty\| \|z\|$$

Ejercicio 2

Notemos que $Id\,b - T \geq 0$, i.e., es definido positivo.

Martes, 27 de junio de 2023.

Ejercicio. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador normal. Definimos

$$F = \{ x \in H : \|T^n x\| \leq \|x\| \quad n \geq 0 \}$$

a) Muestre que

$$F = \{ x \in H : (\|T^n x\|)_n \text{ es acotada} \} =: \tilde{F}$$

b) Muestre que F es un subespacio vectorial tal que

$$\forall S \in \{T\}', \quad S(F) \subseteq F$$

$\{A\}'$ es el conmutador de A, $A' = \{ X \in \mathcal{L}(E) : AX = XA \}$

Solución

Claramente $F \subseteq \tilde{F}$. Resta probar que $\tilde{F} \subseteq F$.

Sea $z \in \tilde{F}$, por lo tanto $(\|T^n z\|)_n$ es acotada, existe $M > 0$ tal que

$$\|T^n z\| < M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, como

Resultado por absurdo.

Miércoles, 28 de junio de 2023

Si $y \in S(F)$, entonces $y = Sz$ con $z \in F$, luego

$$\|T^n y\| = \|ST^n z\| \leq \|S\| \|Tz\|^n \leq \|S\| C < +\infty.$$

Por lo tanto,

$$S(F) \subseteq F.$$

Ejercicio. Sea H un espacio de Hilbert complejo y sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador normal

a) Muestre que todo espacio propio de T es ortogonalmente reducido por T

Definición Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y F un s.e.v. cerrado. Decimos que F es ortogonalmente reducido por T si $T(F) \subseteq F$ y $T(F^\perp) \subseteq F^\perp$

Ejercicio. Sea $T: \mathcal{L}^2([0,1]) \to \mathcal{L}^2([0,1])$ tal que

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(y)\, y^2\, dy + x^2 \int_0^1 f(y)\, \frac{y^3}{3}\, dx$$

Notemos que

$$\|Tf\|_{L^2}^2 = \left| \int_0^1 |Tf(z)|^2 dz \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\int_0^1 f(y)\, y^2\, dy + z^2 \int_0^1 f(y)\, \frac{y^3}{3}\, dy \right)^2 dz \right|$$

$$\leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\int_0^1 f(y)\, y^2\, dy + z^2 \int_0^1 f(y)\, \frac{y^3}{3}\, dy \right)^2 dz$$

Acotemos cada término

$$|A+B| \leq |A| + |B|$$

$$|A| \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^1 |f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_0^1 y^4\, dy \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2\sqrt{5}} \|f\|_{L^2}$$

Cauchy - Schwarz

$$|B| \leq \frac{x^2}{3\sqrt{7}} \|f\|_{L^2}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 |Tf(x)|^2 dx \leq \|f\|_{L^2}^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{x^2}{3\sqrt{7}} \right)^2 dx$$

$$\leq \|f\|_{L^2}^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{9\sqrt{3}\sqrt{7}} + \frac{1}{315} \right)^{1/2}$$

Con esto, tenemos que

$$\|T\| \leq \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{9\sqrt{3}\sqrt{7}} + \frac{1}{315} \right)^{1/2}$$

Como T es un operador de rango finito, entonces es compacto y así

$$\sigma(T) = \{0, \underbrace{v_p}_{\text{valores propios}}\}$$

Calculamos los valores propios, i.e., obtenemos todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$.
Notemos que $x \in \sigma_p(T)$ es no nulo; así

$$Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x) \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 f_\lambda(y)\, y^2\, dy + x^2 \int_0^1 f_\lambda(y)\, \frac{y^3}{3}\, dy = \lambda f_\lambda(x)$$

Por lo tanto,

$$J_1(f_\lambda) = \int_0^1 f(y)\, y^2\, dy$$

$$\lambda f_\lambda(x) = \frac{1}{2} J_1(f_\lambda) + x^2 J_2(f_\lambda) \quad \text{con}$$

$$J_2(f_\lambda) = \int_0^1 f(y)\, \frac{y^3}{3}\, dy$$

Entonces, buscamos determinar J_1, para lo cual

$$\lambda \int_0^1 x^2 f_\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 J_1(f_\lambda)\, dx + \int_0^1 x^4 J_2(f_\lambda)\, dx$$

$$\Rightarrow \lambda J_1(f_\lambda) = \frac{J_1(f_\lambda)}{6} + \frac{J_2(f_\lambda)}{5} \Rightarrow \boxed{J_1(f_\lambda)\left(\frac{1}{6} - \lambda\right) + \frac{J_2(f_\lambda)}{5} = 0}$$

Buscamos determinar J_2

$$\int_0^1 \lambda f_\lambda(x)\, \frac{x^3}{3} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3}{3} J_1(f_\lambda)\, dx + \int_0^1 x^5 J_2(f_\lambda)\, dx$$

$$\lambda J_2(f_\lambda) = \frac{1}{2} J_1(f_\lambda) \int_0^1 \frac{x^3}{3}\, dx + \int_0^1 \frac{x^5}{3} J_2(f_\lambda) = \lambda J_2(f_\lambda) = \frac{J_1(f_\lambda)}{24} + \frac{J_2(f_\lambda)}{18}$$

Con lo que se tiene el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}-\lambda\right) & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{18}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(f_\lambda) \\ S_2(f_\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico

$$\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)\left(\frac{1}{18}-\lambda\right) - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{108} - \frac{\lambda}{6} - \frac{\lambda}{18} + \lambda^2 - \frac{1}{120}$$
$$= \lambda^2 - \frac{\lambda}{9} - \frac{1}{1080}$$

Resolviendo

λ

Solución: Ejercicios.

Ejercicio - Lunes 26 de junio - (Ejercicio 6 [3])

literal 1.a) (Generalización de Cauchy-Schwarz para operadores definidos positivos)

Consideremos la aplicación definida por $\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$

$$\Phi(x) = \varphi(x,x) = \langle Tx, x\rangle$$

Como T es definido positivo, entonces T es autoadjunto y además $T \geq 0$, entonces admite un operador $A = T^{1/2}$ (Ver [4] Pág 476), entonces

$$(T^{1/2})^2 = T \Rightarrow A^2 = T \qquad (\text{Además, } A \text{ es autoadjunto})$$

Con esto, notemos que

$$|\langle Tx, y\rangle|^2 = |\langle A^2x, y\rangle|^2 = |\langle Ax, Ay\rangle|^2 \leq |\langle Ax, Ax\rangle|\,|\langle Ay, Ay\rangle|$$
$$= |\langle A^*Ax, x\rangle|\,|\langle A^*Ay, y\rangle|$$
$$= |\langle Tx, x\rangle|\,|\langle Ty, y\rangle|$$

Con esto, se sigue que

$$|\langle Tx, y\rangle|^2 \leq |\langle Tx, x\rangle|\,|\langle Ty, y\rangle|,$$

como se quería.

literal 1.b)

En el literal anterior, tomando $y = Tx$, se sigue que

$$\|Tx\|^4 = |\langle Tx, Tx\rangle|^2 \leq |\langle Tx, x\rangle|\,|\langle TTx, Tx\rangle| \leq |\langle Tx, x\rangle|\,\|T^2x\|\,\|Tx\|$$

Con esto, se sigue que

$$\|Tx\|^4 \leq |\langle Tx, x\rangle|\,\|T^2x\|\,\|Tx\| = |\langle Tx, x\rangle|\,\|T(Tx)\|\,\|Tx\| \leq |\langle Tx, x\rangle|\,\|T\|\,\|Tx\|^2$$

Así,

$$\|Tx\|^4 \leq |\langle Tx, x\rangle|\,\|T\|\,\|Tx\|^2$$
$$\Rightarrow \|Tx\|^2 \leq \|T\|\,|\langle Tx, x\rangle|$$

como se quería.

literal 1.c

Notemos que, definiendo $C = \|T\| \, Id - T$, entonces si $\|x\|=1$, se sigue que

$$\langle Cx, x\rangle = \langle (\|T\| Id - T)x, x\rangle = \langle \|T\| x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle = \|T\| \|x\|^2 - \langle Tx, x\rangle$$

$$\Rightarrow \|T\| - \langle Tx, x\rangle$$

Pero, como T es autoadjunto, se sigue que

$$\langle Cx, x\rangle = \|T\| - \langle Tx, x\rangle \geq 0.$$

Ahora, como

$$\|T\| = \sup \{ |\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$$

entonces, por caracterización de supremo; para todo $\varepsilon>0$, existe x_ε tal que $\|x_\varepsilon\|=1$ y

$$\|T\| - \varepsilon < |\langle Tx_\varepsilon, x_\varepsilon\rangle|$$

Con esto, para $\varepsilon = 1/n$, existe una sucesión $(y_n)_n$ tal que

$$\|T\| = \lim_{n\to+\infty} |\langle Ty_n, y_n\rangle|$$

Con lo que,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle Cy_n, y_n\rangle = \|T\| - \lim_{n\to+\infty} |\langle Ty_n, y_n\rangle| = 0.$$

Usando el literal anterior, esto muestra que

$$\lim_{n\to+\infty} \|C y_n\| = 0.$$

Así, resta probar que $0\in\sigma(C)$. Por contradicción, supongamos que $0\notin\sigma(C)$, i.e., C es invertible, con esto, se tendría que

$$1 = \|y_n\| = \|C^{-1}(C(y_n))\| \leq \|C^{-1}\| \|C(y_n)\| \longrightarrow 0 \quad \Big\} \text{ Aplicando isomorfismos de Banach } C^{-1}\in\mathcal{L}(H)$$

lo cual no es posible y así $0\in\sigma(C)$.

literal 2.a

Notemos que por construcción $b-A\geq 0$ y $A-a\geq 0$. En efecto,

$$\langle (bId - A)x, x\rangle = b\|x\|^2 - \langle Ax, x\rangle \quad\Rightarrow\quad b \geq \langle Ax, x\rangle$$

pues $b=\|A\|$ y A es autoadjunto. Por otro lado,

$$\langle (A - aId)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - a\|x\|^2 \quad\Rightarrow\quad \langle Ax, x\rangle \geq a$$

Pues por construcción

$$b = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| \geq |\langle Ax, x\rangle| \geq \inf_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| = a.$$

Además, se tiene que

$$\langle (bId - A)x, x\rangle = b - \langle Ax, x\rangle$$

tomando el supremo se concluye que

$$\|b - A\| = b - a$$

y análogamente, también se obtiene que

$$\|A - a\| = b - a$$

Con lo que, notando $B = b - A$, entonces

$$C = \|B\| Id - B = (b-a) Id - (b-A) = A - a$$

usando el literal anterior, se sigue que

$$0 \in \sigma(a - A) \quad y \quad 0 \in \sigma(A-b)$$

y más aún $a \in \sigma(A)$ y $b \in \sigma(A)$

<u>literal 2.b)</u>

Puesto que $b - A \geq 0$, entonces $\sigma(b-A) \in \mathbb{R}^+$ y más aún por el teorema del radio espectral

$$\sigma(b-A) \subseteq [0, b-a]$$

con lo que,

$$\sigma(A) \subseteq [a,b]$$

como se quería.

<u>literal 3.a.</u>

Procedemos por inducción, notemos que $A_1 \geq 0$. Además

$$0 \leq |\langle A_1 x, x\rangle| \leq \|A_1 x\| \|x\| \leq \|A_1\| \|x\|^2 = |\langle x, x\rangle|$$

$$\Rightarrow \quad Id - A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Id \geq A_1 \geq 0.$$

con lo que hemos obtenido la base de la inducción.
Ahora supongamos que

$$Id \geq A_k \geq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

P.D. $Id \geq A_{k+1} \geq 0$.

Notemos que

$$A_{k+1} = A_k - A_k^2 = A_k^2 (Id - A_k) + A_k (I - A_k)^2$$

Más aún, se tiene que $0 \leq I - A_k \leq A_k$, de donde se deduce lo requerido.

<u>literal 3b)</u>

Por hipótesis $A_{k+1} = A_k - A_k^2$, de donde $A_k = A_{k+1} - A_k^2$, de esta manera

$$A_1 = A_2 + A_1^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3 = A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 + A_{n+1},$$

con lo que

$$A_1 - A_{n+1} = A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2,$$

Luego, $A_{n+1} \geq 0$, implica que $-A_{n+1} \leq 0$ y por lo tanto

$$A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 \leq A_1$$

De donde,

$$\sum_{k=1}^{n} \|A_k x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle A_k x, A_k x\rangle| = \sum_{k=1}^{n} |\langle A_k^2 x, x\rangle| \leq |\langle A_1 x, x\rangle|$$

así, $\|A_k x\| \longrightarrow 0$, con lo que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \right) x = (A_1 - A_{n+1}) x \longrightarrow A_1 x$$

Finalmente, para $x \in H$ y $y_k = A_k x$

$$\langle ABx, x\rangle = \|A\| \langle BA_1 x, x\rangle = \|A\| \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle BA_n^2 x, x\rangle$$

$$= \|A\| \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\langle By_k, y_k\rangle}_{\geq 0}$$

$$\geq 0.$$

Con lo que se sigue lo requerido.

Ejercicio - Miércoles. 28 de junio de 2023.

<u>literal a)</u>

Sea H un espacio propio. P.D. $T(H) \subseteq H$ y $T(H^\perp) \subseteq H^\perp$

Sea $y \in T(H)$, entonces existen $x \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que

$$y = Tx = \lambda x \quad \Rightarrow \quad y \in H.$$

Sea $y \in T(H^\perp)$ entonces existe $x \in H^\perp$ tal que $y = Tx$, luego, como

$$\langle y, z\rangle = \langle Tx, z\rangle = \langle x, T^* z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle = 0 \quad \text{pues } z \in H^\perp \text{ y } x \in H.$$

Por lo tanto, todo espacio propio es ortogonalmente reducido por T.

<u>literal b.i)</u> Supongamos que H es de dimensión finita.

Sean $\{(\lambda_i, H_i) \; i = 1, \dots, p\}$ las duplas de valor y espacio propio respectivamente de T. Muestre que

$$H = \bigoplus_{i=1}^{p}{}^{\perp} H_i$$

Por absurdo, supongamos que $H^\perp \neq \{0\}$ por lo tanto existe $y \in H^\perp$ no nulo tal que

$$\langle y, x\rangle = 0 \qquad \forall x \in H \qquad [*]$$

donde, sin pérdida de generalidad $x \in H_i$ para algún i. Ahora, notemos que $T|_{G^\perp}$ admite al menos un valor y vector propio tal que

$$T\hat{x} = \lambda \hat{x}$$

Pero en ese caso $\hat{x} \in H_i$, para algún i, lo cual no es posible por $[*]$, por lo tanto $H^\perp = \{0\}$

Ejercicio. Considere $A \in \mathcal{L}(E)$, con $E = (\mathcal{C}([0,1]), \mathbb{R})$ y $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_\infty$ definido por

$$Af(x) = \int_0^1 e^{xy} f(y)\, dy$$

a) Encuentre $\|A\|$

b) Encuentre $\sigma(A)$

<u>literal a)</u>

Notemos que

$$|Af(x)| = \int_0^1 (e^x)^y f(y)\,dy \leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 (e^x)^y f(y)\,dy = \int_0^1 e^y f(y)\,dy \leq e\|f\|$$

Por otro lado, si consideramos $\hat{f} \equiv 1$, entonces

$$|A\hat{f}(x)| = \int_0^1 (e^x)^y\, dy = \frac{1}{x}(e^x - 1) \longrightarrow +\infty \qquad ?$$

Puesto que el operador es de rango finito, entonces es compacto y así

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_p(A)$$

Con esto, se tiene que para $\lambda \in \sigma_p(A)$ existe $f_\lambda \in E$ tal que

$$Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x) \qquad \forall x \in [0,1],$$

es decir, se tiene que

$$Tf_\lambda(x) = \int_0^1 e^{xy} f(y)\,dy = \lambda f_\lambda(x) \quad \Rightarrow \quad e^x \int_0^1 e^y f(y)\,dy = \lambda f_\lambda(x)$$

Ejercicio. Consideremos $H = L^2([a,b])$. Definamos T de la forma

$$Tf(x) = \int_a^b e^{x-y} f(y)\,dy$$

a) Muestre que T es compacto
b) Para que valores de μ el problema (1) tiene solución

$$(T - \mu\, Id) f = g$$

admite solución única con $g \in H$

<u>literal a</u>

Para mostrar que T es compacto, mostremos que es de rango finito. Así, como

$$Tf(x) = e^x \int_a^b e^{-y} f(y)\,dy = e^x \underbrace{S(f)}_{\in \mathbb{R}}$$

entonces $Img(T) \subseteq span\{e^x\}$, por lo tanto T es compacto.

<u>literal b</u>

Por el literal anterior, basta encontrar los μ tales que

$$\mu \notin \sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$$

Así, sea $\lambda \in \sigma_p(T)$, entonces existe f_λ tal que $Tf_\lambda = \lambda f_\lambda$, con lo que

$$Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x) \iff \int_a^b e^{x-y} f_\lambda(y) = \lambda f_\lambda(x) \iff e^x \int_a^b e^{-y} f_\lambda(y)\,dy = \lambda f_\lambda(x)$$

Luego

$$\int_a^b e^{-y} f_\lambda(y)\,dy = \lambda e^{-x} f_\lambda(x) \Rightarrow \int_a^b S(f_\lambda)\,dx = \lambda \int_a^b e^{-x} f_\lambda(x)\,dx$$

donde $S(f_\lambda) = \int_a^b e^{-y} f_\lambda(y)\,dy$. Así

$$(b-a) S(f_\lambda) = \lambda S(f_\lambda) \Rightarrow \lambda = b-a.$$

Con lo que $\sigma(T) = \{0, b-a\}$, por lo tanto para $\mu \in R_T$, el problema admite solución.

c) Encuentre el operador inverso de $(T - \mu\, Id) f = g$ con $\mu \in R_T$, deduzca la solución explícita del problema

Como $\mu \in R_T$, entonces el problema admite solución única

$$(T - \mu\, Id) f = g$$

con esto, se sigue que para $x \in [a,b]$

$$(T - \mu\, Id)(f)(x) = g(x) \iff \int_a^b e^{x-y} f(y)\,dy - \mu f(x) = g(x)$$

De esta manera,

$$e^{x}\int_a^b e^{-y}f(y)\,dy - \mu f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{I}(f) - e^{-x}\mu f(x) = e^{-x}g(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \mathfrak{I}(f)dx - \int_a^b \mu e^{-x}f(x)\,dx = \int_a^b e^{-x}g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow (b-a)\,\mathfrak{I}(f) - \mu\,\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(g)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{I}(f)\,(b-a-\mu) = \mathfrak{I}(g)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{I}(f) = (b-a-\mu)^{-1}\mathfrak{I}(g)$$

Con esto, se sigue que en la ecuación anterior

$$e^{x}(b-a-\mu)^{-1}\mathfrak{I}(g) - \mu f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow \mu f(x) = g(x) - e^{x}(b-a-\mu)^{-1}\mathfrak{I}(g)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\mu}\left(g(x) - e^{-x}(b-a-\mu)^{-1}\mathfrak{I}(g)\right)$$

con lo que se sigue lo requerido.

Observación: Respecto al literal b.i del ejercicio del miércoles 28 de junio de 2023

Sean H un espacio de Hilbert de dimensión infinita, V un subespacio vectorial propio. Definamos el operador proyección

$$P : H \longrightarrow V$$

Luego, el operador complementario es $(Id - P)$

↳ Puesto que P es autoadjunto, más aún es un operador normal.

↳ Además, los valores propios de P están dados por:
Para λ un valor propio de P, se tiene que

$$\lambda^2 v = P^2 v = Pv = \lambda v \quad\Rightarrow\quad \lambda^2 v = v\lambda \quad\Rightarrow\quad \lambda^2 - \lambda = 0$$

Por lo tanto, $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$, no obstante su suma sí es igual a todo el espacio

Martes, 4 de julio de 2023.

Definición 3.13. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, definimos

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda Id \text{ no es invertible}\}$$

Llamaremos conjunto resolvente del operador T al conjunto $R(T) = (\sigma(T))^c$

Teoría elemental del espectro en [4] Pág 365

Si $\beta \in R(T)$, definimos el operador resolvente de T asociado a β como

$$R_\beta(T) : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto R_\beta(T)(x) = (T - \beta Id)^{-1}x$$

Así, podemos definir

$$g : R(T) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$\beta \longmapsto g(\beta) = (T - \beta Id)^{-1}$$

Definición 3.14. Sea $\lambda \in \sigma(T)$. Decimos que λ es un valor propio de T si

$$\ker(T-\lambda Id) \neq \{0\}$$

Al conjunto de valores propios de T lo llamaremos espectro puntual de T y lo notaremos

$$\sigma_d(T) = \sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$$

- Si $\lambda \in \sigma_d(T)$, existe $x_\lambda \in E$ tal que $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$. Al vector x_λ se lo llama vector propio asociado de T a λ.
- Si $\lambda \in \sigma_d(T)$. Definimos la multiplicidad de λ como $\dim(\ker(T-\lambda Id))$

Definición 3.15 Definimos el espectro continuo de T como:

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \notin \sigma_d(T) \text{ y } \overline{Img(T-\lambda Id)} = E \text{ pero no es cerrada}\}$$

Definición 3.16. Definimos el espectro residual como

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \notin \sigma_d(T) \text{ y } \overline{Img(T-\lambda Id)} \neq E\}$$

Definición 3.17 Definimos el espectro escencial de T como

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

Observación $\{\sigma_{ess}(T), \sigma_d(T)\}$ forman una partición del espectro.

$\{\sigma_d(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T)\}$ forman una partición del espectro.

Proposición 3.18 Se tiene que $\sigma(T)$ es un conjunto compacto no vacío.

(Identidad del resoluente) $(\lambda_0 - \lambda_1) R_{\lambda_0} R_{\lambda_1} = R_{\lambda_0} - R_{\lambda_1}$

Para más referencias ver los apuntes del semestre pasado.

Miércoles, 5 de junio de 2023.

Proposición: Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, entonces $\sigma(T)$ es compacto y no vacío.

Mostremos que

$$\varphi : Inv(E) \to \mathcal{L}(E).$$
$$T \mapsto \varphi(T) = T^{-1} \quad \text{es continua.}$$

Es suficiente mostrar que φ es continuo en Id

En efecto ya que la composición es continua en $\mathcal{L}(E)$ y si φ es continua en Id_E

Si $(T_n) \in Inv(E)$ y $T \in Inv(E)$ tal que $T_n \to T$, mostremos que $T_n^{-1} \to T^{-1}$

Notemos que $T_n T^{-1} \to Id$, como φ es continua

$$T T_n^{-1} \to Id \iff T_n^{-1} \to T^{-1}$$

Supongamos que $T_n \to T$, mostremos que

$$\lim_{n\to+\infty} T_n^{-1} = Id$$

Tomando $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\}$, se tiene que si $\delta > 0$

$$(T_n - Id + Id)^{-1} = T_n^{-1} = \sum_{k \geq 0} (T_n - Id)^k$$

$$\Rightarrow \| T_n^{-1} - Id \| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \| T_n - Id \|^n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \delta^k = \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$$

Con esto, se sigue que g (ver apuntes 2022B) es continua

Se dice que f es analítica en $z_0 \in \Omega$ si existe $(x_n)_n \subseteq E$ y $r > 0$, tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z - z_0)^n x_n \qquad \forall z \in B(z_0, r)$$

Una función es holomorfa

$$f: \Omega \longrightarrow E$$

E es un espacio de Banach complejo y $\mathbb{C} \supseteq \Omega$

Se dice que f es holomorfa en $\lambda_0 \in \Omega$ si

$$f'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

$\forall \lambda_0 \in \Omega$ y

$$f': \Omega \longrightarrow E$$
$$\lambda_0 \longmapsto f'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

Proposición: Se tiene que f es analítica en z_0 si y solo si f es holomorfa.

Teorema Liouville. Sea $f: \Omega \longrightarrow E$ una función holomorfa en Ω y acotada, entonces f es constante.

Regresando a nuestro caso

Como g es continua, utilizando la identidad del resolvente,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{g(\lambda_0) - g(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} = g^2(\lambda)$$

Por lo tanto, se sigue que

$$g': \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$\lambda \longmapsto g'(\lambda) = g^2(\lambda)$$

la cual es continua por ser la composición de operadores continuos

Notemos que

$$\| g(\lambda) \| = \| (T - \lambda Id)^{-1} \| \leq |\lambda|^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \left(\frac{T}{n}\right)^n \right\| = |\lambda|^{-1} \frac{1}{1 - \|\frac{T}{\lambda}\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$$

Así, existe $r > 0$ tal que $\forall \lambda \notin \bar{D}(0,1)$, $\frac{1}{|\lambda| - \|T\|} < 1$

Tomando $M = \max\{1, \sup \|g(\lambda)\|\}$ así, g es acotado y más aún

$$g(\lambda) = T$$

para algún $T \in Inv(E)$.

Además, por lo anterior, tenemos que $\lim_{|\lambda| \to +\infty} \|g(\lambda)\| = 0$ entonces se sigue que $T = 0$, lo que no es posible.

Definición 3.19. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, definimos el radio espectral de T, notado como

$$\rho(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(\lambda)} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(\lambda)} |\lambda|$$

Observación: Con lo anterior, tenemos que

$$\sigma(T) \subseteq \bar{D}(0, \rho(T)) \subseteq \bar{D}(0, \|T\|)$$

Si T es autoadjunto, entonces si $\sigma(T) = 0$, entonces $T = 0$. (Use el ejercicio del lunes 26 de junio literal 2) y propiedades de la norma del adjunto).

Proposición 3.20

- Si T es invertible $\sigma(T^{-1}) = \sigma(T)^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(T) \right\}$.
- Si $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$
- Si P es un polinomio, en $\mathbb{C}$, entonces $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$

Observación:

Si T es invertible, entonces $0 \notin \sigma(T)$.

Consideremos $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \neq 0 \longmapsto f(z) = z^{-1}$

entonces f es holomorfa

Demostración.

Sea $\lambda \in \sigma(T^{-1})$, entonces

$$T^{-1} - \lambda Id = \lambda \left(\frac{T^{-1}}{\lambda} - Id \right) \Rightarrow \lambda \left(\frac{Id}{\lambda} - T \right) \quad \text{no es invertible}$$

análogamente, se tiene el recíproco

literal b

- Sea $\lambda \in P(\sigma(T))$, entonces existe $\beta \in \sigma(T)$ tal que $\lambda = P(\beta)$, tomando

$$Q(x) = P(x) - \lambda$$

entonces β es una raíz de Q y así, como $P(T) - \lambda Id$ no es invertible, entonces

$$P(T) - \lambda Id = (T - \beta Id)\, k(T) \quad \text{no es invertible}$$

por lo tanto, $P(T) - \lambda Id$ no es invertible.

- Sea $\lambda \in \sigma(P(T))$, mostremos que $\lambda \in P(\sigma(T))$

$$P(x) - \lambda = (\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x) \cdots (\alpha_n - x)$$

$$P(T) - \lambda Id = (T - \alpha_1 Id)(T - \alpha_2 Id) \cdots (T - \alpha_n Id)$$

Así, existe $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tal que $T - \alpha_i Id$ no es invertible, con

$$P(\alpha_i) = \lambda \Rightarrow \lambda \in P(\sigma(T))$$

Viernes 7 de julio de 2023.

Teorema 3.21 - Radio espectral-

Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, entonces

$$\rho(T) = \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Demostración Teorema 7.5-5 [4]

Capítulo 4: Operadores Compactos

Definición 4.1. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach y T aplicación lineal de E en F

Decimos que T es un operador compacto si $T(\overline{B_E})$ es un conjunto relativamente compacto de $(F, \|\cdot\|_F)$.

Observación: Si T es un operador compacto entonces T es continuo. En efecto, como $T(B_E)$ es compacto, se tiene que es acotado

$$\|Tx\| < M \qquad \forall x \in \overline{B_E}$$

$$\Rightarrow \|Ty\| < M\|y\| \qquad \text{con } x = y/\|y\|.$$

Al conjunto de los operadores compactos de E en F se los notará $K(E,F)$

Proposición 4.2. Se tiene las siguientes equivalencias

a) T es un operador compacto

b) Para todo $A \subseteq E$ acotado, $T(\bar{A})$ es relativamente compacto.

Además, se tiene que

i) $K(E,F)$ es un s.e.v. cerrado de $\mathcal{L}(E,F)$

ii) Si $S: F \to G$ con G un espacio de Banach y S un operador lineal

- Si $T \in K(E,F)$ y $S \in \mathcal{L}(F,G)$

$$ST \in K(E,G)$$

- Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y $S \in K(F,G)$

$$ST \in K(E,G)$$

Se tiene que

Demostración: Ver apuntes 2022B

Observación: Note que $\mathcal{L}(E)$ es un álgebra de Banach no conmutativa con unidad. Recordemos que $S \in \mathcal{L}(E)$ es dicho un ideal por derecha (izquierda)

> Si S es un grupo aditivo

> Si $\forall s \in S$ y $\forall T \in \mathcal{L}(E)$ $\quad TS \in S$ derecha $\quad ST \in S$ izquierda.

Definición 4.3. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach y T un operador de $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Decimos que T es de rango finito si $\dim(\mathrm{Img}(T)) < \infty$

Al conjunto de los operadores de rango finito se los nota $R(E,F)$.

Observación. $\overline{R(E,F)} \subseteq K(E,F) \qquad R(E,F)$ es un s.e.v. de $\mathcal{L}(E,F)$.

Lunes, 10 de julio de 2023.

Proposición 4.4 Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$, entonces T envía convergencias débiles a convergencias fuertes.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, consideremos que $x_n \rightharpoonup 0$, P.D. $(Tx_n)_n \to 0$.

Supongamos por absurdo que $(Tx_n)_n$ no converge fuertemente al cero. Entonces existe $\hat{\varepsilon} > 0$ tal que

$$\|Tx_n\| > \hat{\varepsilon} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, podemos construir $(x_{n_k})_k$ subsucesión tal que

$$\|Tx_{n_k}\| > \hat{\varepsilon} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad [*]$$

Además, tenemos que $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada dentro de $\overline{T(\bar{B}(0,r))}$ para algún $r>0$ y como este es compacto en $(F, \|\cdot\|_F)$ entonces admite una subsucesión convergente $(Tx_{n_k})_k$ (notada de la misma forma) que converge fuertemente. Es decir, existe $y \in F$ tal que

$$y = \lim_{k\to+\infty} Tx_{n_k}$$

Luego, por unicidad del límite tenemos que $y=0$. Pero esto es una contradicción con $[*]$ lo que concluye el resultado.

Observación: Si E es reflexivo y T una aplicación lineal de E en F tal que envíe convergencias débiles en convergencias fuertes, entonces T es compacto.

Demostración

Sea $(y_n)_n \subseteq T(\bar{B}_E)$. P.D. $(y_n)_n$ admite una subsucesión convergente fuertemente. Como para todo $n\in\mathbb{N}$, $y_n = Tx_n$, con $x_n \in \bar{B}_F$, entonces como la bola es compacta pues E es reflexiva, se sigue que existe $x \in \bar{B}_F$ tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$. Por hipótesis, tenemos que $T(x_{n_k})_k$ converge fuertemente a Tx. Por lo tanto

$$y_{n_k} = Tx_{n_k}$$

converge fuertemente.

Note que en este caso $T(\bar{B}_E)$ es compacta; en efecto, $(y_n)_n \in T(\bar{B}_E)$ tal que $y_n \longrightarrow y$

$$T(x) = y \qquad y \in T(\bar{B}_E)$$

Teorema de Schauder 4.5. Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$, entonces

$$T \in K(E,F) \iff T^* \in K(F^*, E^*)$$

Teorema: Ársela - Ascoli 4.6 Sea K en espacio métrico compacto y consideremos

$$\mathcal{C}(K) = \{ f : K \longrightarrow \mathbb{K} \text{ continuas} \}$$

entonces $(\mathcal{C}(K), d_\infty)$ es un espacio métrico completo.

Sea $A \subseteq \mathcal{C}(K)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

> A es relativamente compacto

> A es equicontinuo y acotado.

Definición 4.7. -Equicontinuo- Sea $A \subseteq \mathcal{C}(K)$. decimos que A es equicontinuo si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in A$$

Demostración - Teorema 4.5 -

Supongamos que $T \in K(E)$. Mostremos que $T^*(\bar{B}_E)$ es relativamente compacto. Sea $(v_n)_n \subseteq T^*(\bar{B}_E)$, mostremos que $(v_n)_n$ admite una subsucesión convergente fuertemente.

Consideremos $K = \overline{T(B_E)}$, compacto, definamos

$$K = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n : K \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \varphi_n(x) = \langle w_n, x \rangle_{E^* \times E} \end{array} \right\}$$

$K \subset \mathcal{C}(K)$ es relativamente compacto en $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$

Gracias al teorema de Arsela-Ascoli es suficiente mostrar que K es equicontinuo y acotado

- Acotado:

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq \|w_n\| \, \|x\| \leq M$$

- Equicontinuo

$|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq \|w_n\| \, \|x-y\| \leq \|x-y\|$ Tomando $\varepsilon = \delta$ se tiene lo requerido

Por lo tanto, $(\varphi_n)_n$ admite una subsucesión convergente en $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$, es decir, existe $f \in C(K)$ tal que

$$\|\varphi_{n_k} - \varphi\|_\infty \longrightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x \in \overline{B}_E} |\langle w_{n_k}, Tx\rangle_{E' \times E} - \varphi(Tx)| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x \in \overline{B}_E} |\langle T^* w_{n_k}, x\rangle - \varphi(Tx)| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

De esta manera $T^*(w_{n_k})$ es una sucesión de Cauchy en E' y por lo tanto $(v_{n_k})_k$ converge fuertemente, entonces $T^* \in K(E^*)$

$\Leftarrow$) Recíprocamente

Supongamos que T^* es compacto, mostremos que $T \in K(E')$

Por lo anterior, $T^{**} \in K(E'')$, luego como

$$J_E \circ T = T^{**} \circ J_E$$

Así, como T^{**} es compacto, [Usando 4.2] $J_E \circ T$ es compacta y como J_E no puede ser compacta [Por teorema de Riez], entonces T es compacta

Observación: La demostración también es válida para mostrar el caso $K(E,F)$.

Proposición 4.8. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ con H un espacio de Hilbert. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

Ver teo 3.1.7 [5]

a) $T \in \overline{R(H)}$

b) $T \in K(H)$

c) $T(\overline{B}_H)$ es compacta

d) Toda sucesión que converge débilmente a 0 su imagen $(Te_n)_n$ converge fuertemente a 0.

e) La imagen de todo sistema ortonormal en H por T converge fuertemente al cero.

Martes, 11 de julio de 2023.

Ejercicio. Consideremos $E = (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Muestre que $K(H) = \overline{R(H)}$

Consideremos $A \in K(E)$, mostremos que existe $(A_n)_n$ tal que $\|A_n - A\| \to 0$. Sabemos que $A(\overline{B}_E)$ es relativamente compacta en E, por Arsela-Ascoli:

› $A(\overline{B}_E)$ es acotado › $A(\overline{B}_E)$ equicontinuo

Como $A(\overline{B}_E)$ es equicontinuo:

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x,y\in[0,1])\ (|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$

$$\Leftrightarrow (|x-y|<\delta \Rightarrow |Af(x)-Af(y)|<\varepsilon) \quad \|f\|<1.$$

Como $[0,1]$ es compacto, entonces es cerrado y precompacto, i.e., existen $x_1,\dots,x_\delta\in[0,1]$ tales que

$$[0,1]=\bigcup_{i=1}^{n_\delta} B(x_i,\delta)$$

Utilizando la partición de la unidad asociada $\{B(x_i,\delta)\}_{i=1}^{n_\delta}$

Es decir, $(\varphi_i)_{i=1}^{n_\delta}\in C([0,1])$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n_\delta}\varphi_i(x)=1 \qquad \varphi_i\geq 0 \qquad \forall i\in\{1,\dots,n_\delta\}$$

Si $x\notin B(x_j,\delta)\Rightarrow \varphi_i(x)=0$

Con esto, definamos

$$A_\varepsilon f(x)=\sum_{i=1}^{n_\delta} Af(x_i)\,f_i(x)$$

Mostremos que $\|A_\varepsilon - A\|_{\mathcal{L}(E)}\to 0$

Notemos que

$\|f\|<1 \qquad \|(A_\varepsilon-A)f\|_E=\sup_{x\in[0,1]}\|(A_\varepsilon f-Af)x\|$

Luego

$$|A_\varepsilon f(x)-Af(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n_\delta} Af(x_i)\varphi_i(x) - Af(x)\cdot\underbrace{1}_{\sum_{i=1}^{n_\delta}\varphi_i(x)=1.}\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n_\delta}(Af(x_i)-Af(x))\varphi_i(x)\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n_\delta}|Af(x_i)-Af(x)|\,\varphi_i(x)$$

⇨ Ahora, si $x\in B(x_i,\delta)$

$$|Af(x_i)-Af(x)|\,|\varphi(x_i)|\leq\varepsilon|\varphi_i(x)|$$

si $x\notin B(x_i,\delta)\Rightarrow \varphi_i(x)=0$

En ambos casos se tiene la desigualdad

Con lo que

$$\sum_{i=1}^{n_\delta}|Af(x_i)-Af(x)|\,|\varphi_i(x)| \leq \varepsilon\sum_{i=1}^{n_\delta}|\varphi_i(x)| = 1$$

Ejercicio. Ahora consideremos ℓ^p con $p\neq+\infty$. Así, si $T\in K(\ell^p)$ mostremos que existen $(T_n)_n\in R(\ell^\infty)$ tal que

$$\|T_n-T\|_{\mathcal{L}(E)}\to 0$$

Observación: En el caso general, si E admite una base de Schauder, existe $(T_n)_n\subseteq R(E)$ tal que

$$\|I(x)-T_n(x)\|\to 0$$

con $x=\sum_{i=1}^{+\infty} x_ie_i$ y $(e_i)_i$ una base de Schauder

Como T es compacto, entonces $T(\overline{B}_{\ell^p})$ es relativamente compacto, por otro lado como ℓ^p admite una base de Schauder entonces para todo $x\in\ell^p$, con $x=(x_1,x_2,\dots)$

$$x=\sum_{i=1}^{+\infty}x_ie_i \qquad \text{con } (e_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ base de Schauder}$$

Así, definiendo

$$T_N:\ell^p\longrightarrow\ell^p$$
$$x\longmapsto\sum_{i=1}^{N}x_ie_i$$

Ejercicio 6.2 Brezis Pág 171. Sean E y F espacios de Banach, y sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

a) Asuma que E es reflexivo. Muestre que $T(\overline{B_E})$ es cerrado (fuertemente)

b) Asuma que E es reflexivo y $T \in K(E,F)$. Pruebe que $T(\overline{B_E})$ es compacta.

c) Sea $E = F = C([0,1])$ y $Tu(t) = \int_0^t u(s)ds$. Muestre que $T \in K(E)$. Muestre que $T(\overline{B_E})$ no es cerrado.

literal a) [Ver stack 2330189]

Puesto que E es reflexivo; entonces B_E es compacta en $\sigma(E,E')$. Más aún, como T es continuo, más aún es débil-débil continuo. Así, $T(\overline{B_E})$ es débilmente compacto, más aún cerrada y como es convexa es cerrada fuertemente.

literal b)

Por hipótesis, sabemos que $T(\overline{B_E})$ es relativamente compacto, por lo tanto, resta probar que es cerrado, i.e, $T(\overline{B_E}) = \overline{T(\overline{B_E})}$

Sea $(y_n)_n \subseteq T(\overline{B_E})$ tal que $y_n \to y$. P.D. $y \in T(\overline{B_E})$. Notemos que existe $(x_n)_n \subseteq \overline{B_E}$ tal que $y_n = Tx_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, como E es reflexivo, entonces $(x_n)_n$ admite una subsucesión convergente $x_{n_k} \rightharpoonup x$; así, como $T \in K(E,F)$

$$Tx_{n_k} \to Tx.$$

Más aún, por unicidad del límite

$$y_{n_k} = Tx_{n_k} \to Tx = y$$

Así, $y \in T(\overline{B_E})$ y $T(\overline{B_E})$ es compacta.

literal c) [Sugerencia Brezis Pág 412]

Puesto que $K = T(\overline{B_E}) \subseteq C([0,1])$ entonces por Árcela-Ascoli basta probar que

› K es acotado y equicontinuo

■ Acotado.

Sea $f \in K$, notemos que

$$\|f(t)\| = |f(t)| = \left|\int_0^t u_f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_0^t \|u_f\|_\infty\,dt\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|u_f\| \leq 1$$

Por otro lado, tambien se puede argumentar que

$$T(\overline{B_E}) \subseteq B(0,\|T\|)$$

■ Equicontinuo

Sea $u \in \overline{B_E}$, con $\|u\|_\infty \leq 1$, notemos que

$$|Tu(x_1) - Tu(x_2)| = \left|\int_0^{x_1} u(t)\,dt - \int_0^{x_2} u(t)\,dt\right| = \left|\int_{x_1}^{x_2} u(t)\,dt\right| \leq |x_2 - x_1| < \delta = \varepsilon$$

Así, por Árcela-Ascoli, T es compacto.

Por otro lado, para proba que no es cerrado consideremos

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ n\left(x - \frac{1}{n}\right) & \text{si } x \in \left]1/2, 1/2 + 1/n\right[\\ 1 & \text{si } x \in [1/2 + 1/n, 1] \end{cases}$$

así, $\|u_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $T((u_n)_n) \subseteq T(\overline{B_E})$ y $Tu_n \in C'([0,1])$, luego $Tu_n \to f$. P.D. $f \notin C'([0,1])$

Notemos que

$$T\mathcal{U}_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ n\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right) & \text{si } x \in]1/2, 1/2 + 1/n[\\ x - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) & \text{si } x \in [1/2 + 1/n, 1] \end{cases}$$

Ejercicio. Consideramos $A_r : L^2([-1,1]) \longrightarrow L^2([-1,1])$

(Ejercicio VII.2 [4])

$$f \longmapsto A_r f(x) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{3}{2} x u + r u^2\right) f(u)\, du.$$

a) Muestre que $A_r \in \mathcal{L}(H)$

b) Muestre que $A_r \in R(H)$

c) Encontrar el operador adjunto de A_r. ¿Para que valores de r, A_r es autoadjunto?

d) $\sigma(A_r)$ A_r autoadjunto $R(A_r)$ Operador resolvente.

literal a)

Claramente T es lineal, resta ver que es acotado; para ello, notemos que

$$\|A_r f\|_{L^2} = \left(\int_{-1}^{1} |f(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\int_{-1}^{1} \left|\int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{3}{2} x u + r u^2\right) f(u)\, du\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

De esta manera, como

$$\left|\int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{3}{2} x u + r u^2\right) f(u)\, du\right|$$

$$\leq \left| x^2 \int_{-1}^{1} |f(u)|\, du + \frac{3x}{2} \int_{-1}^{1} u|f(u)|\, du + r \int_{-1}^{1} u^2 f(u)\, du \right|$$

$$\leq \left| 2x^2 \|f\|_{L^2} + \frac{3}{2} x \|f\|_{L^2} \left(\int_{-1}^{1} u^2 du\right)^{1/2} + r \|f\|_{L^2} \left(\int_{-1}^{1} u^4 du\right)^{1/2} \right|$$

$$\leq \left| 2x^2 \|f\|_{L^2} + \frac{3}{2} x \|f\|_{L^2} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} + r \|f\|_{L^2} \left(\frac{2}{5}\right)^{1/2} \right|$$

$$\leq \|f\|_{L^2} \left| 2x^2 + \frac{3}{2} x \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} + r \left(\frac{2}{5}\right)^{1/2} \right| \leq \|f\|_{L^2} M$$

Pues es una función continua sobre un compacto

Entonces

$$\left|\int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{3}{2} x u + r u^2\right) f(u)\, du\right|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 M^2$$

Con lo que

$$\|A_r f\|_{L^2} = \left(\int_{-1}^{1} \left|\int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{3}{2} x u + r u^2\right) f(u)\, du\right|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_{-1}^{1} \|f\|_{L^2}^2 M^2\, dx\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{2} \cdot M \, \|f\|_{L^2}$$

literal b)

Notemos que

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{3}{2}xu+ru^2\right)f(u)\,du$$

$$= x^2\int_{-1}^{1} f(u)du + \frac{3}{2}x\int_{-1}^{1} uf(u)du + r\int_{-1}^{1} u^2f(u)\,du$$

$$= \left(\int_{-1}^{1} f(u)du\right)e_2 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} uf(u)du\right)e_1 + r\left(\int_{-1}^{1} u^2f(u)\,du\right)e_0$$

con $\{e_0, e_1, e_2\} = B$ la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$; así

$$\text{Img}(T) \subseteq \text{Span}(B)$$

De esta manera, T es un operador de rango finito, i.e.

$$T \in K(L^2([-1,1]))$$

literal c)

Por definición de adjunto, tenemos que

$$\langle A_r f, h\rangle = \langle f, A_r^* h\rangle \qquad \forall f,g \in H$$

(Pues $H = L^2([-1,1])$ es un espacio de Hilbert)

De esta manera, notemos que

Usando el teorema de Fubini 3.4.4 Pág(186)

$$\langle A_r f, h\rangle = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{3}{2}xu+ru^2\right)f(u)\,du\right)\overline{h(x)}\,dx$$

~~why?~~

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{3}{2}xu+ru^2\right)\overline{h(x)}\,dx\right)f(u)du$$

$$= \int_{-1}^{1}\overline{\left(\int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{3}{2}xu+ru^2\right)h(x)\,dx\right)}f(u)\,du$$ Pues la función devuelve valores reales.

$$= \langle f, A_r^* h\rangle$$

De esta manera se deduce que

$$A_r^* h\,(x) = k(x) = \int_{-1}^{1}\left(s^2+\frac{3}{2}sx+rx^2\right)h(s)\,ds$$ ← Es decir, este es el operador adjunto.

Por lo tanto, notemos que el adjunto se obtiene al intercambiar los roles de las variables en el operador. Así, para que A_r sea autoadjunto, se necesita que $A_r = A_r^*$, i.e.

$$A_r - A_r^* = 0 \iff (A_r - A_r^*)(f) = 0 \quad \forall f \in L^2([-1,1]) \iff (A_r - A_r^*)(f)(x) = 0 \quad \forall f \quad \forall x \in [-1,1]$$

Es decir,

$$\int_{-1}^{1}\left[x^2+\frac{3}{2}xu+ru^2\right]f(u)du - \int_{-1}^{1}\left(u^2+\frac{3}{2}ux+rx^2\right)f(u)du = 0$$

$$\iff \int_{-1}^{1}\left[\left(x^2+\frac{3}{2}xu+ru^2\right)-\left(u^2+\frac{3}{2}ux+rx^2\right)\right]f(u)\,du = 0$$

$$\iff \int_{-1}^{1}\left[x^2-u^2+ru^2-rx^2\right]f(u)\,du = 0$$

$$\iff \int_{-1}^{1}\left[x^2(1-r)-u^2(1-r)\right]f(u)\,du = 0$$

$$\iff \int_{-1}^{1}(1-r)(x^2-u^2)f(u)du = 0$$

Ahora, si consideramos $x=1$ y $f(u)=1$, entonces

$$\int_{-1}^{1}(1-r)(1-u^2)\,du = 0 \iff -\frac{2}{3}(r-1)=0 \iff r=1$$

De esta manera, para $r=1$, el operador es autoadjunto y por la unicidad del mismo, si sigue que únicamente para este valor, el operador es autoadjunto

literal d) (Espectro del operador)

Puesto que A_r es un operador compacto, entonces

$$\sigma(A_r) = \{0\} \cup \sigma_p(A_r)$$

Además, para A_1 $(r=1)$, $\sigma_p(A_1) \subseteq \mathbb{R}$. Así, sea $\lambda \in \sigma_p(A_1)$, entonces existe f_λ tal que

$$A_r f_\lambda = \lambda f_\lambda \Rightarrow (A_r f_\lambda)(x) = \lambda f_\lambda(x)$$

Es decir, se tiene que

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{3}{2}xu+u^2\right)f_\lambda(u)\,du = \lambda f(x)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}x^2 f_\lambda(u)\,du + \int_{-1}^{1}\frac{3}{2}xu f_\lambda(u)\,du + \int_{-1}^{1}u^2 f(u)\,du = \lambda f(x)$$

$$\Rightarrow x^2\int_{-1}^{1}f_\lambda(u)\,du + \frac{3}{2}x\int_{-1}^{1}u f_\lambda(u)\,du + \int_{-1}^{1}u^2 f(u)\,du = \lambda f(x)$$

Definiendo

$$J_1(f_\lambda) = \int_{-1}^{1}f_\lambda(u)\,du, \quad J_2(f_\lambda)=\int_{-1}^{1}u f_\lambda(u)\,du \quad \text{y} \quad J_3(f_\lambda)=\int_{-1}^{1}u^2 f(u)\,du$$

entonces

$$x^2 J_1(f_\lambda) + \frac{3}{2}x J_2(f_\lambda) + J_3(f_\lambda) = \lambda f(x) \qquad [1]$$

Así, se sigue que

$$J_1(f_\lambda)\int_{-1}^{1}x^2\,dx + \cancel{\frac{3}{2}J_2(f_\lambda)\int_{-1}^{1}x\,dx}^{\,0} + J_3(f_\lambda)\int_{-1}^{1}dx = \lambda\int_{-1}^{1}f_\lambda(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}J_1(f_\lambda) + 2J_3(f_\lambda) = \lambda J_1(f_\lambda)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}-\lambda\right)J_1(f_\lambda) + 2J_3(f_\lambda) = 0 \qquad [A]$$

Por otro lado, notemos que, de [1],

$$x^3 J_1(f_\lambda) + \frac{3}{2}x^2 J_2(f_\lambda) + x J_3(f_\lambda) = \lambda x f(x)$$

$$\Rightarrow J_1(f_\lambda)\cancel{\int_{-1}^{1}x^3\,dx}^{\,0} + \frac{3}{2}J_2(f_\lambda)\cancel{\int_{-1}^{1}x^2\,dx}^{\,\frac{2}{3}} + J_3\cancel{\int_{-1}^{1}x\,dx}^{\,0} = \lambda\int_{-1}^{1}x f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow J_2(f_\lambda) = \lambda J_2(f_\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \qquad [B]$$

Nuevamente, de [1], se tiene que

$$x^4 J_1(f_\lambda) + \frac{3}{2} x^3 J_2(f_\lambda) + x^2 J_3(f_\lambda) = \lambda x^2 f_\lambda(x)$$

$$\Rightarrow J_1(f_\lambda) \int_{-1}^{1} x^4 dx + \cancel{\frac{3}{2} J_2(f_\lambda) \int_{-1}^{1} x^3 dx}^{\,0} + J_3(f_\lambda) \int_{-1}^{1} x^2 dx = \lambda \int_{-1}^{1} x^2 f_\lambda(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} J_1(f_\lambda) + \frac{2}{3} J_3(f_\lambda) = \lambda J_3(f_\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} J_1(f_\lambda) + \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) J_3(f_\lambda) = 0 \qquad [C]$$

De donde, tenemos el siguiente sistema (Por [A] y [B])

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) J_1(f_\lambda) + 2 J_3(f_\lambda) = 0 \\ \frac{2}{5} J_1(f_\lambda) + \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) J_3(f_\lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{16} \\ \times\ 5 \\ \hline 80 \\ +\ 64 \\ \hline 144 \end{array}$$

es decir, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) & 2 \\ \frac{2}{5} & \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(f_\lambda) \\ J_3(f_\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, para que el sistema tenga solución no trivial se requiere que la matriz tenga determinante nulo, i.e.,

$$\left(\frac{2}{3} - \lambda\right)\left(\frac{2}{3} - \lambda\right) - \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)^2 - \frac{4}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9} - \frac{4}{3}\lambda + \lambda^2 - \frac{4}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \left(\frac{20 - 36}{45}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda - \frac{16}{45} = 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \pm \sqrt{\frac{16}{9} - 4(1)\left(-\frac{16}{45}\right)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{64}{45}}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \pm \sqrt{\frac{16 \times 5 + 64}{45}}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \pm \frac{12}{\sqrt{45}}}{2} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \pm \frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\cancel{3}\sqrt{5}}}{2}$$

$$= \frac{2}{3} \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Resolviendo, se tiene que

$$\lambda = \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

De donde, se concluye que

$$\sigma(A_1) = \left\{ 0, 1, \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}$$

literal ~~d~~ e) Operador resolvente

Por lo anterior, notemos que

$$R(A_1) = \left\{ 0, 1, \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}^c \subseteq \mathbb{R}$$

De donde, se sigue, que

$$R_\beta(A_1) = (A_1 - \beta Id)^{-1}$$

Así, si consideramos

$$(A_1 - \beta Id)(f)(x) = g(x)$$

entonces se tiene que

$$x^2 J_1(f) + \frac{3}{2} x J_2(f) + J_3(f) - \beta f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} J_1(f) + 2 J_3(f) - \beta J_1(f_1) = J_1(g)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3} - \beta\right) J_1(f) + 2 J_3(f) = J_1(g) \qquad \textbf{[D]}$$

Análogamente

$$x^4 J_1(f) + \frac{3}{2} x^3 J_2(f) + x^2 J_3(f) - \beta x^2 f(x) = x^2 g(x)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} J_1(f) + \frac{2}{3} J_3(f) - \beta J_3(f) = J_3(g)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} J_1(f) + \left(\frac{2}{3} - \beta\right) J_3 = J_3(g) \qquad \textbf{[E]}$$

Con lo que, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3} - \beta\right) & 0 & 2 \\ 0 & (1-\beta) & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \left(\frac{2}{3} - \beta\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(f) \\ J_2(f) \\ J_3(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(g) \\ J_2(g) \\ J_3(g) \end{pmatrix}$$

La ecuación de la segunda fila se obtiene de manera análoga a las restantes.

Revisar la matriz inversa.

Como la matriz es invertible, se tiene que

$$\begin{pmatrix} J_1(f) \\ J_2(f) \\ J_3(f) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{15-30a}{30a^2-35a+14} & 0 & \frac{60}{-30a^2+35a+14} \\ 0 & \frac{1}{1-a} & 0 \\ \frac{12}{-30a^2+35a+14} & 0 & \frac{20-30a}{30a^2-35a-14} \end{pmatrix}}_{R_\beta(A_1)} \begin{pmatrix} J_1(g) \\ J_2(g) \\ J_3(g) \end{pmatrix}$$

con lo que se sigue el resultado deseado.

Viernes, 14 de julio de 2023

Aplicando la alternativa de Fredholm, para resolver

$$(A_1 - Id) f = g$$

entonces si $g \in Ker(A_1 - Id)^{\perp} = Img(A_1 - Id)$ (Pues A_1 es autoadjunto), entonces $\int_{-1}^{1} x g(x) = 0$, entonces existe $\omega \in L^2([-1,1])$ tal que

$$(A_1 - Id)\omega = g$$

Claramente T_N, para cada $N \in \mathbb{N}$ es un operador de rango finito; ahora resta probar que

$$T_N \to T \iff \|T_N - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0.$$

Así, si consideramos $x \in \overline{B}_{\ell^p}$, entonces

$$\|T_N x - Tx\|^p_{\ell^p} = \|T_N x - x\|^p_{\ell^p} = \sum_{k=N+1}^{+\infty} |x_k|^p \leq \|x\|_{\ell^p} \leq 1.$$ Está acotada pero no converge

Miércoles, 12 de julio de 2023

Regresando al problema para $T: \ell^p \to \ell^p$ con $p \neq +\infty$.

Notemos que $K = \overline{T(\overline{B}_E)}$ compacto en $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$

Sea $\varepsilon > 0$, existe $x^1, \dots, x^{n_\varepsilon} \in \ell^p$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(x^i, \varepsilon)$$

En un espacio de Banach con una base de Schauder

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Ver una demostración más detallada del caso en un espacio de Hilbert en los recursos.

luego, definiendo $G_\varepsilon = \operatorname{span}\{x^i\}_{i=1}^{n_\varepsilon}$, se considera

$$\begin{aligned} P_{G_\varepsilon} : \ell^p &\to \ell^p \\ x &\mapsto P_{G_\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \langle e_i, x \rangle x^i \end{aligned}$$

$$T_\varepsilon = P_{G_\varepsilon} T \in R(\ell^p).$$

El resto de la demostración es análogo a lo realizado en el problema de aproximación [1] Pág 158

Observación: Por lo anterior, la condición suficiente es la existencia de una base de Schauder en el espacio de llegada.

Definición 4.9.* Sea $(F, \|\cdot\|_F)$ un espacio de Banach, decimos que F tiene la propiedad de aproximación si para todo espacio de Banach y para todo $T \in K(E,F)$ existe $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R(E,F)$ tal que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$

Observación:
- Si F es un espacio de Hilbert entonces tiene la propiedad de aproximación.
- Si F admite una base de Schauder, tiene la propiedad de aproximación

Propiedad de Invarianza. Si $\forall T \in K(E)$ existe H un s.e.v. cerrado tal que $T(H) \subseteq H$

Ejercicio. Sean E y F espacios de Banach con $T \in \mathcal{L}(E,F)$

a) Supongamos que E es reflexivo. Muestre que $T(\overline{B}_E)$ es cerrada.
b) Supongamos que E es reflexivo. Muestre que si $T \in K(E,F)$ entonces $T(\overline{B}_E)$ es compacta

Solución: Ver ejercicio [3] 6.2.

→ Ver los ejercicios planteados. ([Ver 6.2] Brezis Ejercicio V.11 2 [4])

Viernes, 14 de julio de 2023.

Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} y'' + y = \operatorname{sen}(x) \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

Ejercicio 6.4. (Brezis) Sea $1 \leq p < +\infty$. Verifique que $\ell^p \subseteq c_0$ con la inyección continua ¿La inyección es compacta?

Solución:
Definamos

$$J: \ell^p \to c_0$$
$$x \mapsto Jx = x$$

Notemos que, si $x \in \ell^p$, entonces $\|x\|_{\ell^p}^p < +\infty$, i.e.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty$$

De esta manera, como la serie es convergente, entonces $|x_k|^p \to 0$, i.e. $|x_k| \to 0$
Así, si $x \in \ell^p$, entonces $x_n \to 0$ y por lo tanto $x \in c_0$.

Luego, notemos que J es lineal y acotada, en efecto

$$\|J\| = \sup_{x \in \ell^p} \frac{\|Jx\|_{c_0}}{\|x\|_{\ell^p}} = \sup_{x \in \ell^p} \frac{\|x\|_{c_0}}{\|x\|_{\ell^p}} = \sup_{x \in \ell^p} \frac{\sup_n |x_n|}{\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)}$$

Ahora, como

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \geq \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

entonces, por lo anterior

$$\|J\| \leq \sup_{x \in \ell^p} \frac{\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|}{\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|} = 1.$$

Así, $J \in \mathcal{L}(\ell^p, c_0)$. Ahora, consideremos $(e_n)_n \subseteq \ell^p$ la base canónica. Es claro que $(e_n)_n \subseteq B_{\ell^p}$, luego

$$|J(e_n) - J(e_m)| = |e_n - e_m| = 1 \qquad \forall n,m \text{ con } n \neq m$$

De esta manera, J no es compacto; pues si lo fuera $(e_n)_n \subseteq \overline{J(B_\ell)}$ debería admitir una subsucesión convergente.

Ejercicio 6.5 (Brezis) Sea $(\lambda_n)_n$ una sucesión de números positivos tal que $\lambda_n \to +\infty$. Sea V el subespacio vectorial de las sucesiones tales que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n |u_n|^2 < +\infty$$

El espacio V está equipado con el producto escalar

$$((u,v)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n v_n$$

Muestre que V es un espacio de Hilbert tal que $V \subseteq \ell^2$ con inyección compacta.

Lunes, 24 de julio de 2023.

Ejercicio

1) Sea $\mathcal{J}$ un ideal de $\mathcal{L}(H)$ maximal con H un espacio de Hilbert. Muestre que $K(H) \subseteq \mathcal{J}$

$\mathcal{J}$ es un ideal de $\mathcal{L}(H)$ si verifica que $\mathcal{J}$ es un s.e.v. y

$$(\forall T \in \mathcal{J})\ (\forall S \in \mathcal{L}(H))\quad TS \in \mathcal{J} \qquad ST \in \mathcal{J}$$

Observación: Se dice que $\mathcal{J}$ es un ideal maximal con la inclusión si $\mathcal{J} \subseteq \tilde{\mathcal{J}}$ con $\tilde{\mathcal{J}} \neq \mathcal{L}(H)$, entonces $\mathcal{J} = \tilde{\mathcal{J}}$

- Si $\mathcal{J}$ es un ideal maximal entonces es cerrado.

P.D. $\overline{\mathcal{J}}$ es un ideal (Pues como $\mathcal{J} \subseteq \overline{\mathcal{J}}$, entonces $\mathcal{J} = \overline{\mathcal{J}}$)

Sea $S \in \overline{\mathcal{J}}$ y $T \in \mathcal{L}(H)$ P.D. $ST \in \overline{\mathcal{J}}$

Existe $(S_n)_n$ tal que $S_n \to S$, entonces

$$TS_n \to TS \in \overline{\mathcal{J}}$$

con lo que se sigue el resultado.

La composición es una aplicación bilineal continua pues

$$\|S \cdot T\| \leq \|S\| \|T\|$$

Observación: 1) La $Id \in \mathcal{J}$ si y solo si $\mathcal{J} = \mathcal{L}(H)$

2) Si $\mathcal{J}$ es un ideal maximal, entonces $Id \notin \mathcal{J}$

3) Si $T \in Inv(H)$ y $T \in \mathcal{J}$ esto se tiene si y solo si $\mathcal{J} = \mathcal{L}(H)$

4) Si $\mathcal{J}$ es un ideal maximal, entonces si $T \in Inv(H)$ entonces $T \notin \mathcal{J}$

Recordemos que si H es un espacio de Hilbert $\overline{R(H)} = K(H)$, entonces basta mostrar que $R(H) \subseteq \mathcal{J}$

Demostración del ejercicio 1 ↓

Sea $T \in R(H)$, entonces

$$\dim(Img(T)) = n < +\infty$$

Por lo tanto, existen $(e_1, \dots, e_n) \subseteq Img(T)$ l.i. en H tal que

$$\forall x \in H \qquad Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle Tx, e_i \rangle e_i$$

Como $\mathcal{J}$ es maximal $\mathcal{J} = \overline{\mathcal{J}}$

Mostremos que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que

$$P_{e_i}(y) = \langle Ty, e_i \rangle e_i \in \mathcal{J}.$$

Sabemos que $\mathcal{J}$ es un ideal maximal propio, i.e, existe $S \in \mathcal{L}(H)$ con $S \neq 0$ tal que $S \in \mathcal{J}$ y existe $x_s \in H$ con $x_s \neq 0$ tal que

$$0 \neq y_s = Sx_s$$

← Ideal Maximal Propio

Por lo tanto, basta probar que existe $W \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$WS = P_{e_i} \in \mathcal{J}$$

Podemos considerar

$$V_1 S V_2 = P_{e_i}$$

Consideremos

$$v_2(y) = \langle Ty, e_i \rangle x_s$$

$$\Rightarrow S v_2(y) = S\left(\langle Ty, e_i\rangle x_s\right) = \langle Ty, e_i\rangle S(x_s) = \langle Ty, e_i \rangle y_s$$

$$\Rightarrow v_1 S v_2(y) = \langle Ty, e_i\rangle v_1(y_s)$$

$\overline{R(H)} \subseteq \overline{J}$

donde $v_1(y) = \dfrac{\langle y, y_s\rangle}{\|y_s\|^2} e_i$, entonces

$\Rightarrow J = \overline{J} = \overline{R(H)} = K(H)$

$$v_1 S v_2 \in J \Rightarrow P e_i \in J$$
$$\Rightarrow T \in J$$

Así, $R(H) \subseteq J$ con lo que se sigue el resultado

Ejercicio. (2) Sea $H = \mathcal{L}^2([0,1])$, definimos

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

a) $V \in \mathcal{L}(H)$ compacto y $\sigma(V) = 0$
b) Calcule V^*
c) Calcule $\|VV^*\|$ y deducir que $\|V\| = \frac{2}{\pi}$

literal a)

Trivialmente el operador es lineal. luego

$$\|Vf\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 ds \leq \int_0^1 \|1_{[0,x]}\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2$$

Como $\mu([0,1]) < +\infty$, entonces

$$L^2([0,1]) \subseteq L^1([0,1])$$ $\|f\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^1}$

Por lo tanto, si $f \in L^1([0,1])$ entonces $Vf \in C([0,1])$. De esta manera,

$$\mathrm{Img}(V) \subseteq C([0,1]) \subseteq L^2([0,1])$$

Sea $H = V(\bar{B}_{L^2([0,1])})$. P.D es relativamente compacta

Notemos que

$$|Vf(x)| \leq \|f\|_{L^2([0,1])} = 1$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |Vf(x)| \leq 1 \Rightarrow \|Vf\| \leq 1$$

P.D Equicontinuidad

Sea $\hat{f} \in H$, cualquiera, notemos que

$$|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| = |Vf(x) - Vf(y)|$$

$$= \left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^y f(t)\,dt\right|$$

sin pérdida de generalidad asumamos que $x < y$

Entonces

$$|\hat{f}(x)-\hat{f}(y)| \leq \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2} < |x-y|^{\frac{1}{2}} = \delta^{\frac{1}{2}}$$

Tomando $\delta^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$ se sigue el resultado, i.e. por Árcela - Ascoli, V es compacto

De esta manera $\sigma(V) = \{0\} \cup \sigma_p(V)$

Sea $\lambda \in \sigma_p(V)$ y f_λ un v.p., así, se tiene que

$$Vf_\lambda = \lambda f_\lambda \Rightarrow Vf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \lambda f_\lambda(x)$$ ② f_λ es continua

① Como la imagen está en las funciones continuas

De donde, se sigue que

$$f_\lambda(x) = \lambda f_x'(x) \Rightarrow \frac{f_\lambda}{\lambda} = \frac{df}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{\lambda} = \frac{df}{f_\lambda}$$

③ $\int_0^x f(t)\,dt$ es derivable

④ Por la igualdad si f_λ existe, más aún es $C^\infty([0,1])$

$$\Rightarrow \quad k = \ln(f(x)).$$

$$\Rightarrow C_1 e^{-\lambda x} = f_\lambda(x)$$

Luego, como $f(0)=0$, entonces $C_1 = 0$ y así $f_\lambda = 0$. Pero esto no es posible; por lo tanto

$$\sigma(V) = \{0\}$$

literal b)

Por la identidad del adjunto, sabemos que

$$\langle Vf, g\rangle = \langle f, V^* g\rangle \qquad \forall \ f,g \in L^2([0,1])$$

Con esto,

$$\langle Vf, g\rangle = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\overline{g(x)}\,dx$$

$$= \int_0^x \int_0^1 f(t)\,dx\,\overline{g(x)}\,dt$$

Martes, 25 de julio de 2023.

Notemos que

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow \int_0^1 k(x,t) f(t)\,dt \quad \text{con} \quad k(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

De esta manera,

$$\langle Vf, g\rangle = \int_0^1\left(\int_0^1 k(x,t) f(t)\,dt\right)\overline{g(x)}\,dx = \int_0^1 f(t)\overline{\left(\int_0^1 k(x,t) g(x)\,dx\right)}$$

$$\Rightarrow V^* g(x) = \int_x^1 g(t)\,dt$$

literal c)

Notemos que VV^* es compacto, autoadjunto y definido positivo

Luego, notemos que

$$\| VV^* \| = \rho(VV^*) = \sup_{\lambda \in \sigma(VV^*)} \lambda$$

Como el operador es compacto, se sigue que

$$\sigma(VV^*) = \sigma_d(VV^*) \cup \{0\}.$$

Por lo tanto, resta calcular el espectro discreto; así sea $\lambda \in \sigma_d(VV^*)$, entonces existe f_λ tal que

$$VV^* f_\lambda = \lambda f_\lambda$$

$\Rightarrow f_\lambda(0) = 0$

Derivando lo anterior

$$V'(V^* f_\lambda)(V^* f_\lambda)' = \lambda f_\lambda'$$

$$VV^* f(x) = \int_0^x \left(\int_t^1 f_\lambda(z)\,dz \right) dt = \lambda f_\lambda'(x)$$

$$\Rightarrow \lambda f_\lambda'(x) = \int_x^1 f_\lambda(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \lambda f_\lambda''(x) = -f_\lambda(x) \quad \Rightarrow \quad f''(x) + \mu^2 f(x) = 0 \qquad \boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$$

Cuya solución es

$$f_\lambda(x) = C_1^\lambda \operatorname{sen}(\mu x) + C_2^\lambda \cos(\mu x) \qquad f_\lambda(0) = 0 = C_2^\lambda$$

aplicando la condición inicial

$$f_\lambda(x) = C_1^\lambda \operatorname{sen}(\mu x) \Rightarrow f_\lambda'(x) = C_1^\lambda \mu \cos(\mu x)$$

con lo que $f_\lambda'(0) = C_1^\lambda \mu$, luego

$$f'(0) = C_1^\lambda \mu = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 f(x)\,dx$$

Así, como

$$C_1^\lambda \mu = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 C_1^\lambda \operatorname{sen}(\mu x)\,dx$$

$$\Rightarrow C_1^\lambda \mu = \frac{C_1^\lambda}{\mu \cdot \lambda}(\cos(\mu) - 1) \Rightarrow C_1^\lambda \mu^2 = \frac{C_1^\lambda}{\lambda}(\cos(\mu) - 1)$$

Para que la igualdad anterior se mantenga, se necesita que $\cos(\mu) = 0$, i.e.

$$\mu = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

y de esta manera

$$\| VV^* \| = \frac{4}{\pi^2}$$

Por lo tanto, se deduce que

$$\| V \| = \frac{2}{\pi}$$

Notemos que

$$\| V \|^2 = \| VV^* \|$$

y

$$\| V^* \|^2 = \| VV^* \|$$

$$\| V \|^2 = \langle Vx, Vx \rangle = \langle VV^* x, x \rangle = \| VV^* \|$$

Recuerde que si T es autoadjunto $\|T\| = \sup_x |\langle Tx, x \rangle|$

Ejercicio: Considere

$$E = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \left\{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continua tal que } \sup|f(x)| < +\infty \right\}$$

entonces $(C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach

Además, considere

$$T: E \to E$$
$$f \longmapsto Tf(x) = f(x+1)$$

Calcule (Muestre)

a) $T \in \mathcal{L}(E)$

b) $\sigma(T)$

Sugerencia, estudie $\sigma_p(T)$ y luego utilice el hecho de que es invertible.

literal

Trivialmente, el operador es lineal, más aún

$$|Tf(x)| = |f(x+1)| \Rightarrow \sup_x |Tf(x)| = \|Tf\| = \sup_x |f(x+1)| = \|f\|$$

$$\Rightarrow \|Tf\| = \|f\| \Rightarrow \|T\| = 1$$

Así, $T \in \mathcal{L}(E)$.

literal b)

Sea $\lambda \in \sigma_p(T)$ y f_λ no nulo tal que

$$Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x) \Rightarrow f_\lambda(x+1) = \lambda f(x)$$

de esta manera

$$f_\lambda(x+1) - \lambda f_\lambda(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

por lo tanto

$$f_\lambda(x) = \lambda^x \Rightarrow \lambda^{x+1} - \lambda \lambda^x$$

Si $|\lambda| < 1$, entonces

$$\frac{1}{\lambda^k} f_\lambda(x+k) = f_\lambda(x) \quad \downarrow\downarrow$$

Pues si $k \to +\infty$, entonces, la función debe ser la función nula.

Por otro lado, si $\lambda = 1$, entonces el valor propio asociado es las funciones constantes, i.e

$$a = \lambda a.$$

De esta manera, $\sigma_p(T) = \{1\}$. De esta manera, para $|\lambda| < 1$ con $\lambda \in \mathbb{C}$

$$T - \lambda Id \qquad \text{es invertible}$$

Mostremos que $T - \lambda Id$ es sobreyectivo. Dado que $g \in E$, existe $f \in E$ tal que

$$(Tf - \lambda f)(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x+1) - \lambda f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\lambda}\left(g(x) - f(x+1) \right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Miércoles, 26 de julio de 2023

Ahora, notemos que T es invertible, en efecto definiendo

$$S: E \to E$$
$$f \mapsto S(f) = f(x-1)$$

Sabemos que $\sigma(S) = \sigma(T)^{-1}$ y además $\sigma(S) \subseteq \bar{D}(0,1)$

Como, para $\lambda \in \sigma(S)$, entonces $|\lambda| \leq 1$,

$$\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T) \Rightarrow \frac{1}{|\lambda|} \leq 1 \quad \text{si y solo si} \quad |\lambda| = 1$$

Con lo que concluimos que

$$\sigma(T) = \sigma(S) = \sigma_p(T) = S_{\mathbb{C}}$$

Ejercicio. Definamos

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n=1}^{+\infty} \subseteq S(\mathbb{C}) : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

y

$$T: \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow S(\mathbb{C})$$
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto T(u_n)_n = \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{u_p}{n+p} \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

a) Muestre que T está bien definida

Vamos a mostrar que $T \in \mathcal{L}^2(\ell^2)$, para ello mostremos lo siguiente

i) Sea f una función 2π periódica continua por trozos

$$f(t) = i(\pi - t) \qquad \forall t \in [0, 2\pi[$$

Calcular los coeficientes de fourier

ii) Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2$ fijo y K y J dos números enteros positivos

$$\forall (b_1, \dots, b_J) \in \mathbb{C} \quad \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\sum_{k=1}^{K} a_k e^{-ikt} \right) \left(\sum_{j=1}^{J} \overline{b_j} e^{ijt} \right) dt \right|$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty} \|a\|_{\ell^2} \left(\sum_{j=1}^{J} |b_j|^2 \right)^{1/2}$$

iii) Deducir que para todo $J, K \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{j=1}^{J} \left| \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{k+j} \right|^2 \leq \pi^2 \|a\|_{\ell^2}^2$$

Concluir que $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$

b) Mostrar que $T \notin \mathcal{K}(\ell^2)$

literal a)

Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{u_p}{p+n} < +\infty$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \left|\frac{u_p}{p+n}\right| \leqslant \left(\sum_{p=1}^{+\infty} |u_p|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{|p+n|^2}\right)^{1/2}$$

$$\leq \|u\|_{\ell^2} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}\right)^{1/2} \leq \|u\|_{\ell^2}\, C.$$

De esta manera, se tiene que

$$\underbrace{\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{u_p}{p+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}}_{=z_n} \in S(\mathbb{C})$$

Entonces

$$\|T(u)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{u_p}{p+n}\right|^2$$

Sea f una función 2π periódica continua por trozos

$$f(t) = i(\pi - t) \qquad f\in L^2([0,2\pi])$$

Bajo estas hipótesis, se tiene la expansión en series de Fourier, i.e.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}(n)\, e^{-inx}$$

donde los coeficientes de Fourier están dados por

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

Luego

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i(\pi-t)\, e^{-int}\, dt$$

Integrando por partes

$u = f(t)$ $\quad du = f'(t)$

$dv = e^{-int}$ $\quad v = \frac{-e^{-int}}{in}$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{f(t)\,e^{-int}}{in}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{f(0)-f(2\pi)}{in} + \frac{1}{\pi i n}\int_0^{2\pi} e^{-int}\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{i\pi + i\pi}{in}\right]$$

$$= \frac{1}{n}$$

Ahora, sea $a_n \in \ell^2$, $K, J \in \mathbb{N}^*$. Mostremos que para todo $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=1}^{K} a_k e^{ikt}\right)\left(\sum_{j=1}^{J} \bar{b}_j\, e^{-ijt}\right)\right| \leq \|f\|_{L^\infty}\, \|a\|_{\ell^2} \left(\sum_{j=1}^{J} |b_j|^2\right)^{1/2}$$

Puesto que todo espacio separable es isomorfo isométricamente a ℓ^2, entonces se tiene que

$$L^2([0,2\pi]) \longrightarrow \ell^2$$
$$f(t) \longmapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$$

Por la identidad de Parseval, se tiene que
$$\|f\|_{L^2([0,2\pi])} = \|(\hat{f}(n))_n\|_{\ell^2}$$

Además, podemos identificar el producto interno
$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

Note que las series son convergentes y por lo tanto está bien definido

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{-int}\right)\overline{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \hat{g}(k) e^{-ikt}\right)}\, dt$$

Así, para resolver el ejercicio, consideremos
$$A(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k e^{-ikt} \quad \text{y} \quad B(t) = \sum_{j=1}^{J} b_j e^{ijt}$$

$$\|A\|_{L^2} = \sum_{k=1}^{K} |a_k|^2 \quad \text{y} \quad \|B\|_{L^2} = \sum_{j=1}^{J} |b_j|^2$$

Recuerde que en $L\infty$ se usa el supremo escencial

Con lo anterior, y regresando al ejercicio se tiene que
$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)A(t)B(t)\, dt\right| \leq \frac{\|f\|}{2\pi}_{L\infty} \|A\|_{L^2}\|B\|_{L^2}$$
$$\leq \|f\|_{L\infty}\|a\|_{\ell^2}\|B\|_{L^2}$$

como se quería.

literal iii)

Notemos que
$$\sum_{j=1}^{J}\left|\sum_{k=1}^{K}\frac{a_k}{k+j}\right|^2 \leq \sum \quad \text{(Pendiente)}$$

literal b)

Ahora, si consideramos $u^n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,\dots,1,0,\dots) \quad u^n \to 0$

Trabajo en casa.

En efecto, notemos que
$$\underbrace{u^n \to 0}_{\text{converge a la sucesión cero}} \iff u^n \text{ es acotada y la proyección converge}$$

- Trivialmente la sucesión es acotada pues
$$\|u^n\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\sqrt{n})^2} = 1 \Rightarrow \|u^n\|_{\ell^2}^2 = 1 \Rightarrow \|u^n\|_{\ell^2} = 1$$

Además la proyección es convergente, pues

$$\pi_k(u^n) = u_k^n = \begin{cases} (\sqrt{n})^{-1} & \text{si } n=k \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

Como ℓ^2 es de Hilbert buscamos, utilizar la proposición 4.8.

De donde, cuando $n \to +\infty$, entonces

$$(\forall k)\ (\pi_k(u^n) \to 0) \Rightarrow u^n \to 0$$

Ahora, mostremos que la imagen no converge fuertemente a cero. Así, notemos que

$$T(u^m) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k^m}{k+n} \right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \left(\frac{1}{k+n}\right) \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \left(\frac{\Psi^{(0)}(m+n+1) - \Psi^{(0)}(n+1)}{\sqrt{m}} \right)_n$$

Función digamma

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

Se tiene la siguiente relación:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\Psi(n) = H_{n-1} - \gamma$$

En efecto,

$$\Psi(m+n+1) - \Psi(n+1) = H(m+n) - \gamma - H(n) + \gamma$$

$$= \sum_{k=1}^{m+n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+n}$$

Así, si el operador fuera compacto, entonces

$$\lim_{m\to+\infty} T(u^m) = (0)_{n\in\mathbb{N}}.$$

No obstante si consideramos el término n-ésimo de la sucesión, se tiene que

$$T(u^m) = (\omega_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \omega_n^m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{1}{k+n}\right)$$

$$= \frac{\Psi(m+n+1) - \Psi(n+1)}{\sqrt{m}}.$$

Esto diverge al infinito

Esto converge a cero.

Tomando el límite, cuando $m \to +\infty$, se sigue que

$$\omega_n^m \to +\infty.$$

?

Así, T no es compacto.

Ejercicio VII. 8 (Norma de un operador integral)

Sea $E = C([0,1])$ un espacio de Banach de funciones a valores complejos continuas sobre $[0,1]$ con la norma $\|f\|_\infty$. Sea $K : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ una función continua y $T: E \to E$ definida por

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t)\, f(t)\, dt$$

a) Muestre que $T \in K(E)$ y muestre que

$$\|T\| = \sup_{0\le x\le 1} \int_0^1 |K(x,t)|\, dt$$

b) Determine $\|T\|$ y $\sigma(T)$ si $K(x,t) = e^{x+t}$.

Solución:

Es fácil ver que T es lineal. Por otro lado, como

$$|(Tf)(x)| = \left| \int_0^1 K(x,t)\, f(t) \right| \le \int_0^1 |K(x,t)|\,|f(t)|\, dt$$

$$\le \|f\| \int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} |K(x,t)|\, dt$$

$$\le \|f\| \sup_{\substack{x\in[0,1]\\ t\in[0,1]}} |K(x,t)|$$

Este valor es finito pues es una función continua sobre un compacto

De esta manera, $T \in \mathcal{L}(E)$

Para probar que es acotado; usando Árcela-Ascoli se sigue el resultado.

Luego, definiendo

$$L(x) = \int_0^1 |K(x,t)|\, dt$$

Por continuidad de la composición de funciones continuas, se sigue que L es continua sobre $[0,1]$, luego, notando

$$H = \sup_{x\in[0,1]} L(x) = \|L\|_\infty$$

Entonces para todo $x \in [0,1]$

$$|Tf(x)| \le \int_0^1 |K(x,t)|\,|f(t)|\, dt \le \|f\|_\infty \int_0^1 |K(x,t)|\, dt \le L(x)\|f\|_\infty$$

tomando el supremo, se sigue que

$$\|Tf\|_\infty \le H\|f\|_\infty \implies \|T\| \le M$$

Sea $x_0 \in [0,1]$ tal que $H = L(x_0)$ (Esto es posible pues L es continua sobre un compacto) luego, definiendo

$$g(t) = K(x_0,t), \quad \text{entonces} \quad g(t) \in E$$

con esto, se sigue que

$$\|T\|\,\|f\|_\infty \geq \|Tf\|_\infty \geq |Tf(x_0)| = \left|\int_0^1 K(x_0,t)\,f(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_0^1 g(t)f(t)\,dt\right|$$

$$= |A_g(f)|$$

con $A_g(f) = \int_0^1 g(t)f(t)\,dt$, entonces si $\|f\| = 1$, se sigue que

$$\|T\| \geq \|A_g\|$$

y, como

$$\|A_g\| = \|g\|_1 = L(x_0) = H,$$

← Para más información, ver Ejercicio III.3 (2). [4]

entonces

$$\|T\| = H$$

como se quería.

literal b)

Por el literal anterior, se sigue que

$$\|T\| = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |e^{x+t}|\,dt = \int_0^1 e^{1+t}\,dt = e(e-1)$$

luego, como

$$(Tf)(x) = e^x \int_0^1 e^t f(t)\,dt$$

entonces T es un operador de rango finito y por lo tanto, compacto. De esta manera

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$$
$$= \left\{0, \frac{e^2-1}{2}\right\}$$

Ejercicio VII.16 Sean E y F dos espacios de Banach

a) Si $A \in K(E,F)$, muestre que la aplicación cociente

$$B: E/\ker(A) \longrightarrow F$$
$$[x] \longmapsto Ax$$

es un operador compacto.

b) Sea $A \in \mathcal{L}(E,F)$, suponga que la aplicación cociente asociada

$$E/\ker(A) \to F$$
$$[x] \mapsto Ax$$

es un operador compacto, ¿A es compacto?

c) $B \in \mathcal{L}(E)$, $C \in \mathcal{L}(F)$, sea $A = B \oplus C$. Establezca la equivalencia

A compacto $\Longleftrightarrow$ B y C son compactos

d) $A \in K(E)$ y G un subespacio cerrado. Note a D como la restricción de A sobre G; así

$$D : G \longrightarrow G$$
$$y \longmapsto Ay$$

Muestre que D es un operador compacto.

literal a)

Si A es continua, entonces $\ker(A)$ es cerrado y $E/\ker(A)$ es un espacio de Banach notando $E_1 = E/\ker(A)$ y tomando N un subconjunto acotado de E_1 entonces para $[x] \in N$ y $y \in [x]$ tal que

Sin pérdida de generalidad podemos considerar que está acotado por ~~uno~~ un medio

$$\|y\| \leq 2\|[x]\| \leq 1.$$

Tomando un y que cumpla lo anterior y notando $y([x])$, definiendo

$$M = \{ y([x]) : [x] \in N \} \Rightarrow H = \overline{B}_E$$

entonces

$[*]$ (why?) $A(H) = B(N)$

y por lo tanto, como A es compacto, $A(H)$ es relativamente compacto.

Si H es un cerrado en la bola unitaria, entonces $A(H)$ es relativamente compacto.

Si $[*]$ se tiene lo requerido.

¿Resta probar que efectivamente se tiene la igualdad $[*]$?

Lunes, 31 de julio de 2023. (Continuación del ejercicio del miércoles 26 de julio)

Notemos que

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j+n} \geq \int_1^{m+1} \frac{dt}{t+n} \geq \log\left(1 + \frac{m}{n+1}\right)$$

de donde

$$\|Tu^m\|^2 \geq \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j+n}\right)^2 \geq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{m}{n+1}\right)^2 \geq \left(\frac{m-1}{m}\right)\log^2(2)$$

tomando el límite, cuando $m \to +\infty$

$$\lim_{m\to+\infty} \|Tu^m\|^2 \geq \log^2(2)$$

con lo que se sigue que T no es compacto.

Ejercicio: Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios de Banach

1) Demostrar la equivalencia

a) $\dim(\ker(T)) < +\infty$ e $\operatorname{Img}(T)$ es cerrada

b) Existe P de rango finito y $C \geq 0$ tal que

$$\|u\|_E \leq C\left(\|Tu\|_F + \|Pu\|_E\right)$$

c) Existen $(G, \|\cdot\|_G)$ y $Q \in K(E, G)$ y $C > 0$ tales que

$$\|u\|_E \leq C\left(\|Tu\|_F + \|Qu\|_E\right) \quad \forall u \in E$$

a) $\Rightarrow$ b) Como $\dim(\ker(T)) < +\infty$, entonces existe $N \subseteq E$ suplementario topológico, i.e.

$$E = N \oplus \ker(T)$$

luego, definiendo

$$P: E \longrightarrow \ker(T) \qquad \text{y} \qquad T_0: E \longrightarrow \mathrm{Img}(T)$$
$$x_N + x_k = x \longmapsto P_{x_F} x_k \qquad\qquad x \longmapsto Tx$$

entonces T_0 es sobreyectiva; con esto, notemos que existe $\hat{c} > 0$ tal que

$$\|x\| \leq \hat{c}\,\|Tx\| \qquad \forall x \in N$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|x_N + x_{ker}\| \\
&\leq \|x_N\| + \|x_{ker}\| \\
&\leq \|Px\| + \hat{c}\,\|Tx\| \\
&\leq \tilde{c}\left(\|Px\| + \|Tx\|\right) \qquad \text{con} \quad \tilde{c} = \max\{1, \hat{c}\}
\end{aligned}$$

b) $\Rightarrow$ c)

Tomando $G = N$, y $Q = P: E \to G$, se sigue el resultado

c) $\Rightarrow$ a)

P.D. $\dim(\ker(T)) < +\infty$

Mostremos que $\overline{B}_{\ker(T)}$ es compacta. Como Q es compacto, entonces toda sucesión de norma menor o igual a 1, admite una subsucesión convergente, i.e

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B}_{\ker(T)}$, entonces $(Qu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente.

P.D. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

$$\|u_n - u_m\| \leq C\big(\overbrace{\|Tu_n - Tu_m\|}^{=0} + \|Qu_n - Qu_m\|\big)$$
$$\leq C\,\|Qu_n - Qu_m\| < \varepsilon \leftarrow \text{Pues es una subsucesión convergente.}$$

Así, como el espacio es completo, por Riez se sigue que es de dimensión finita

P.D. $\mathrm{Img}(\hat{T})$ es cerrado

Sea $(\hat{T}u_n)_n$ una sucesión tal que $\hat{T}u_n \to v$. P.D $(u_n)_n$ converge a

P.D. $(u_n)_n$ es acotado. Por absurdo, supongamos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, definamos

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} \Rightarrow \|v_n\| = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Martes, 1 de agosto de 2023

$$\hat{T}: N \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto Tx$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\hat{T}v_n = \frac{\hat{T}u_n}{\|Tu_n\|} \longrightarrow 0$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
\|v_{n_k} - v_{n_m}\| &\leq C\left(\|\hat{T}(v_{n_k} - v_{n_m})\| + \|Q(v_{n_k} - v_{n_m})\|\right) \\
&\leq C(S_1 + S_2) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Así, $(v_{n_k})_k$ es de Cauchy, como el espacio es completo, es convergente. Además, como $\|v_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\|v\| = 1$, con

$$v_n \longrightarrow v$$

No obstante, también se tiene que $\hat{T} v_{n_k} \longrightarrow 0$, lo cual es absurdo y por lo tanto, $(u_n)_n$ es acotada.

Como $(u_n)_n$ es acotada y Q es compacta, entonces existe $(Q u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente.

P.D $(u_n)_n$ es convergente

P.D. $(u_n)_n$ es de Cauchy

Notemos que

$$\|u_{n_k} - u_{n_m}\| \leq c\left(\|\hat{T}(u_{n_k} - u_{n_m})\| + \|Q(u_{n_k} - u_{n_m})\|\right) \leq c(\delta + \delta) = \varepsilon$$

Por lo tanto, la sucesión es convergente y la imagen cerrada, como se quería.

Capítulo 5: Alternativa de Fredholm y descomposición espectral

Proposición 5.1. Sea $K \in \mathcal{K}(E)$ y $T = Id - K$. Supongamos que $F \subseteq E$ es un subespacio vectorial cerrado con T inyectivo en F, entonces existe $c > 0$ tal que

$$\|x\| \leq c\|Tx\|$$

En particular, $Img(T)$ es cerrada.

Demostración

Supongamos por absurdo que

$$(\forall c > 0)\ (\exists x_c \in F)\ \left(\|x_c\| \geq c\|Tx_c\|\right)$$

por lo tanto, podemos construir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ tal que $\|x_n\| = 1$ y

$$\frac{1}{n} > \|Tx_n\|$$

Así, si $n \to +\infty$, $T(x_n) \to 0$, luego, como

$$Tx_n = x_n - K(x_n)$$

Por otro lado, $(x_n)_n \subseteq \bar{B}_E$ y por lo tanto $(K(x_n))_n$ admite una subsucesión convergente, i.e., existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$K(x_{n_k}) \to v$$

luego

$$T(x_{n_k}) = x_{n_k} - K(x_{n_k}) \Rightarrow 0 = \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} - v$$

Se puede expresar como la suma de sucesiones convergentes.

De donde,

$$v = \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} \qquad \text{además} \qquad \|v\| = 1$$

Luego, por continuidad se sigue que $Tv = 0$ (Pues se toma nuevamente la igualdad)

Como $v \in F$ y T es inyectiva, entonces $v = 0$, lo cual es absurdo.

Proposición 5.2. Sea $K \in \mathcal{K}(E)$ y $T = Id - K$ entonces $\dim(T) < +\infty$ y $Img(T)$ es cerrada.

Demostración:

- P.D. $\overline{B}_{ker(T)} = \{ v \in E : Tv = 0 \text{ y } \|v\| \leq 1 \}$ es compacto.

Notemos que

$$\overline{B}_{ker(T)} \subseteq K(\overline{B}_E) \subseteq \overline{K(\overline{B}_E)} \quad \text{compacto}$$

Por lo tanto, $\overline{B}_{ker(T)}$ es compacto y más aún $\dim(ker(T)) < +\infty$.

- Por otro lado, como $\dim(ker(T)) < +\infty$, entonces admite un suplementario topológico, i.e., existe F un s.e.v. cerrado tal que

$$E = ker(T) \oplus F$$

Así, por la [proposición 5.1] se sigue que $Img(T) = Img(T|_F)$ es cerrada. como se quería.

Lema 5.3. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, G y F dos subespacios vectoriales de E tales que

- $F \subsetneq G$
- F es cerrado

Entonces, $\forall \varepsilon \in]0,1[$ existe $x_\varepsilon \in G$ y $y_\varepsilon \notin F$ con $\|y_\varepsilon\| = 1$ tal que

$$dist(F, y_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$$

Observación: Si F es de dimensión finita, se puede tomar $\varepsilon = 0$.

Demostración:
Por hipótesis, existe $y \in G$ con $y \notin F$ tal que

$$dist(F, y_G) > 0 \qquad (\text{Ya que } F \text{ es cerrado})$$

luego, notemos que

$$dist(F, y_G) = \inf_{x \in F} \|x - y_G\| = \delta > 0$$

Por lo tanto,

$$dist(F, y_G) < \frac{\delta}{1-\varepsilon}. \tag{5.1}$$

de esta manera, tomando

$$y_\varepsilon = \frac{x_0 - y_G}{\|x_0 - y_G\|} \qquad y_\varepsilon \in G$$

luego, $y_\varepsilon \notin F$ (pues $y_G \notin F$). luego

$$d(F, y_\varepsilon) = \inf_{y \in F} \|y - y_\varepsilon\|$$

$$= \inf_{y \in F} \left\| y - \frac{(x_0 - y_G)}{\|x_0 - y_G\|} \right\| = \frac{1}{\|x_0 - y_G\|} \inf_{y \in F} \left\| y\|x_0 - y_G\| - x_0 + y_G \right\|$$

$$= \frac{1}{\|x_0 - y_G\|} \inf_{z \in F} \|z - y_G\|$$

$$= \frac{\operatorname{dist}(F, y_G)}{\|x_0 - y_G\|}$$

Usando lo anterior en [5.1] se sigue el resultado.

Observación: Si $T = Id - K$, por el binomio de Newton, se tiene que

$$T^n = (T)^n = Id - K_n \quad \text{con} \quad K_n \in K(E)$$

En particular

$$T^2 = (Id - K)^2 = Id \underbrace{-2K + K^2}_{K_2}$$

Proposición 5.4 Sea $K \in K(E)$ y $T = Id - K$. Entonces se tienen los siguientes enunciados.

a) No existe $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de s.e.v. cerrados tales que

$$F_n \subsetneq F_{n+1} \quad \text{y} \quad T(F_{n+1}) \subseteq F_n$$

b) No existe $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de s.e.v. cerrados tales que

$$F_{n+1} \subsetneq F_n \quad \text{y} \quad T(F_n) \subseteq F_{n+1}$$

Demostración: $(n < m)$

Supongamos que existe $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de s.e.v. cerrados tales que

$$F_n \subsetneq F_{n+1} \quad \text{y} \quad T(F_{n+1}) \subseteq F_n$$

Así, por el [Lema 3.5], entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ con $\|x_n\| = 1$ tal que

$$x_n \in F_{n+1} \quad \text{y} \quad x_n \notin F_n$$

y para $\varepsilon \in]0,1[$, arbitrario pero fijo,

$$\operatorname{dist}(x_n, F_n) > 1 - \varepsilon$$

(La sucesión se obtiene variando los subespacios F_n)

Además como $T(F_{n+1}) \subset F_n$, entonces

$$(Id - K)(F_{n+1}) \subset F_n \subsetneq F_{n+1} \quad \Rightarrow \quad K(F_{n+1}) \subseteq F_{n+1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|K(x_n) - K(x_m)\| &= \|K(x_n) - K(x_m) + x_m - x_m\| \\ &= \|K(x_n) + T(x_m) - x_m\| \\ &\geq \operatorname{dist}(F_m, x_m) \\ &> 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, K no es compacto. (Pues como la sucesión no es de Cauchy, no admite ninguna subsucesión convergente)

Corolario 5.5. Bajo las mismas hipótesis de la [Proposición 5.4], se tiene que las sucesiones $(Ker(T^n))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Img(T^n))_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones crecientes y decrecientes, respectivamente.

Ver Corolario 3.2.6 [5]

Además, son sucesiones estacionarias (son constantes a partir de algún término), i.e., existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$Ker(T^n) = ker(T^{n_0}) \qquad \forall n\geq n_0$$

Notemos $F_n = ker(T_n)$, claramente F_n es cerrado y $F_n \subseteq F_{n+1}$, i.e., es una sucesión creciente; en efecto, notemos que

$$F_n = ker(T^n) \quad y \quad F_{n+1} = ker(T^{n+1}) = ker(T\,T^n)$$

← Es fácil ver esto por contenencias (definición)

luego $F_n \subseteq F_{n+1}$; además

$$T(F_{n+1}) = T(ker(TT^n)) \subseteq F_n = ker(T_n)$$

En efecto, sea $y\in T(ker(T^{n+1}))$, entonces existe $x\in ker(T^{n+1})$ tal que $y = Tx$, luego, se sigue que

$$T^{n+1}x = 0 \Rightarrow T^nTx = 0$$
$$\Rightarrow T^n y = 0$$
$$\Rightarrow y\in ker(T^n)$$

con lo que se obtiene lo requerido.

Luego, estamos en las hipótesis de la [proposición 5.4] y por lo tanto la sucesión es estacionaria.

En efecto, se tiene que existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$ker(T^{k_0}) = ker(T^{k_0+1})$$

Ahora, probemos que $ker(T^{k_0+2}) = ker(T^{k_0+1})$. Por lo anterior, sabemos que

$$ker(T^{k_0+1}) \subseteq ker(T^{k_0+2})$$

Por lo que resta probar que $ker(T^{k_0+2}) \subseteq ker(T^{k_0+1})$. En efecto, sea $x\in ker(T^{k_0+2})$ entonces

$$T(ker(T^{k_0+2})) \subseteq ker(T^{k_0+1}) = ker(T^{k_0})$$

de donde,

$$Tx\in ker(T^{k_0}) \Rightarrow T^{k_0}Tx = 0 \Rightarrow T^{k_0+1}x = 0$$
$$\therefore x\in ker(T^{k_0+1})$$

Así, recursivamente, se prueba que

$$ker(T^k) = ker(T^{k_0}) \qquad \forall k\geq k_0.$$

Martes, 2 de agosto de 2023.

Observación: Con respecto al [corolario 5.5] se demostró que $(ker(T^n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subespacios vectoriales cerrados de E creciente y estacionaria existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$ker(T^{k_0}) = Ker(T^k) \qquad \forall k\geq k_0$$

De la misma manera, se tiene que para la sucesión $(Img(T^n))_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de subespacios vectoriales cerrados de E decreciente y estacionaria existe $\hat{k}_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{Img}(T^{k_0}) = \mathrm{Img}(T^{k}) \qquad \forall k \geq k_0$$

Además, se puede mostrar que $k_0 = \hat{k}_0$.

Proposición 5.6. Sean $K \in \mathcal{K}(E)$ y $T = Id - K$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Ver Corolario 3.2.9 [5]

a) $\ker(T) = \{0\}$ (inyectiva)

b) $\mathrm{Img}(T) = E$ (sobreyectiva)

Demostración:

$\Rightarrow$ Por absurdo, supongamos que T es inyectivo, pero no sobreyectivo. Por lo anterior, tenemos que

$$T(\mathrm{Img}(T^n)) \subseteq \mathrm{Img}(T^{n+1})$$

Luego, mostremos que si $\ker(T) = \{0\}$, entonces

$$\mathrm{Img}(T^{n+1}) \subsetneq \mathrm{Img}(T^n)$$

En efecto, por inducción:

- Para $n=0$, se tiene que

$$\mathrm{Img}(T) \subsetneq \mathrm{Img}(Id)$$

- Supongamos que

$$\mathrm{Img}(T^{n+1}) \subsetneq \mathrm{Img}(T^n)$$

- Mostremos que

$$\mathrm{Img}(T^{n+2}) \subsetneq \mathrm{Img}(T^{n+1})$$

Por la base de la inducción, se tiene que existe $y \in \mathrm{Img}(T^n)$ tal que $y \notin \mathrm{Img}(T^{n+1})$ ([A])
De esta manera, existe z tal que

$$y = T^n z$$

Tomando $w = T(y)$, se sigue que

$$w \in \mathrm{Img}(T^{n+1}) \qquad (\text{Por definición})$$

Pero $w \notin \mathrm{Img}(T^{n+2})$; en efecto, si no se tuviera esto, entonces

$$\begin{aligned} w \in \mathrm{Img}(T^{n+2}) &\Rightarrow w = T^{n+2}(v) \\ &\Rightarrow T(T^{n+1}(v)) = w = Ty \end{aligned}$$

$\therefore$ Por inyectividad, $T^{n+1}(v) = y$

$$\Rightarrow y \in \mathrm{Img}(T^{n+1}) \quad \Rightarrow\Leftarrow \quad (\text{Contradice [A]})$$

Así, por el [Corolario 5.4] se sigue el resultado.

$\Leftarrow$) Nuevamente, razonemos por el absurdo; así, supongamos que T es sobreyectiva pero no inyectiva. Por lo anterior, sabemos que

$$T(\ker(T^n)) \subseteq \ker(T^{n+1}).$$

Ahora, mostremos que

$$\ker(T^n) \subsetneq \ker(T^{n+1})$$

Por inducción:

- Para $n=0$,

$$\ker(Id) \subsetneq \ker(T) \qquad \text{(Pues no es inyectivo)}$$

- Para $n \in \mathbb{N}$

$$\ker(T^n) \subsetneq \ker(T^{n+1})$$

- Probemos que

$$\ker(T^{n+1}) \subsetneq \ker(T^{n+2})$$

Por la base de inducción, existe $x \in \ker(T^{n+1})$ tal que $x \notin \ker(T^n)$, i.e.

$$T^{n+1}x = 0 \quad \wedge \quad T^n x \neq 0.$$

Como T es sobreyectivo, existe $z \in E$ tal que $Tz = x$, entonces

$$T^{n+2} z = 0 \quad \wedge \quad T^{n+1} z \neq 0$$

Por lo tanto,

$$z \in \ker(T^{n+2}) \quad y \quad z \notin \ker(T^{n+1})$$

con lo que se sigue el resultado.

Definición 5.7 Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$ con E y F espacios de Banach. Llamamos T un operador de Fredholm si

a) $\ker(T)$ es de dimensión finita

b) $Img(T)$ es cerrada y de codimensión finita.

Observación: Al espacio de los operadores de Fredholm los notaremos $Fred(E,F)$

Si $T \in Fred(E,F)$, definimos

$$\underset{\text{(índice)}}{Ind}(T) = \dim(\ker(T)) - \operatorname{codim}(Img(T))$$

Consideremos

$$S : \ell^p \longrightarrow \ell^p \qquad\qquad S^* : \ell^p \longrightarrow \ell^p$$

$$x \longmapsto (x_{n+1})_n \qquad\qquad x \longmapsto S^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=1 \\ x_{n-1} & \text{c.c.} \end{cases}$$

- $\ker(S) = \text{span}\{e_1\}$
- $\dim(\ker(S)) = 1$
- $Img(S) = \ell^p$

$\therefore S \in Fred(\ell^p)$

$Ind(S) = 1$

- $\ker(S^*) = \{0\}$
- $Img(S^*) = \ell^p \setminus \text{span}\{e_1\}$

$\dim(E/Img(S^*)) = \operatorname{codim}(Img(S^*)) = 1$

$\therefore S^* \in Fred(\ell^p)$

$Ind(S^*) = -1$.

Ver teoremas fundamentales de homomorfismos.

Proposición 5.8. Si $K \in \mathcal{K}(E)$ y $T = Id - K$, entonces $T \in Fred(E)$ e $Ind(T) = 0$

Demostración:

Si consideramos que $\dim(\ker(T)) = 0$, por la [proposición 5.6] se sigue el resultado.
Por otro lado, si ahora asumimos que $\dim(\ker(T)) = 1$.

Consideremos $\dim(\ker(T^*)) = \dim(\ker(T))$. (mostremos esto).
Notemos que

$$E = \ker(T) + F \quad \text{y} \quad E' = \ker(T^*) + F^*$$

$$d = \dim(\ker(T)) \qquad d^* = \dim(\ker(T^*))$$

Mostremos que $d^* \leq d$. Por absurdo, supongamos que $d < d^*$, por lo tanto existe F tal que

$$E = \ker(T) \oplus F$$

Más aún, existe

$$P_{\ker(T)} : E \to \ker(T) = \ker(Id - K)$$
$$x = x_F + x_{\ker(T)} \mapsto x_{\ker(T)}$$

Por otra parte, como $Img(T) = \ker(T^*)^{\perp}$ y como $\dim(\ker(T^*)) = d^* < +\infty$, entonces $Img(T)$ tiene codimensión finita

Por otra parte, $codim(Img(T))$ es finita de dimensión d^*, podemos definir (por las dimensiones) $\Lambda : \ker(T) \to F$ (con F s.t. de $Img(T)$)
el cual es inyectivo, con lo que podemos definir

$$S = T + \Lambda P_{\ker(T)} = Id - \tilde{K} \quad \text{donde} \quad \tilde{K} = K - \Lambda P_{\ker(T)} \in \mathcal{K}(E)$$

Operador de rango finito

$$\Rightarrow (\underbrace{Id - K}_{\in Img(T)} + \underbrace{\Lambda P_{\ker(T)}}_{\in \tilde{F}})(x) = 0$$

$\Leftrightarrow x - Kx = 0$ $\quad$ $\Lambda P_{\ker(T)} x = 0$

$\Leftrightarrow x \in \ker(T)$ $\quad$ Λ inyectiva

$\Rightarrow x = x_{\ker(T)}$ $\quad$ $P_{\ker(T)} x = 0$

$x_{\ker(T)} = 0$

Por lo tanto, S es sobreyectiva.

$S = T + \Lambda P_{\ker(T)}$ (Operador compacto)

Utilizando la [Proposición 5.6]

Se concluye que S es sobreyectiva, lo cual es absurdo, pues existe algún $f \in F$, con $f \notin Img(\Lambda)$ (pues esta no es sobreyectiva) y así, la ecuación

$$(Id - S)u = f \quad \text{no tiene solución [*]}$$

Supongamos que [*] sí tiene solución: así, existe $\hat{u} \in E$ tal que

$$f = (Id - S)\hat{u} = \hat{u} - S\hat{u} = \hat{u} - T\hat{u} - \Lambda P_{\ker(T)} \hat{u}$$

$$\Rightarrow f = \hat{u} - T\hat{u} - \Lambda w \quad \text{(Se tiene la contradicción por espacio vectorial)}$$

En la primera parte, mostramos que $|\ker(T^*)| \leq |\ker(T)|$

Ahora, consideremos un argumento similar tomando K como K^*, entonces

$$E' = \ker(T^*) + F^* \quad \text{y} \quad E'' = \ker(T^{**}) + F^{**}$$

Ahora, vamos a probar que $d^{**} \leq d^*$ con $d^{**} = \dim(\ker(T^{**}))$

luego, definamos

$$\hat{P}_{\ker(T^*)} : E' \to \ker(T^*) \quad \text{y} \quad \hat{\Lambda} : \ker(T^*) \to F'$$
$$x = x_{\ker(T^*)} + x_{F'} \mapsto x_{\ker(T^*)}$$

Viernes, 4 de agosto de 2023

Observación: Se tiene que $(Img(T^n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de s.e.v. cerrados decreciente, y estacionaria.

Análogamente, la sucesión $(ker(T^n))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y estacionaria.

Así, por lo anterior, se tiene que

- Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$Img(T^n) = Img(T^{k_0}) \qquad \forall n \geq k_0$$
- Existe $\hat{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que
$$ker(T^n) = ker(T^{k_0}) \qquad \forall n \geq \hat{k_0}$$

Se puede mostrar que $k_0 = \hat{k_0}$

Demostración (Por absurdo $\hat{k_0} < k_0$)

Notemos que
$$d = dim(ker(T^{k_0})) = dim(ker(T^{\hat{k_0}}))$$
Por lo anterior,
$$d = codim(Img(T^{\hat{k_0}})) \Rightarrow co\text{-}dim(Img(T^{k_0})) < d$$
(Por contenciones decrecientes de la imagen)

Pero esto es absurdo. Así, $\hat{k_0} = k_0$.

Nota 5.8 [*] (Alternativa de Fredholm)

Ver teorema 6.6 [1]

Sean $K \in \mathcal{K}(E)$ y $T = Id - K$, entonces se tiene que

a) La $dim(ker(T))$ es finita

b) La $Img(T)$ es cerrada y de codimensión igual a la dimensión del $ker(T)$
$$Img(T) \overset{\perp}{=} ker(T^*)$$

c) Se tiene que T es inyectivo si y solo si es sobreyectivo.

d) La $dim(ker(T)) = dim(ker(T^*))$

Observación: Para conocer si el problema (dado f)
$$(Id - K)u = f$$
tiene solución, estudiamos el problema
$$(Id - K)u = 0.$$
Si el problema homogéneo admite únicamente la solución nula.

Caso contrario: Existen dos opciones

- Si $f \in {}^{\perp}ker(T^*)$ el problema admite infinitas soluciones
- Si $f \notin {}^{\perp}ker(T^*)$ entonces no existe solución.

Así, análogamente a lo anterior, se prueba que

$$\dim(\underbrace{\mathrm{Ker}(T^{**})}_{(d^{**})}) \leq \dim(\underbrace{\mathrm{Ker}(T^{*})}_{(d^{*})}) \leq \dim(\underbrace{\mathrm{Ker}(T)}_{(d)})$$

Como la inyección no necesariamente es sobreyectiva, se tiene lo siguiente

No obstante, como

$$J(\mathrm{Ker}(T)) \subseteq \mathrm{ker}(T^{**})$$ ← Si se tiene esto, se sigue el resultado.

$$\dim(\underbrace{J(\mathrm{ker}(T))}_{(d)}) \leq \dim(\underbrace{\mathrm{ker}(T^{**})}_{(d^{**})})$$ (Pendiente)

Ejercicio 6.6 (Brezis) Sea $1 \leq q \leq p \leq +\infty$. Muestre que la inyección canónica de $L^p(0,1)$ en $L^q(0,1)$ es continua pero no compacta.

Sugerencia: Use las funciones de Rademacher.

Solución:

Consideremos la inyección:

$$J : L^p(0,1) \to L^q(0,1)$$
$$f \mapsto Jf = f$$

Entonces, como

$$\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}$$

En efecto $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q}$

$$\|f\|_{L^q}^q = \int_0^1 |f(x)|^q\,dx$$
$$\leq \left(\int_0^1 \left(|f(x)|^q\right)^{p/q} dx\right)^{q/p} \left(\int_0^1 dx\right)^{q/p'}$$
$$\leq \left(\int_0^1 |f(x)|^p\right)^{q/p}$$
$$\Rightarrow \|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}$$

Luego, si $\|f\|_{L^p} = 1$, entonces

$$\|Jf\|_{L^q} \leq \|J\|_{L^p} \leq 1$$

Por lo tanto, la inyección es continua.

Ahora, probemos que la inyección no es compacta.

En efecto, consideremos la sucesión

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{con} \quad f_n(x) = \mathrm{sen}(2\pi n x)$$

Luego, para $n > m$, sea $k = n-m$ y $l = n+m$, entonces

$$\|f_n - f_m\|_{L^1} = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx$$
$$= \int_0^1 |\mathrm{sen}(2\pi n x) - \mathrm{sen}(2\pi m x)|\,dx$$

$2(\mathrm{sen}(\theta) - \mathrm{sen}(\beta)) = \mathrm{sen}\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\beta}{2}\right)$

$$= 2\int_0^1 |\mathrm{sen}(2\pi k x)|\,|\cos(2\pi l x)|\,dx$$

$|\mathrm{sen}(x)| \geq \mathrm{sen}^2(x) \quad \forall x \in [0, 2\pi]$

$$\geq 2\int_0^1 \mathrm{sen}^2(2\pi k x)\cos^2(2\pi k x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \cos(4k\pi x)\right)\left(1 + \cos(4l\pi x)\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}$$

Así, la sucesión no admite ningún punto de acumulación y por lo tanto, mediante la inyección canónica no admite ninguna subsucesión convergente.

Ejercicio. Sean $T \in \mathcal{L}(E)$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R(T)$ tal que $\lim \lambda_n = \lambda$ en $\mathbb{C}$.
Suponemos que $(R_T(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((T-\lambda_n Id)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.
Mostremos que $\lambda \in R(T)$.

Demostración.

Notemos que $\lambda_n \to \lambda$. Además, como $(R_T(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe $M>0$, tal que

$$\|R_T(\lambda)\|_{\mathcal{L}(E)} = \|(T-\lambda_n Id)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} < M$$

De esta manera, por definición de la norma,

$$\sup_{\|u\|=1} \|(T-\lambda_n Id)^{-1}u\|_{\mathcal{L}(E)} < M$$

$$\Rightarrow \|(T-\lambda_n Id)^{-1}u\|_{\mathcal{L}(E)} < M \qquad \forall u\in E, \text{ con } \|u\|=1$$

P.D. $T-\lambda Id$ es invertible.

Por lo anterior, como el operador invertible (el operador que devuelve el operador inverso) es continuo, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \|(T-\lambda_n Id)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} = \|(T-\lambda Id)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} < M$$

Sabemos que $\frac{T}{\lambda} - Id$ es invertible si $\|T/\lambda\| < 1$.

Ahora, como $Id \in Inv(E)$, entonces para todo $\hat{T}$ tal que

$$\hat{T} \in B(Id, r) \subseteq Inv(E) \qquad \text{con } r = \frac{1}{\|Id^{-1}\|} = 1$$

i.e., si

$$\|\hat{T} - Id\| < 1, \text{ entonces } \hat{T} \text{ es invertible.}$$

$$\begin{aligned}
\|(T-\lambda Id) - Id\| &= \|T - Id(\lambda-1) + (T-\lambda_n Id) - (T-\lambda_n Id)\| \\
&= \|(\cancel{T}-\lambda Id) - (\cancel{T}-\lambda_n Id) + (T-\lambda_n Id) - Id\| \\
&= \|\lambda_n Id - \lambda Id + T - \lambda_n Id - Id\| \\
&\leq \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{<\varepsilon}\|Id\| + \|T - Id(\lambda_n+1)\|
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|(T-\lambda Id) - Id\| &\leq \|(T-\lambda Id) - Id\| + \varepsilon \\
&\leq \|(T-\lambda_n Id) - (T-\lambda_n Id)^{-1}(T-\lambda_n Id)\| + \varepsilon \\
&= \|T-\lambda_n Id\|\,\|Id - (T-\lambda_n Id)^{-1}\| + \varepsilon
\end{aligned}$$

Si consideramos

$$T-\lambda_n Id = (T-\lambda Id)\left(Id - (T-\lambda Id)^{-1}\left((T-\lambda_n Id) - (T-\lambda Id)\right)\right)$$

Basta probar que la norma de esto es menor o igual a 1

Con esto, $T-\lambda Id$ está en:

$$T-\lambda Id \in B(Id, r) \subseteq Inv(E)$$

así, se sigue el resultado.

모모: Ver Stack 4748672.

Ejercicio. Sean $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(E)$ tal que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(E)$

Muestre que para todo compacto $K \subseteq R(T)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subseteq R(T_n) \qquad \forall n \geq n_0$$

y que la sucesión de resolventes restringidas a K con $n \geq n_0$ converge uniformemente sobre K

Demostración:

Sea $K \subseteq R(T)$, cualquiera. Puesto que $T_n \to T$, entonces, para $\lambda \in K$, se sigue que

$$(T_n - \lambda Id)^{-1} \to (T - \lambda Id)^{-1} \text{ en } \mathcal{L}(E), \iff \|(T_n - \lambda Id)^{-1} - (T - \lambda Id)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} =$$

notemos que la convergencia anterior fue uniforme, sobre K. Por lo tanto

$$(T_n - \lambda Id)^{-1} \to (T - \lambda Id)^{-1} \qquad \forall \lambda \in K \subseteq R(T). \qquad [A]$$

Por otro lado, como K es compacto, admite un subrecubrimiento finito; ie

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_i \qquad \text{con } U_i \text{ abiertas en } \mathbb{C}$$

(Note que $K \subseteq R(T) \subseteq \mathbb{C}$). Por lo tanto, K es precompacto y así, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que

¿Hay diferencia?

$$K \overset{=}{\subseteq} \bigcup_{i=1}^{m} B(\lambda_i, \varepsilon)$$

Así, por lo anterior y usando [A], se sigue que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(T_n - \lambda_i Id)^{-1} - (T - \lambda_i Id)^{-1}\| < \varepsilon \qquad \forall i = 1, \dots, k \qquad \forall n \geq k_0$$

luego, tomando $\ell = \max\{k_0, m\}$, entonces

$$\|(T_n - \lambda_i Id)^{-1} - (T - \lambda_i Id)^{-1}\| < \varepsilon \qquad \forall i = 1, \dots, k \quad \forall n \geq \ell \qquad [B]$$

(Conjeturamos que $n_0 = \ell$) $\qquad (T_n - \lambda Id)$ es invertible

Tomamos $\hat{n} \geq \ell$ cualquiera

Sea $\lambda \in K$, cualquiera. P.D. $\lambda \in R(T_n)^*$ $\forall \hat{n} \geq \ell$ (Note que $\lambda \in R(T)$)

Puesto que K es precompacto, entonces existe** $\hat{i} \in \{1, \dots, \hat{n}\}$ tal que

$$\lambda \in B(\lambda_{\hat{i}}, \varepsilon) \implies |\lambda - \lambda_{\hat{i}}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

** Por la forma en que se eligió

Así, para probar que $T_n - \lambda Id$ es invertible, notemos que

$$T_n - \lambda Id = (T - \lambda_{\hat{i}} Id)\left(Id - (T - \lambda_i Id)^{-1}\left((T - \lambda_i Id) - (T_n - \lambda Id)\right)\right)$$

Por lo tanto, basta probar que

$$\|(T - \lambda_i Id)^{-1}\left((T - \lambda_i Id) - (T_n - \lambda Id)\right)\| < 1.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
&\|(T - \lambda_i Id)^{-1}\left((T - \lambda_i Id) - (T_n - \lambda Id)\right)\| \\
&\leq \|(T - \lambda Id)^{-1}\| \, \|(T - \lambda_i Id) - (T_n - \lambda Id)\| \\
&\leq M\left(\|T - T_n\| + |\lambda - \lambda_i|\right) \\
&< 1
\end{aligned}$$

Con lo que se sigue el resultado.

* Queremos probar que $T_n - \lambda Id$ es invertible.

Parte b).

Ahora, notemos (Recordemos que $K \subseteq R(T)$

$$g_T : K \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$\lambda \longmapsto g_T(\lambda) = (T - \lambda Id)^{-1}$$

Así, para $n \geq n_0$, consideremos

$$g_{T_n} : K \to \mathcal{L}(E) \qquad \text{(Restricción sobre } g_T)$$

P.D. $g_{T_n} \to g_T$ uniformemente, i.e $\|g_{T_n} - g_T\|_\infty \to 0$

Notemos que

$$\|g_{T_n} - g_T\| = \sup_{\lambda \in K} \|(g_{T_n} - g_T)(\lambda)\|$$
$$\geq \|(g_{T_n} - g_T)(\lambda)\| \qquad \forall \lambda \in K$$

Usamos a partir de aquí.
$$= \|R_\lambda(T_n) - R_\lambda(T)\|$$
$$= \|\cancel{R_\lambda(T_n)} - \cancel{R_\lambda(T)} + R_{\lambda_i}(T_n) - \cancel{R_{\lambda_i}(T_n)} + \cancel{R_{\lambda_i}(T)} - R_{\lambda_i}(T)\|$$
$$\leq \|R_\lambda(T_n) - R_{\lambda_i}(T_n)\| + \|R_\lambda(T) - R_{\lambda_i}(T)\| + \|R_{\lambda_i}(T_n) - R_{\lambda_i}(T)\|$$
$$= |\lambda - \lambda_i| \, \|\underbrace{R_\lambda(T_n) R_{\lambda_i}(T_n)}_{\text{acotado.}}\| + |\lambda - \lambda_i| \, \|\underbrace{R_\lambda(T) R_{\lambda_i}(T)}_{\text{acotado.}}\| + \|R_{\lambda_i}(T_n) - R_{\lambda_i}(T)\|$$
$$\leq |\lambda - \lambda_i| \left(\|R_\lambda(T_n)\| \|R_{\lambda_i}(T_n)\| + \|R_\lambda(T)\| \|R_{\lambda_i}(T)\| \right) + \|R_{\lambda_i}(T_n) - R_{\lambda_i}(T)\|$$

Luego
$$< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Tomando el supremo sobre K se sigue el resultado.

Para la acotación. Note que K es compacto (por lo tanto el supremo sobre el conjunto existe) y además T_n converge uniformemente a T. Así, se sigue la cota anterior.

Ejercicio 6.8 (Brezis) Sean E y F espacios de Banach y sea $T \in K(E,F)$. Asuma que $Img(T)$ es cerrada.

a) Muestre que T es un operador de rango finito. Sugerencia: Use el teorema de la aplicación abierta.

b) Ahora, asuma que $\dim(Ker(T)) < +\infty$. Muestre que $\dim(E) < +\infty$.

Demostración:

literal a)

Considere la restricción de T sobre su imagen; así T es sobreyectivo y por el teorema de la aplicación abierta, existe $c > 0$ tal que

$$\underbrace{\overline{B_{Img(T)}}}_{\text{(cerrado)}} \subseteq c\, T(\overline{B_E}) \subseteq \underbrace{\overline{cT(\overline{B_E})}}_{\text{(compacto)}}$$

Por lo tanto, $\overline{B_{Img(T)}}$ es compacta y más aún $Img(T)$ es de dimensión finita.

literal b)

Sea M el suplementario topológico del $ker(T)$, entonces

$$\hat{T} : M \to Img(T)$$
$$x \longmapsto Tx$$

Por lo tanto, $\hat{T}$ es biyectivo y así, $\dim(\hat{A}) < +\infty$ con lo cual $\dim(E) < +\infty$.

Ejercicio 6.14 [1] Sea E un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E)$ con $\|T\| < 1$

a) Muestre que $(Id - T)$ es biyectiva y que

$$\|(Id - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$$

b) Notemos $S_n = Id + T + \dots + T^{n-2} + T^{n-1}$. Muestre que

$$\|S_n - (Id - T)^{-1}\| \leq \frac{\|T\|^n}{1 - \|T\|}$$

literal a)

El resultado es análogo al [Lema 3.3] de los apuntes del semestre anterior

literal b)

Notemos que

$$\begin{aligned} S_n - (Id - T)^{-1} &= S_n - \sum_{k \geq 0} T^k = \sum_{k \geq n}^{+\infty} T^k \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} T^{l+n} \\ &= T^n \sum_{l=0}^{+\infty} T^l \\ &= T^n (Id - T)^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\|S_n - (Id - T)^{-1}\| \leq \|T^n\| \, \|(Id - T)^{-1}\|$$

Luego, por el literal anterior

$$\|S_n - (Id - T)^{-1}\| \leq \frac{\|T^n\|}{1 - \|T\|}$$

Ejercicio 6.15 [1] Sea E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$

a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| > \|T\|$. Muestre que

$$\|Id + \lambda (T - \lambda Id)^{-1}\| \leq \frac{\|T\|}{|\lambda| - \|T\|}$$

b) Sea $\lambda \in \rho(T)$. Muestre que

$$(T - \lambda Id)^{-1} T = T (T - \lambda Id)^{-1}$$

y muestre que

$$\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(T)) \geq \frac{1}{\|(T - \lambda Id)^{-1}\|}$$

literal a)

Sea $f \in E$, notemos

$$u = (Id + \lambda (T - \lambda Id)^{-1}) f = f + \lambda (T - \lambda Id)^{-1} f$$

Por otro lado,

$$\operatorname{dist}(Id, K_0(E)) \leq \| Id - B \| \quad \forall B \in K_0(E)$$
$$= \| Id \| = 1.$$

con lo que se sigue lo requerido.

literal b) Sea $B \in K_0(E)$, entonces

$$\| Id - B \| = \| A^{-1}A - A^{-1}AB \| \leq \| A^{-1} \| \, \| A - AB \|$$

$$\Rightarrow \inf_{B \in K_0(E)} \| Id - B \| \leq \| A^{-1} \| \inf_{B \in K_0(E)} \| A - AB \| \leq \| A^{-1} \| \, \| A \| \inf_{B \in K_0(E)} \| Id - B \|$$

$$\Rightarrow \operatorname{dist}(Id, K_0) \leq \| A^{-1} \| \, \| A \| \operatorname{dist}(Id, B)$$

Si $\operatorname{dist}(Id, K_0(E)) = 1$, se sigue el resultado.

literal c)

Sea S una isometría, con $\| S \| = 1$. Si tomamos $B \in K_0(E)$, existe $x \in K_0(B)$ con $\| x \| = 1$ tal que

$$1 = \| x \| = \| Sx \| = \| Sx - Bx \| \leq \| S - B \| \quad \forall B \in K_0(E)$$
$$\Rightarrow 1 \leq \operatorname{dist}(S, K(E))$$

entonces como $\| S - 0 \| = 1$, entonces

$$\operatorname{dist}(S, K(E)) = 1.$$

literal d)

Se puede ver a T como la composición de S con un operador compacto y así se sigue el resultado.

Proposición 2. Sea A un álgebra de Banach conmutativo, $I \subseteq A$ ideal cerrado propio

a) Si $J \subseteq A$ es un ideal cerrado tal que $I \subseteq J \subseteq A$ entonces J/I es un ideal de A/I

b) Todo ideal de A/I tiene la forma J/I con J algún ideal tal que $I \subseteq J \subseteq A$

c) Si $I \subseteq J \subseteq A$ y J es un ideal, entonces J es propio si y solo si J/I es propio (ideal) en A/I

Demostración

literal a) Como $J \subseteq A$ es un subespacio vectorial con $I \subseteq J \subseteq A$, entonces si tomamos $[x] \in J/I$ se tiene que $[x] \in A/I$ pues

$$[x] = x + J \quad \text{con } x \in J \Rightarrow x \in A \Rightarrow [x] \in J/I$$

P.D. $[x][y] = [xy] \in J_I$, $y \in A$, $xy \in J$

$$[xy] \in J_I$$

literal b)

Sean B un ideal de A/I y $J = \{ x : [x] \in B \}$. P.D. J es un ideal de A

Sean $x, y \in S$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $[x], [y] \in S$

Entonces, se tiene que

$$\lambda u = \lambda f + \lambda^2 (T - \lambda Id)^{-1} f$$

Notemos que, por hipótesis $|\lambda| \geq \|T\| > 0$ entonces $\|T/\lambda\| < 1$, luego por el literal anterior, para $n=1$, se tiene que

$$\|S_1 - (Id - \tilde{T})^{-1}\| = \| Id - (Id - T/\lambda)^{-1}\| \leq \frac{\|\tilde{T}\|}{1 - \|\tilde{T}\|}$$

De donde,

$$\| Id - (Id - T/\lambda)^{-1} \| \leq \frac{\|T\|}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Más aún, como

$$\| Id - (Id - T/\lambda)^{-1} \| = \| Id - \lambda (\lambda Id - T)^{-1} \| = \| Id + \lambda (T - \lambda Id)^{-1} \|$$

Por lo tanto,

$$\| Id + \lambda (T - \lambda Id)^{-1} \| \leq \frac{\|T\|}{|\lambda| - \|T\|}$$

literal b)

Notemos que (usemos las siguientes notaciones) P.D. $A = B$

$$A = (T - \lambda Id)^{-1} T \iff \underbrace{(T - \lambda Id) A = T}_{[A]} \quad \text{y} \quad B = T (T - \lambda Id)^{-1}$$

Por otro lado, sabemos que

$$(T - \lambda Id)(T - \lambda Id)^{-1} = Id$$
$$\Rightarrow \quad Id = T(T - \lambda Id)^{-1} - \lambda Id (T - \lambda Id)^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad Id = B - \lambda Id (T - \lambda Id)^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad B = Id + \lambda Id (T - \lambda Id)^{-1}$$

Así, junto con la hipótesis, como

$$\begin{aligned}(T - \lambda Id) B &= (T - \lambda Id)(Id + \lambda Id (T - \lambda Id)^{-1}) \\ &= (T - \lambda Id) + \lambda Id \\ &= T\end{aligned}$$

De donde, por unicidad, se sigue que $A = B$ como se quería.

↳ segunda parte:

Así, como $\lambda \in \rho(T)$ y este es abierto, entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(\lambda, r) \subsetneq \rho(T)$$

Por lo tanto, resta probar que

$$r = \frac{1}{\|(T - \lambda Id)^{-1}\|}$$

En efecto, sea $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$, buscamos resolver el problema

$$Tu - \hat{\lambda} u = f$$

Por lo tanto,

$$Tu - \lambda u = f + \hat{\lambda} u - \lambda u \quad \Rightarrow (T - \lambda Id) u = f + (\hat{\lambda} - \lambda) u$$
$$\Rightarrow \quad u = (T - \lambda Id)^{-1} [f + (\hat{\lambda} - \lambda) u]$$

Así, si definimos

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto \varphi(u) = (T - \lambda \mathrm{Id})^{-1}[f + (\hat{\lambda} - \lambda)u] \end{aligned}$$

entonces, por el teorema de punto fijo de Banach, basta probar que φ es estrictamente contractiva; para ello, note que

$$\begin{aligned} \| \varphi(v) - \varphi(\omega) \| &= \| (T - \lambda \mathrm{Id})^{-1} (\hat{\lambda} - \lambda)(v - \omega) \| \\ &\leq \| (T - \lambda \mathrm{Id})^{-1} \| \, |\hat{\lambda} - \lambda| \, \| v - \omega \| \end{aligned}$$

De esta manera, se sigue el resultado si

$$|\hat{\lambda} - \lambda| < \frac{1}{\| (T - \lambda \mathrm{Id})^{-1} \|}$$

Tomando $r = \left(\| (T - \lambda \mathrm{Id})^{-1} \| \right)^{-1}$ se concluye que

$$\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)) \geq \frac{1}{\| (T - \lambda \mathrm{Id})^{-1} \|}$$

c) Este literal corresponde a la [Proposición 3.20] de estos apuntes.

Ahora, asumamos que $1 \in \rho(T)$ y definamos

$$U = (T + I)(T - I)^{-1} = (T - I)^{-1}(T + I)$$

d) Muestre que $1 \in \rho(U)$ y obtenga una expresión simple para $(U - I)^{-1}$ en términos de T.

e) Muestre que $T = (U + I)(U - I)^{-1}$

f) Considere la función $f(t) = \dfrac{t+1}{t-1}$, con $t \in \mathbb{R}$. Muestre que

$$\sigma(U) = f(\sigma(T))$$

literal d)

P.D. $1 \in \rho(U)$ i.e. $U - \mathrm{Id}$ es invertible.

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} U - \mathrm{Id} &= (T + \mathrm{Id})(T - \mathrm{Id})^{-1} - (T - \mathrm{Id})(T - \mathrm{Id})^{-1} \\ &= (T + \mathrm{Id} - T + \mathrm{Id})(T - \mathrm{Id})^{-1} \\ &= 2\,\mathrm{Id}\,(T - \mathrm{Id})^{-1} \\ &= 2(T - \mathrm{Id})^{-1} \end{aligned}$$

Así, como $1 \in \rho(T)$, entonces $1 \in \rho(U)$ y además

$$(U - \mathrm{Id})^{-1} = [2(T - \mathrm{Id})]^{-1} = \frac{T - \mathrm{Id}}{2}$$

literal e)

Notemos que

$$(U + \mathrm{Id})(U - \mathrm{Id})^{-1} = [(T + \mathrm{Id})(T - \mathrm{Id})^{-1} + \mathrm{Id}]\left(\frac{T - \mathrm{Id}}{2}\right)$$

$$= 2^{-1}[(T+Id)+(T-Id)]$$
$$= 2^{-1}[2T]$$
$$= T$$

Como se quería.

literal f)

Como $1 \in \rho(\mathcal{U})$, entonces para todo $t \in \sigma(T)$; $f(t)$ está bien definido. Por lo tanto, basta probar que $(T-\lambda Id)$ es invertible si y sólo si $\mathcal{U}-f(\lambda)Id$ es invertible.

De esta manera, por lo hecho anteriormente,

$$\begin{aligned} T-\lambda Id &= (\mathcal{U}+Id)(\mathcal{U}-Id)^{-1} - \lambda(\mathcal{U}-Id)(\mathcal{U}-Id)^{-1} \\ &= (\mathcal{U}+Id-\lambda\mathcal{U}+\lambda Id)(\mathcal{U}-Id)^{-1} \\ &= ((1-\lambda)\mathcal{U}+(1+\lambda)Id)(\mathcal{U}-Id)^{-1} \\ &= (1-\lambda)(\mathcal{U}+f(\lambda)Id)(\mathcal{U}-Id)^{-1} \end{aligned}$$

con lo que se sigue el resultado.

Ejercicio 6.16. Sean E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$

Ver [1]

a) Asuma que $T^2 = Id$. Muestre que $\sigma(T) \subseteq \{-1,1\}$ y determine $(T-\lambda Id)^{-1}$ para $\lambda \neq \pm 1$.

b) Más aún, asuma que existe un entero $n \geq 2$ tal que $T^n = Id$. Muestre que $\sigma(T) \subseteq \{-1,1\}$ y determine $(T-\lambda Id)^{-1}$ para $\lambda \pm 1$.

c) Asuma que existe un entero $n \geq 2$ tal que $T^n = 0$. Muestre que $\sigma(T) = \{0\}$ y determine $(T-\lambda Id)^{-1}$ para $\lambda \neq 0$.

d) Asuma que existe un entero $n \geq 2$ tal que $\|T^n\| < 1$. Muestre que $Id-T$ es biyectiva y de una expresión para $(Id-T)^{-1}$ en términos de $(Id-T^n)^{-1}$ y las iteraciones de T.

literal a)

Notemos que

$$(T-\lambda Id)(T+\lambda Id) = T^2+\lambda T-\lambda T+\lambda^2 Id = T^2-\lambda^2 Id = Id(1-\lambda^2)$$

Por lo tanto, $(T-\lambda Id)(T+\lambda Id)$ es invertible si y solo si $Id(1-\lambda^2)$ es invertible. Notemos que lo último es cierto cuando $1-\lambda^2 \neq 0$, i.e.,

$$\sigma(T) \subseteq \{-1,1\}$$

Sea $\lambda \in \rho(T)$, entonces

$$Id = (1-\lambda^2)^{-1}(T-\lambda Id)(T+\lambda Id)$$

además

$$Id = (T-\lambda Id)(T-\lambda Id)^{-1}$$

De donde

$$(1-\lambda^2)^{-1}(\cancel{T-\lambda Id})(T+\lambda Id) = (\cancel{T-\lambda Id})(T-\lambda Id)^{-1}$$

Con lo que

$$(T-\lambda Id)^{-1} = \frac{T+\lambda Id}{1-\lambda^2}$$

literal b)

Consideremos el polinomio

$$p(t) = t^n - \lambda^n \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}$$

Entonces, se tiene que

$$p(t) = (t-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} t^k \lambda^{n-k-1}$$

Luego, notemos que

$$p(T) = T^n - \lambda^n Id = Id(1-\lambda^n) \qquad [A]$$

Sean $q, r \in \mathbb{R}[x]$ y T un operador lineal, entonces

$$q(T) \circ r(T) = r(T) \circ q(T)$$

pues $\mathbb{R}[x]$ es conmutativo

Ver Stack: 4724178.

Por otra parte, también se tiene que

$$(T-\lambda Id) \sum_{k=0}^{n-1} T^k \lambda^{n-k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} T^k \lambda^{n-k-1} \right) (T-\lambda Id) = p(T)$$

Así, por [A], se tiene que $p(T)$ es biyectivo y por lo tanto

$$(T-\lambda Id) \quad y \quad \sum_{k=0}^{n-1} T^k \lambda^{n-k-1}$$

← Ver Stack 2237479 por Henno Brandsma

Más aún $\sigma(T) \subseteq \{-1, 1\}$.

son biyectivos y de esta manera $\lambda \in \rho(T)$. Por otro lado, como

$$Id(1-\lambda^n) = (T-\lambda Id) \left(\sum_{k=0}^{n-1} T^k \lambda^{n-k-1} \right)$$

$$\Rightarrow (T-\lambda Id) \frac{1}{1-\lambda^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} T^k \lambda^{n-k-1} \right) = Id$$

Con lo que

$$(T-\lambda Id)^{-1} = \frac{1}{1-\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k \lambda^{n-k-1}$$

literal c)

Análogamente al literal anterior, ahora consideremos

$$p(T) = -\lambda^n Id$$

entonces el polinomio es biyectivo solo si $\lambda \neq 0$

Lunes, 14 de agosto de 2023

Teorema 5.9 [Descomposición espectral de operadores adjuntos (normales) de operadores compactos en espacios de Hilbert]

Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ compacto normal. Entonces

$$H = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \sigma_d(T)}} \ker(T-\lambda Id)$$

Observación: Si H es separable, entonces $H = \overset{\perp}{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} E_n$ donde $E_n = \ker(T-\lambda_n Id)$ con $\lambda_n \in \sigma_d(T)$.

Capítulo 6 : Álgebras de Banach

Definición 6.1. Sea $(\mathcal{A}, \oplus, \cdot, \mathbb{C})$ un espacio vectorial complejo. Decimos que $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja si existe una operación

$$\begin{aligned} \odot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (a,b) &\longmapsto a \odot b \end{aligned}$$

que verifica lo siguiente:

a) Asociativa: $\forall a,b,c \in \mathcal{A} \quad a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$

b) Distributiva (respecto a la suma): $\forall a,b,c \in \mathcal{A}$

$$c \odot (a \oplus b) = c \odot a \oplus c \odot b$$

$$(a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$$

Observación: El operador $\odot$ no necesariamente es conmutativo.

No necesariamente existe el elemento neutro para el producto $\odot$

Definición 6.2. -Álgebra de Banach- Sea $(\mathcal{A}, \oplus, \odot, \cdot, \mathbb{C})$ un álgebra compleja. Decimos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach si

- $(\mathcal{A}, \oplus)$ es un espacio de Banach
- $\forall a,b \in \mathcal{A} \quad \|a \odot b\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \|b\|_{\mathcal{A}}$

Observación: El segundo literal de la proposición anterior nos dice que $\odot$ es continuo. En efecto, para $(a_n, b_n)_n \in A \times A$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n, b_n) = (a,b)$$

Mostremos que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n \odot b_n = a \odot b$

Luego, notemos que

$$\begin{aligned} \|a_n \odot b_n - a \odot b\| &= \|a_n \odot b_n + a \odot b_n - a \odot b_n - a \odot b\| \\ &= \|b_n \odot (a_n - a)\| + \|a \odot (b_n - b)\| \\ &\leq \|b_n\| \|a_n - a\| + \|a\| \|b_n - b\| \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

En particular, el operador

$$\begin{aligned} \varphi_x : A &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto \varphi_x(y) = y \odot x \end{aligned} \qquad \text{continuo para todo } x \in A$$

Definición 6.3 Sea $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach. Decimos que $\mathcal{A}$ es unitaria si existe $e \in \mathcal{A}$ tal que

$$e \odot a = a \odot e = a \qquad \forall a \in \mathcal{A}$$

Observación: Si e existe es único

Definición 6.4 Sea $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ un álgebra unitaria y consideremos $a \in \mathcal{A}$. Decimos que a es invertible si existe $a^{-1} \in \mathcal{A}$ tal que

$$a^{-1} \odot a = a \odot a^{-1} = e$$

Donde a^{-1} es dicho el inverso del elemento de a.

Observación: Si un elemento es invertible, su elemento inverso es único.

Definición 6.5 Sea $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach y $a \in \mathcal{A}$. Definimos el conjunto conmutador de «a» como

$$\mathcal{C}_a = \{ b \in \mathcal{A} : b \odot a = a \odot b \}$$

Observación: Si $\mathcal{A}$ es unitaria, entonces para todo $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{C}_a \neq \emptyset$

Definición 6.6. Sea $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach. Decimos que $\mathcal{A}$ es conmutativa si

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad a \odot b = a \odot b$$

Observación: Si $\mathcal{A}$ es conmutativa, entonces $\mathcal{C}_a = \mathcal{A}$

Ejemplos: $\mathbb{C}$ es un álgebra de Banach conmutativa e invertible

Definición 6.7 Sea $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ una álgebra de Banach. Decimos que $\mathcal{A}$ es invertible si

$$(\forall x \in \mathcal{A})(x \neq 0)(\exists!\, x^{-1} \in \mathcal{A})(x \odot x^{-1} = x^{-1} \odot x = e)$$

Ejemplo: $\mathcal{L}(E)$ con E un espacio de Banach complejo

$$S, T \in \mathcal{L}(E) \qquad S \odot T = T \odot S$$

$\mathcal{L}(E)$ es unitaria, no es conmutativa, no es invertible.

› Ahora, consideremos

$$A = C^1([0,1], \|\cdot\|) \qquad \text{con } \|\cdot\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\|fg\|_* &= \|f \cdot g\|_\infty + \|(f \cdot g)'\|_\infty \\
&= \|fg\|_\infty + \|f'g + fg'\|_\infty \\
&\leq \|fg\|_\infty + \|f'g\| + \|fg'\|_\infty \\
&\leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f'\|\|g\| + \|f\|\|g'\| + \|f'\|\|g'\| \\
&\leq \|f\|(\|g\| + \|g'\|) + \|f'\|(\|g\| + \|g'\|) \\
&\leq (\|g\| + \|g'\|) + (\|f\| + \|f'\|) \\
&\leq \|g\|_* \|f\|_*
\end{aligned}$$

Así, es unitaria, conmutativa pero no invertible

› Por otro lado, consideremos

3) $\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \underset{x\in\Omega}{\text{supess}} |f(x)| < +\infty \right\}$

- Si $|\Omega| < +\infty$

  Entonces $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ es un álgebra conmutativa unitaria no invertible.
- Si $|\Omega| = +\infty$ se tiene el mismo resultado.

4) $\mathcal{L}^1(\Omega)$ definamos para $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dy\, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int |f(x-y)|\, dx\, dy$$

$$\leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

En el caso general, se tiene que

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \text{con} \quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Con esto, $(\mathcal{L}^1(\Omega), *)$ es un álgebra de Banach conmutativa no unitaria.

Consideremos la transformada de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x)\, dx$$

Si $f \in L^1$, entonces

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int |f(x)|\, dx = \|f\|_{L^1}$$

Por otro lado

$$L^\infty_\xi = \left\{ g \in L^\infty : g(\xi) = \hat{f}(\xi) \text{ con } f \in L^1(\mathbb{R}) \right\} \subseteq L^\infty$$

Si $g \in L^\infty_\xi$ y $f \in L^\infty_\xi$, entonces

$$g(\xi) = \hat{g}_1(\xi) \quad \text{y} \quad f(\xi) = \hat{f}_1(\xi) \qquad g_1 \in \mathcal{L}^1 \quad f_1 \in \mathcal{L}^1$$

entonces

$$g(\xi)\, f(\xi) = \hat{g}_1(\xi)\, \hat{f}_1(\xi) = \widehat{g_1 * f_1}$$

Ejercicio. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ un elemento del espectro de T que no es un valor propio

Ver 4 - P282 - 2021B
Ver Stack 758299

- Muestre que, para todo operador compacto $K \in \mathcal{K}(E)$, λ está en el espectro de $T+K$.

Demostración

Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $\lambda = 0$.

En efecto, si $\lambda \neq 0$, definamos $\hat{T} = T - \lambda Id$, entonces

$$0 \in \sigma(\hat{T}) \iff \lambda \in \sigma(T)$$

más aún, 0 no es un valor propio de $\hat{T}$ si λ no es un valor propio de T

Pues si lo fuera, entonces, por un lado

$$(T - \lambda Id)u \neq \lambda u \qquad y \qquad \hat{T}u = \lambda u \iff (T - \lambda Id)u = \lambda u$$

Ahora, si $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$, entonces T no es invertible, i.e. T no es inyectiva o sobreyectiva. Supongamos que T no es inyectiva, esto no es posible pues entonces $0 \in \sigma_p(T)$. De esta manera, T no es sobreyectivo pero sí inyectivo.

Por absurdo, supongamos que $0 \notin \sigma(T+K)$, entonces $T+K$ es biyectiva, entonces $T+K \in \mathcal{L}(E)$ invertible. Así, por Isomorfismos de Banach $(T+K)^{-1}$ es lineal y acotada.

Luego, como K es compacto, entonces $K(T+K)^{-1}$ es compacto.

Puesto que T es inyectivo, entonces

$$T(T+K)^{-1}y \neq 0 \qquad \forall y \neq 0 \in H$$

De esta manera, como

$$Id\, y = (T+K)(T+K)^{-1}y = \underbrace{T(T+K)y}_{\text{pues este término no es nulo}} + K(T+K)^{-1}y \neq K(T+K)^{-1}y$$

En particular, para todo $y \neq 0 \in H$

$$(Id - K(T+K)^{-1})y \neq 0$$

por lo tanto, $\ker(Id - K(T+K)^{-1}) = \{0\}$. Luego, por la alternativa de Fredholm

$$Img(Id - K(T+K)^{-1}) = E$$

De donde,

$$\begin{aligned}(Id - K(T+K)^{-1})y &= (T+K)(T+K)^{-1}y - K(T-K)^{-1}y \\ &= T(T+K)^{-1}y\end{aligned}$$

Con lo que

$$E = Img(Id - K(T+K)^{-1}) = Img(T(T+K)^{-1}) \subseteq Img(T) \subsetneq E$$

de donde, $Img(T) = E$, y así T es sobreyectiva. Pero esto no es posible. Así $0 \in \sigma(T+K)$

Ejercicio. Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$ y $\tau > 0$. Pruebe que para cualquier función real $u \in C([0,\tau])$ la ecuación integral

$$f(t) = u(t) - a\int_0^t f(x)\,dx \qquad 0 \leq t \leq \tau$$

tiene única solución continua $f: [0,\tau] \to \mathbb{R}$

Demostración:

A partir de la ecuación integral, consideremos lo siguiente

$$f(t) = u(t) - a\int_0^t f(x)\,dx \iff f(t) + a\int_0^t f(x)\,dx = u(t)$$

con T el operador de Volterra $\iff (Id + aT)f(t) = u(t)$

Idea: Recordemos que el operador de volterra es compacto. Pongamos el problema en su forma estándar $T - \lambda Id$

Como $a \neq 0$, entonces, se tiene el problema equivalente

$$(Id - aT)(f)(t) = u(t) \Rightarrow (T - \lambda Id)(f)(t) = \hat{u}(t) \quad \text{con } \lambda = \frac{1}{a} \text{ y } \hat{u} = \frac{u}{a}$$

Por lo tanto, resolver el problema original es equivalente a resolver

$$(T - \lambda Id) f(t) = \hat{u}(t)$$

De esta manera, como T es compacto, y además

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T) = \{0\} \Rightarrow \sigma_p(T) = \emptyset$$

De esta manera, el operador es inyectivo y por lo tanto sobreyectivo

$$T - \lambda Id \qquad \forall \lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$$

Más aún, esto nos dice, que la ecuación admite solución única. Finalmente, para encontrar la solución explícita, notemos que, para todo $\hat{u} \in C([0,\tau])$,

$$(T - \lambda Id) f(t) = \hat{u}(t)$$

existe $f \in C([0,\tau])$ tal que satisface la ecuación anterior

$$f(t) = (T - \lambda Id)^{-1}\hat{u}(t)$$

Entonces, definiendo

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

se tiene que g satisface que

Condición de frontera

$$g \in C^1([0,\tau]), \quad (g - \lambda g')(t) = \hat{u}(t) \quad \text{con} \quad g(0) = 0$$

en efecto, notemos que

$$\hat{u}(t) = (g - \lambda g')(t) \iff \int_0^x f(t)\,dt - \lambda f(t) = \hat{u}(t)$$

$$\iff (T - \lambda Id) f(t) = \hat{u}(t)$$

Por lo tanto, tenemos la ecuación diferencial

$$g - \lambda g' = \hat{u}(t) \quad \text{con} \quad g(0) = 0$$

Resolviendo la EDO, se tiene que

$$g(t) - \lambda g'(t) = f(t) \iff g'(t) - \frac{1}{\lambda} g(t) = \frac{\hat{u}(t)}{\lambda}$$

Luego, el factor de integración es

$$\mu(t) = \exp\left(\int -\frac{1}{\lambda}\, dt\right) = e^{-\frac{t}{\lambda}}$$

Multiplicando el factor,

$$e^{-\frac{t}{\lambda}} g'(t) - \frac{e^{-\frac{t}{\lambda}}}{\lambda} g(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} \frac{\hat{\mu}(t)}{\lambda}$$

$$\Longleftrightarrow \int \frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t}{\lambda}} g(t)\right) dt = \int e^{-\frac{t}{\lambda}} \frac{\hat{\mu}(t)}{\lambda}\, dt$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-\frac{t}{\lambda}} g(t) = \int_0 e^{-\frac{t}{\lambda}} \frac{\hat{\mu}(t)}{\lambda}\, dt + C$$

Martes, 15 de agosto de 2023

Definición 6.8. Sean $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Decimos que $\mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$ si $(\mathcal{B}, \oplus_{\mathcal{A}}, \odot_{\mathcal{A}})$ es un álgebra de Banach.

Ejemplo: Si $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, entonces $\mathcal{B} = \mathcal{K}(E)$, entonces $\mathcal{B}$ es una subálgebra de Banach de $\mathcal{A}$, sin unidad.

Proposición 6.9 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach sin unidad $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ entonces existe $\mathcal{A}^{\#}$ un álgebra de Banach con unidad tal que

Ver [7] Pág 169

- $\mathcal{A}$ es prolongado isométricamente a $\mathcal{A}^{\#}$, i.e.

$$i: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^{\#}$$

isometría tal que $i(\mathcal{A})$ es una subálgebra de $\mathcal{A}^{\#}$ de codimensión 1

Demostración

Tomemos $A^{\#}: A \times \mathbb{C}$, entonces para $(a,\lambda), (b,\beta) \in A \times \mathbb{C}$

- $(a,\lambda) + (b,\beta) = (a+b, \lambda+\beta)$
- $\alpha(a,\lambda) = (\alpha a, \alpha\lambda)$
- $(a,\lambda) \odot_{A^{\#}} (b,\beta) = (\lambda b + \beta a + a \odot_A b, \lambda\beta)$

Demostrar que $\odot_{A^{\#}}$ verifica las propiedades algebráicas

- $A^{\#}$ es unitaria $\qquad \|(a,\lambda)\|_{A^{\#}} = \|a\|_A + |\lambda|$
- $\|(a,\lambda) \odot (b,\beta)\| \leq \|(a,\lambda)\|_{A^{\#}} \|(b,\beta)\|_{A^{\#}}$

$$e = (0,1)$$

$$(a,\lambda) \odot e = (a,\lambda) \odot (0,1) = (a,\lambda)$$

Siguiendo esta operación

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|(a,\lambda) \odot (b,\beta)\|_A &= \|(\lambda b + \beta a + a \odot b, \lambda\beta)\| \\
&= \|\lambda b + \beta a + a \odot b\| + |\lambda\beta| \\
&\leq |\lambda| \|b\| + |\beta| \|a\| + \|a\|\|b\| + |\lambda||\beta| \\
&\leq \|b\|(\|a\| + |\lambda|) + |\beta|(\|a\| + |\lambda|) = (\|b\| + |\beta|)(\|a\| + |\lambda|)
\end{aligned}$$

Mostremos que A se prolonga isométricamente $A^{\#}$

$$i : A \longrightarrow A^{\#} \qquad \|(a,0)\|_{A^{\#}} = \|a\|_{A}$$
$$a \longmapsto (a,0)$$

De esta manera

$$i(A) = \{(a,0) : a \in A\} \quad \text{es una subálgebra de } A^{\#}$$

Mostremos que

$$i(A) \text{ es de codimensión } 1$$

$F = \{(0,\lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ y como

$$A^{\#} = F \oplus i(A)$$

Observación: Si A es un álgebra de Banach con unidad, entonces $\|e\| \geq 1$.

$$\|e\| = \|e \odot e\| \leq \|e\|\,\|e\| \Rightarrow 1 \leq \|e\|$$

Proposición 6.10. *Sea $(A, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach con unidad. Entonces existe una norma $\|\cdot\|_{\circ}$ definida en A equivalente a la norma $\|\cdot\|_{A}$ tal que $\|e\|_{\circ} = 1$.*

Consideremos $\|\cdot\|_{\circ} = \|\cdot\|/\|e\|$, entonces $\|\cdot\|_{\circ}$ es una norma y además

$$\|\cdot\|_{\circ} = \frac{\|\cdot\|}{\|e\|} \leq \|\cdot\| \quad \text{pues } \|e\|$$

La norma sugerida no preserva la estructura algebráica.

Consideremos, dado $x \in A$

$$L_x : A \longrightarrow A \qquad L_x \text{ es lineal y acotado.}$$
$$y \longmapsto L_x(y) = x \odot y \qquad \|L_x\| \leq \|x\|$$

Con esto, definamos

$$\varphi : A \rightarrow \mathcal{L}(A) \qquad \boxed{\|L_x\|_{\mathcal{L}(A)} = \|x\|_{\circ}}$$
$$x \mapsto \varphi(x) = L_x \qquad \text{Lineal, acotado y biyectivo}$$

Por lo tanto, como

$$\|L_x\| = \sup_{y \in B_A} \left(\|(L_x)y\| \right) = \sup_{y \in B_A} \|xy\| \geq \left\| x \frac{e}{\|e\|} \right\| \geq \frac{1}{\|e\|} \|x\|$$

Así las normas son equivalentes.

$$\|x \cdot y\| = \|L_{xy}\|_{\mathcal{L}(A)} = \|L_x \circ L_y\|$$
$$\leq \|L_x\|\,\|L_y\| = \|x\|_{\circ}\,\|y\|_{\circ}$$

Finalmente,

$$\|e\|_{\circ} = \|L_e\|_{\mathcal{L}(A)} = \sup_{x \in B_A} \|x\| = 1$$

Observación: Se puede asumir, considerando la proposición anterior, que $\|e\| = 1$.

Proposición 6.11 Sea $(A, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach con unidad

a) Si $\|x\|_d < 1$, entonces $e - x \in \mathrm{Inv}(A)$

b) $\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leq \dfrac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$

c) $(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x \odot x \odot x \odot \cdots$

Demostración: Similar a lo hecho anteriormente

Proposición 6.12. Definamos

$$\varphi : \mathrm{Inv}(A) \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = x^{-1}$$

con A un álgebra de Banach con unidad. Entonces φ es un difeomorfismo C^{∞} y su diferencial en el punto $x \in \mathrm{Inv}(A)$ es

$$D\varphi(x)(h) = -x^{-1} h x^{-1}$$

Miércoles, 16 de agosto de 2023

Ejercicio. Consideremos

$$T : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$$
$$f \longmapsto Tf(x) = \int_0^1 K(x,y) \cdot f(y)\, dy$$

donde

$$K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto K(x,y) = \min(x,y)$$

a) Muestre que T es autoadjunto

b) $\forall f \in L^2([0,1])$ $\quad Tf \in C^0([0,1])$

c) Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Justificar que λ es un valor propio de T y $\lambda \in \mathbb{R}$
Muestre que si $f_\lambda \in L^2([0,1])$ es un valor propio asociado a λ

$$T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$$

entonces

Espectro

$$f_\lambda \in C^2([0,1])$$

y además, verifica que

$$f''_\lambda(x) + \frac{1}{\lambda} f(x) = 0$$

$$f(0) = f'(1) = 0$$

d) Muestre que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^4 (2k+1)^4} = \|K\|_{L^2([0,1]\times[0,1])}$$

literal a)

Probemos que el operador es autoadjunto

Notemos que

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 Tf(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f(y)K(x,y)\,dy\,\overline{g(x)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f(y)K(x,y)\,\overline{g(x)}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 f(y) \int_0^1 \overline{g(x)}\,K(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 f(y)\,\overline{Tg(y)}\,dy$$

$$= \langle f, Tg\rangle$$

literal c)

Probemos que T es compacto, para ello, como

$$T(B_{L^2}) \subseteq C([0,1],\mathbb{C})$$

entonces podemos usar Árcela-Ascoli. Por lo hecho en [A], se tiene la acotación del conjunto. Luego

$$|Tf(x) - Tf(\hat{x})| = \left| \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy - \int_0^1 K(\hat{x},y)f(y)\,dy \right|$$

$$= \left| \int_0^1 f(y)\,|K(x,y) - K(\hat{x},y)|\,dy \right|$$

$$\leq \|f\|_{L^2}\, \|K(x,y) - K(\hat{x},y)\|$$

$$\leq \cancel{\|f\|_{L^2}}\, |x-\hat{x}| = |x-\hat{x}|$$

Ahora, si λ es un valor propio, entonces

$$T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda \in C([0,1])$$

por lo tanto, $f_\lambda \in C([0,1])$; luego $T(f_\lambda) \in C^1([0,1])$. Recursivamente, se puede probar que es C^∞

Ahora, como

$$T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda \Rightarrow \lambda f_\lambda(x) = \int_0^x f_\lambda(y)K(x,y)\,dy + \int_x^1 f_\lambda(y)K(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^x y f_\lambda(y)\,dy + \int_x^1 x f_\lambda(y)\,dy$$

$$= \int_0^x y f_\lambda(y)\,dy + x\int_x^1 f_\lambda(y)\,dy$$

$$-x\int_1^x f_\lambda(y)\,dy$$

e) Deducir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Demostración

literal b)

Claramente el operador T es lineal y acotado. Además, como

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Ahora, notemos que

$$\int_0^1 |Tf(x)|^2\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,y)\,f(y)\,dy\right)^2 dx$$

$$\leq \int_0^1 \left(\|f\|_{L^2}\,\|K(x,\cdot)\|_{L^2}\right)^2 dx \quad \leftarrow \text{Hacemos Cauchy respecto a } y$$

$$= \|f\|_{L^2}^2\,\|K\|^2_{L^2([0,1]\times[0,1])} \qquad [A]$$

Por otro lado

$$Tf(x) = \int_0^1 f(y)\left(\frac{x+y-|x-y|}{2}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_0^1 f(y)\,x\,dy}_{\text{continua respecto a } x} + \underbrace{\int_0^1 f(y)\,y\,dy}_{\text{constante respecto a } x} - \int_0^1 f(y)|x-y|\,dy\right)$$

$$= -\int_0^x f(y)(x-y)\,dy - \int_x^1 f(y)(y-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(y)\,x\,dy + \cancel{\int_0^1 f(y)\,y\,dy} - \int_0^x f(y)\,x + \cancel{\int_0^x f(y)\,y\,dy} - \int_x^1 f(y)\,y\,dy + \int_x^1 f(y)\,x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_x^1 f(y)\,x\,dy + \cancel{\int_x^1 f(y)\,y\,dy} - \cancel{\int_x^1 f(y)\,y\,dy} + \int_x^1 f(y)\,x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\int_x^1 f(y)\,x\,dy\right)$$

$$= \\ \vdots$$

$$= x\int_x^1 f(y)\,dy + \int_0^x y\,f(y)\,dy$$

Si la función es medible, entonces la integral definida a partir de esta función es continua

De donde

$$\lambda f_\lambda'(x) = x f_\lambda(x) - \int_1^x f_\lambda(y)\,dy - x f_\lambda(x)$$

$$= -\int_1^x f_\lambda(y)\,dy$$

$$\Rightarrow \lambda f''_\lambda(x) = -f_\lambda(x) \qquad \Rightarrow \qquad f''_\lambda(x) + \frac{1}{\lambda} f_\lambda(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad f''_\lambda + \frac{1}{\lambda} f_\lambda = 0.$$

Con las condiciones iniciales

$$f_\lambda(0) = 0\int_0^1 f_\lambda(y)\,dy + \int_0^0 y f_\lambda(y)\,dy = 0$$

$$f_\lambda'(1) = -\int_1^1 f_\lambda(y)\,dy = 0$$

Así, se satisfacen las condiciones de la EDO.

Si $\lambda > 0$

$$f_\lambda(x) = a\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right) + b\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right)$$

Aplicando las condiciones iniciales.

$$f_\lambda(0) = a\cos(0) + b\,\mathrm{sen}(0) \quad \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow f_\lambda(x) = b\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right)$$

$$f_\lambda'(x) = b\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$f_\lambda'(1) = b\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0 \quad \Rightarrow \quad b\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$ El b no puede anularse

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \frac{2}{\pi + 2k\pi} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{(\pi + 2\pi k)^2} = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}$$

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2$$

$$(x+h)^{-1} = x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} + \sum_{k=2}^{+\infty}(x^{-1}h)^k x^{-1}$$

Martes, 22 de agosto de 2023.

Demostración (Proposición 6.12)

Puesto que $D\varphi(x)(h) = -x\cdot h x^{-1}$, resta probar que

$$\|-(x+h)^{-1} + x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq \|\cancel{-x^{-1}} - \cancel{x^{-1}h}x^{-1} - \textstyle\sum_{k=2}^{+\infty}(x^{-1}h)^k x^{-1} \cancel{+x^{-1}} - \cancel{x^{-1}h}x^{-1}\|$$

$$\leq \left(\sum_{k=2}^{+\infty}\|x^{-1}h\|^k\right)\|x^{-1}\|$$

De esta manera,

Así

$$\|x^{-1}\| \sum_{k=2}^{+\infty} \|x^{-1}h\|^k \leq \frac{\|x^{-1}\| \; \|x^{-1}h\|^2}{1-\|x^{-1}h\|} \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$$

↑
Desarrollando la igualdad
de la serie geométrica

Por lo tanto, φ es diferenciable en x.

• Ahora, mostremos que

$$\Psi \quad L : \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$$
$$x \mapsto L_x$$

es continua.

En efecto, si definimos

$$\theta_h : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A} \qquad \text{y} \quad \theta_h \in C^\infty$$
$$(a,b) \mapsto -ahb$$

Luego

$$\Psi_x(h) = \theta(\varphi(x), \varphi(x), h) = x^{-1}hx^{-1} = L_x(h)$$

entonces Ψ es continua al ser composición de funciones continuas. Finalmente, por recursividad φ es C^∞.

Definición 6.13 Sea $(\mathcal{A}, \odot, \oplus)$ un álgebra de Banach con unidad. Dado $a \in \mathcal{A}$ definimos el espectro de a como

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \mathbb{1} \text{ es invertible}\}$$

Propiedades del espectro:

- $\sigma(a) \neq \emptyset$
- $\sigma(a)$ es compacto
- $R(\lambda, a) = (a - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ (operador resolvente)
- Si $|\lambda| > \|a\| \Rightarrow \lambda \notin \sigma(a)$
- $R(a) = \sigma(a)^c$ (Resolvente)
- $R(\lambda_1, a) - R(\lambda_2, a) = (\lambda_1 - \lambda_2) R(\lambda_1, a) R(\lambda_2, a)$
- $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$ con $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$

Observaciones: Notemos que, se tiene que

$$\rho(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(a)$$

Proposición 6.14 (Gelfand - Mazur) Sea $(\mathcal{A}, \oplus, \oplus)$ un álgebra de Banach con unidad tal que todo elemento salvo $0_{\mathcal{A}}$ es invertible. Entonces $\mathcal{A} \approx \mathbb{C}$

Demostración:

Sea $x \in \mathcal{A}$, mostremos que $x = \lambda \cdot e_{\mathcal{A}}$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Por lo anterior, $\sigma(x) \neq \emptyset$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$(x - \lambda e) \quad \text{no es invertible}$$

Por hipótesis, el único elemento no invertible es $0_{\mathcal{A}}$. Así, se tiene que

$$x - \lambda \cdot e_A = 0 \Rightarrow x = \lambda \cdot e_A$$

Además, aquí podemos definir

$$\emptyset : A \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

$$x = \lambda \cdot e \longmapsto \lambda \qquad \Rightarrow \emptyset^{-1}(\lambda) = e \odot \lambda$$

Definición 6.15 Sea $(A, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach con unidad, entonces definamos

$$\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$$

Decimos que φ es un caracter de A si

- φ es lineal (no necesariamente continua)
- $\forall x, y \in A \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

A los carácteres de A se los nota como $Car(A)$

Proposición 6.16 Si $\varphi \in Car(A)$, entonces

- φ es continuo y $\|\varphi\| \leq 1$
- $\varphi(e) = 1$
- Si $x \in Inv(A)$, $\varphi(x) \neq 0$.

Demostración

Existe $x \in A$ con $x \neq 0$ tal que $\varphi(x) \neq 0$, entonces

$$\varphi(x \cdot e) = \varphi(x) \cdot \varphi(e) = \varphi(x) \Rightarrow \varphi(e) = 1$$

Por otro lado, como $x \in Inv(A)$, mostremos que $\varphi(x) \neq 0$ Por absurdo

$$1 = \varphi(e) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$$

P.D. $\forall x \in A \qquad |\varphi(x)| \leq \|x\|$

Tomemos $\lambda_x = \varphi(x) > \|x\|$, $\lambda_x \in \sigma(x)$

$$x - \lambda_x e \quad \text{es invertible}$$

Luego,

$$\varphi(x - \lambda_x e) \neq 0 \Rightarrow \varphi(x) \neq \lambda_x \Rightarrow \Leftarrow$$

Aplicando el tercer literal de la [Proposición 6.19]

Observación: Sea $(A, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach con unidad. Y supongamos $(B, \oplus, \odot)$ una subálgebra con unidad.

Entonces para $x \in B$

$$\sigma_A(x) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda e) \text{ es no invertible en } A \}$$

$$\sigma_B(x) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda e) \text{ es no invertible en } B \}$$

Con esto, $\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$.

Sin embargo, por el teorema del radio espectral

$$\rho_A(x) = \rho_B(x)$$

Por otra parte, si notamos

$$Car(A) \subseteq A' \qquad Car(A) \subseteq \overline{B}_{A'}$$

Además

$$\varphi, \psi \in Car(A) \not\Rightarrow \varphi + \psi \in Car(A)$$

Miécoles, 23 de agosto de 2023.

Definición 6.17 Sea $(A, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach y $J \subseteq A$. Decimos que J es un ideal por izquierda (respectivamente derecha) si

- J es un subespacio vectorial de A
- $\forall x \in A,\ \forall y \in J$ $\quad y \odot x \in J$ (ideal por izquierda)

  $x \odot y \in J$ (ideal por derecha)

› Diremos que J es un ideal si es a la vez un ideal por derecha y por la izquierda.

› Diremos que A es conmutativa si J es un ideal por izquierda si y solo si J es un ideal por derecha

› Diremos que J es un ideal para la izquierda (derecha) propio si J es ideal por izquierda (derecha) tal que $J \subsetneq A$

Observación: Si $J \subseteq A$ es un ideal tal que $e \in J$, entonces $J = A$

Si $J \subset A$ es un ideal propio, entonces $e \notin J$

Ejemplos: Si $A = \mathcal{L}(E)$, con E un espacio de Banach, entonces $J = K(E)$ es un ideal.

Bajo este mismo ejemplo $R(E)$ es otro ideal de A.

Note que son ideales propios pues la identidad no puede estar en ellos. En efecto, si lo estuviera, entonces alguno de los operadores compactos sería invertible y más aún $K(E) = \mathcal{L}(E)$ lo cual no es posible.

Proposición 6.18. Sean A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $J \subseteq A$ un ideal propio tenemos lo siguiente

a) $\overline{J}$ es un ideal de A

b) $\overline{J}$ es un ideal propio de A

c) J y $\overline{J}$ no contienen ningún elemento de $Inv(A)$

Demostración

a) Se sigue por la continuidad del producto

b) Por contradicción, $\overline{J} = A$, entonces $e \in \overline{J}$, luego existe $(e_n)_n$ tal que $e_n \to e$

Más aún

$$B(e, 1/2) \cap J \neq \emptyset$$

Así, existe $x_0 \in B(e, 1/2)$ y $x_0 \in \mathcal{J}$, por lo tanto

$$x_0 = e + \underbrace{x_0 - e}_{\|x_0 - e\| < 1} \qquad x_0 \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$$

c) Por absurdo, supongamos que $\mathcal{J}$ posee al menos un elemento de $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, lu y $\mathcal{J} = \mathcal{A}$ pero esto no es posible.

Los resultados son válidos para ideales por izquierda y derecha. Por practicidad se usa la hipótesis de conmutatividad

Definición 6.19. Sea $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach conmutativa y con unidad. Diremos que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ es un ideal maximal si

- $\mathcal{J}$ es un ideal propio
- $\mathcal{J}$ es maximal con respecto a la inclusión*

* Si $\hat{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{A}$ es un ideal propio tal que $\mathcal{J} \subseteq \hat{\mathcal{J}}$, entonces $\mathcal{J} = \hat{\mathcal{J}}$

Proposición 6.20 Sea $(A, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad

a) Todo ideal propio de $\mathcal{A}$, está contenido en un ideal maximal

b) Todo ideal maximal es cerrado.

Demostración:

Sea $\mathcal{J}$ un ideal propio de A, definamos

$$P_{\mathcal{J}} = \{ K : K \text{ es un ideal propio tal que } \mathcal{J} \subseteq K \}$$

entonces $P_{\mathcal{J}} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{J} \in P_{\mathcal{J}}$, entonces $(P_{\mathcal{J}}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado

Sea $Q \subseteq P_{\mathcal{J}}$ un conjunto totalmente ordenado. Entonces, Q admite una cota superior

$$M = \bigcup_{\tilde{Q} \subset Q} \tilde{Q} \in P$$

y además, es una cota superior de Q.

Mostremos que M es subespacio vectorial

Sean $x, y \in M$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $x \in Q_x$ y $y \in Q_y$, sin pérdida de generalidad $Q_x \subseteq Q_y$ y así

$$x + \lambda y \in Q_y \in \bigcup_{\tilde{Q} \subset Q} \tilde{Q} \Rightarrow x + \lambda y \in M$$

Análogamente, se muestra que Q es un ideal

Por otro lado, M es propio. En efecto, si no lo fuera, entonces $e \in Q_n$ para algún $Q_n \subset Q$, pero esto no es posible.

Sea $Q_0 \in Q$, por definición

$$Q \subseteq \bigcup_{\tilde{Q} \subset Q} \tilde{Q} \Rightarrow Q_0 \subseteq M \Rightarrow M \text{ es cota superior.}$$

Observación: Si $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ es un ideal maximal, entonces $\mathcal{J} = \hat{\mathcal{J}}$

Sección: Álgebras Cocientes

Si $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ es un s.e.v. cerrado propio, entonces $(A/\mathcal{J}, \|\cdot\|_{A/\mathcal{J}})$

donde $[x] = \{ y \in \mathcal{A} : x - y \in \mathcal{J} \}$

$$\|[x]\|_{\mathcal{A}/\mathcal{J}} = \inf_{y \in \mathcal{J}} \|x - y\|$$

$\mathcal{A}/\mathcal{J}$ es un espacio de Banach si y solo si $\mathcal{J}$ es cerrado.

$d(x, \mathcal{J}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{J} = \overline{\mathcal{J}}$

Si consideramos que $\mathcal{J}$ es un ideal, entonces se puede definir

$$[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$$

Pues no se altera por el representante; en efecto

$$x - \hat{x} \in \mathcal{J} \quad y \quad y - \hat{y} \in \mathcal{J} \Rightarrow \hat{y}(x - \hat{x}) \in \mathcal{J} \quad y \quad x(y - \hat{y}) \in \mathcal{J}$$

$$\Rightarrow \hat{y}x - \hat{x}\hat{y} + xy - x\hat{y} \in \mathcal{J}$$

$$\Rightarrow \hat{x}\hat{y} - xy \in \mathcal{J}$$

$$\Rightarrow [x \cdot y] = [x] \cdot [y]$$

Así, nos interesaría definir $(\mathcal{A}/\mathcal{J}, [\cdot], [+])$. Por el momento, $[\cdot]$ está bien definido. Queremos probar que

$$\|[a] \cdot [b]\|_{\mathcal{A}/\mathcal{J}} = \|[a \cdot b]\|_{\mathcal{A}/\mathcal{J}} \leq \|[a]\|_{\mathcal{A}/\mathcal{J}} \cdot \|[b]\|_{\mathcal{A}/\mathcal{J}}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $z_\varepsilon \in \mathcal{J}$ tal que

$$\|[x]\| = \inf_{a \in \mathcal{J}} \|x - a\| + \varepsilon \geq \|x - z_\varepsilon\|$$

$$\|[y]\| = \inf_{a \in \mathcal{J}} \|y - a\| + \varepsilon \geq \|x - \hat{z}_\varepsilon\|$$

$$(x - z_\varepsilon)(y - \hat{z}_\varepsilon) = xy - x\hat{z}_\varepsilon - z_\varepsilon y + z_\varepsilon \hat{z}_\varepsilon$$

$\|[xy]\| \leq \|xy$

Viernes, 25 de Agosto de 2023

Ejercicio 1. Sean E un espacio de Hilbert complejo y $K_0(E) = \{ T \in \mathcal{L}(E) : T \text{ rango finito} \}$

a) Muestre que $d(Id, K_0(E))$ es igual a 1 o 0.

b) $\|A^{-1}\|^{-1} \leq \operatorname{dist}(A, K_0(E)) \leq \|A\|$ $\quad A \in \mathcal{L}(E)$ y es invertible

c) $S : E \to E$ Hallar $\operatorname{dist}(S, K_0(E))$ con $S(e_n) = e_{n+1}$

d) Definamos $T : E \to E$ con $T(e_n) = \frac{1}{n} e_{n+1}$. Muestre que $\operatorname{dist}(T, K_0(E)) = 0$

Demostración

literal a) Si $\dim(E) < +\infty$, trivialmente $\operatorname{dist}(Id, K_0(E)) = 0$. Así, si $\dim(E) = +\infty$, entonces para $B \in K_0(E)$, $Img(B)$ es de dimensión finita y podemos definir

$$\hat{B} : E \to Img(B)$$
$$x \mapsto \hat{B}x = Bx$$

Por lo tanto, como $\dim(E) = +\infty$, entonces $\hat{B}$ no es inyectivo y así existe $x \in Ker(B)$ con $\|x\| = 1$ tal que

$$\|(Id - B)x\| = \|x\| = 1 \leq \|Id - B\|$$

luego

$$1 \leq \|Id - B\| \quad \forall B \in K_0(E) \Rightarrow 1 \leq \operatorname{dist}(Id, K_0(E))$$

P.D. J es un ideal de A

Sean $x \in J$ y $y \in A$ P.D. $x \cdot y \in J$. Se tiene que $[x] \in B$ y luego

$$[x]\cdot[y] = [xy] \in B \Rightarrow xy \in J$$

Por otro lado, en A/I, notando $[0] = I$, $I \in B$ (pues B es un espacio vectorial). Así para todo $y \in I$

$$[y] = I \in B \Rightarrow y \in J \qquad \text{Por lo tanto, } I \subseteq J$$

literal c)

Supongamos que J es propio. P.D. J/I es propio

Entonces como $e \notin J$ es propio así, $[e] \notin J/I$

$\Leftarrow$ J_I es propio. P.D. J es propio.

$[e] \notin J_I$ entonces $e \in J$. Si $e \in J$ $e + I \in J_I$

Corolario: Sea $M \subsetneq A$ un ideal cerrado, entonces M es maximal si y solo si A/M es un campo.

Definición: - Anillo con división - Sea R un anillo, se dice con división si $R \setminus \{0\}$ a un grupo con $\odot$

Definición Un campo es un anillo con división conmutativo.

Miércoles, 30 de agosto de 2023

Proposición 6.21 Sea A un álgebra de Banach conmutativa y con unidad y $J \subseteq A$ un ideal propio cerrado, entonces A/J es un cuerpo si y solo si J es un ideal maximal.

Demostración: Supongamos que A/J es un cuerpo. Mostremos que J es maximal, por absurdo supongamos que existe Q un ideal propio cerrado tal que
$\Rightarrow$ $J \subsetneq Q$. Entonces existe $x_0 \in Q$ y $x_0 \notin J$, tal que

$$[x_0] \in A/J$$

y $[x_0] \neq [0]$, luego, como A/J es un cuerpo (anillo con división), entonces existe $[y] \in A/J$ tal que

$$[y][x_0] = [x_0][y] = [e]$$

es decir, es el inverso de $[x_0]$, luego $[x_0][y] = [e]$, entonces

$$\underbrace{yx_0}_{\in Q} - e \in J \subseteq Q \Rightarrow yx_0 - e \in Q$$

Luego

$$-(yx_0) + (yx_0) - e = -e \in Q \Rightarrow e \in Q \quad \Rightarrow\Leftarrow \text{ (Pues } Q \text{ es un ideal propio)}$$

$\Leftarrow$ Supongamos que J es maximal, mostremos que A/J es un cuerpo.

Sea $[x] \in A/J$ con $[x] \neq 0$. P.D. $[x^{-1}] \in A/J$ $[x][x^{-1}] = [e]$

definamos $J_x = \{ y + rx : r \in A \text{ y } y \in J \}$ es un ideal cerrado tal que $J \subseteq J_x$ puesto que J es maximal, entonces $J_x = A$. En particular, como $e \in A$, entonces

Existen $\hat{r}$ y $\hat{y}$ tales que $e = \hat{y} + \hat{r}x$

luego $e - \hat{r}x = \hat{y} \in J$

Por lo tanto, $[e] = [rx] = [r][x] \Rightarrow [r] = [x^{-1}]$

Teorema 6.22. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa y con unidad. Se tiene lo siguiente:

a) J es un ideal maximal si y solo si existe $\varphi \in Car(\mathcal{A})$ tal que $Ker(\varphi) = J$

b) $x \in \mathcal{A}$ es invertible si y solo si $\forall \varphi \in Car(\mathcal{A})$ y $\varphi(x) \neq 0$

c) $x \in \mathcal{A}$ es invertible si y solo si $\forall J \in \mathcal{A}$ ideal maximal $x \notin J$

d) Sea $x \in \mathcal{A}$, entonces $\lambda \in \sigma(x)$ si y solo si existe $f_\lambda \in Car(\mathcal{A})$ tal que $\varphi_\lambda(x) = \lambda$.

Demostración

literal a)

$\Rightarrow$ Supongamos que J es un ideal maximal de $\mathcal{A}$ entonces por la [Proposición 6.21], además, por la [Proposición 6.14] tenemos que existe $\varphi \in \mathcal{L}(A/J, \mathbb{C})$ tal que φ es un isomorfismo y además preserva la estructura de álgebra de Banach, i.e.

$$\varphi([a][b]) = \varphi([a \cdot b]) = \varphi([a]) \cdot \varphi([b]) \quad \text{y} \quad \varphi([e]) = 1$$

Entonces, tenemos lo siguiente

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \\ A/J \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \tilde{\varphi}(x) = \varphi([x]) \qquad \text{P.D. } \hat{\varphi} \in Car(A)$$

Notemos que $\hat{\varphi}$ es lineal por ser la composición de operadores lineales, Además, como

$$\hat{\varphi}(a \cdot b) = \varphi([a] \cdot [b]) = \varphi([a])\varphi([b]) = \hat{\varphi}(a) \cdot \hat{\varphi}(b)$$

Finalmente

$Ker(\hat{\varphi}) = J$ pues $\hat{\varphi}(x) = \varphi([x]) = 0 \Rightarrow [x] = 0 \Leftrightarrow x \in J$.

$\Leftarrow$ Sea $\varphi \in Car(A)$. P.D. $Ker(\varphi)$ es un ideal propio maximal

Luego, como $Ker(\varphi)$ es un s.e.v. cerrado propio. P.D. $Ker(\varphi)$ es un ideal maximal

Sea $x \in \mathcal{A}$ y $y \in Ker(\varphi)$. P.D. $xy \in Ker(\varphi)$, entonces

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = 0 \qquad \therefore Ker(\varphi) \text{ es un ideal}$$

P.D. $Ker(\varphi)$ es maximal. (Supongamos que no es maximal)

Consideremos Q un ideal propio de $\mathcal{A}$ tal que $Ker(\varphi) \subsetneq Q$, entonces si $x_0 \in Q$ y $x_0 \notin Ker(\varphi)$, además para todo $x \notin Ker(\varphi)$

$$\varphi(x \cdot x_0) = \varphi(x) \cdot \varphi(x_0) \neq 0 \quad \vdots \quad x_0 \text{ no es invertible pues } Q \text{ es propio.}$$

(Pendiente revisar)

literal b)

$\Rightarrow$ Ya realizada

$\Leftarrow$ Supongamos que para todo $\varphi \in Car(A)$, $\varphi(x) \neq 0$. P.D. x es invertible, i.e $0 \notin inv(x)$. Por absurdo, supongamos que $0 \in \sigma(x)$

Por otro lado, definamos

$$I_x = \{ z : x \cdot a : a \in A \} \qquad I_x \text{ es un ideal cerrado}$$

- Si $e \in I_x$ entonces $I_x = \mathcal{A}$, luego
$$e = x \cdot a = a \cdot x \qquad \text{Por lo tanto, } x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$$
- Si $e \notin I_x$, entonces I_x es un ideal propio.

Por lo tanto, existe J un ideal maximal tal que $I_x \subseteq J$. Por el literal anterior, existe $\varphi_J \in \mathrm{Car}(\mathcal{A})$ tal que $\ker(\varphi_J) = J$
$$\Rightarrow \varphi_J(x) = 0 \quad \Rightarrow \Leftarrow \quad (\text{Contradice la hipótesis})$$

Continuando la demostración del literal a)

$A/\ker(\varphi)$ es de dimensión 1 ya que $\ker(\varphi)$ es un hiperplano, entonces $\mathbb{C} \simeq A/\ker(\varphi)$

Por lo tanto, $A/\ker(\varphi)$ es un cuerpo y $\ker(\varphi)$ es un ideal maximal.

literal d)

Sea $\lambda \in \sigma(x)$ si y solo si existe $f_\lambda \in \mathrm{Car}(\mathcal{A})$ tal que $\varphi_\lambda(x) = \lambda$

Jueves, 31 de agosto de 2023

Proposición 6.23. Cualquier álgebra de Banach conmutativa con unidad admite un caracter no nulo.

Demostración

Si $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ es un álgebra de Banach conmutativa tal que todos sus elementos son invertibles salvo el cero, entonces $\mathcal{A} \simeq \mathbb{C}$ y este es isomorfo a un caracter

Ahora, supongamos que existe $x \in \mathcal{A}$ no invertible en $\mathcal{A}$, entonces
$$x\mathcal{A} = \{x \cdot a : a \in \mathcal{A}\}$$
es un ideal propio cerrado de $\mathcal{A}$. Entonces por la [Proposición 6.20] tenemos que existe J un ideal maximal tal que
$$x\mathcal{A} \subseteq J.$$
Por la [Proposición 6.22] existe $\varphi \neq 0$ tal que $\ker(\varphi) = J$

Observación: Si $\mathcal{A}$ es no conmutativa, tenemos que $\mathrm{Car}(\mathcal{A}) = \emptyset$

Ejemplo: $A = M_n(\mathbb{C})$ es un álgebra no conmutativa con unidad tal que $\mathrm{Car}(A) = \emptyset$

Consideremos
$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \uparrow & & \ddots & \vdots \\ 0 & j & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
Entonces, si $i \neq j$, $e_{ij}^2 = 0$ y si $i = j$ $e_{ij}^2 = e_{ij}$

Además, se tiene que para $i \neq j$
$$\varphi(0) = \varphi(e_{ij} \cdot e_{ij}) = \varphi(e_{ij}) \cdot \varphi(e_{ij}) = 0 \iff \varphi(e_{ij}) = 0$$
Notemos que, para $i \neq j$, entonces $e_{ii} = e_{ij} \cdot e_{ji}$, así
$$\varphi(Id) = \varphi(e_{11} + \cdots + e_{nn}) = \varphi(e_{11}) + \cdots + \varphi(e_{nn}) = 0, \quad \text{ya que}$$
$$\varphi(e_{ii}) = \varphi(e_{ij} \cdot e_{ji}) = 0$$

Definición 6.24 Sea $(A, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach conmutativa y con unidad. Definimos el conjunto radical de A, notado $\mathrm{rad}(A)$ como

$$\mathrm{rad}(A) = \bigcap_{\substack{J \subseteq A \\ J \text{ un ideal maximal de } A}} J$$

Definición 6.25 Sea $(A, \oplus, \odot)$ un álgebra de Banach conmutativa y con un unidad. Diremos que A es semi-simple $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$

Sección: Teoría de Gelfand

Observación: Note que

$$\mathrm{Car}(A) \subseteq A' \qquad \mathrm{Car}(A) \subseteq \overline{B}_{A'} \qquad \mathrm{Car}(A) \subseteq C_b(A)$$

Proposición 6.26. Se tiene que $(\mathrm{Car}(A), \sigma(A', A))$ es un espacio topológico compacto y $\mathrm{Car}(A)$ es cerrado $(C_b(A), \|\cdot\|_\infty)$

Demostración:

Primero mostremos que $(\mathrm{Car}(A), \sigma(A', A))$ es compacto. Utilizando el T-B-A tenemos que $(B_{A'}, \sigma(A', A))$ es compacta y como $\mathrm{Car}(A) \subseteq B_{A'}$, unicamente tenemos que mostrar que

$$\mathrm{Car}(A) \text{ es cerrado en } \sigma(A', A).$$

P.D. $(\mathrm{Car}(A))^c$ es abierto en $\sigma(A', A)$

Si $\varphi = 0$, entonces

$$\mathcal{V}_0^{1/2} = \{ g \in A' : |g(e)| < \tfrac{1}{2} \} \in \mathcal{V}(0) \quad \text{en } \sigma(A', A)$$

Además, $\mathcal{V}_0^{\frac{1}{2}} \subset (\mathrm{Car}(A))^c$, en efecto, si $g \in \mathcal{V}_0^{\frac{1}{2}}$ $|g(e)| \neq 1$, lo cual muestra que g no es un caracter. Así, $\varphi \in (\mathrm{Car}(A))^c$ y $\varphi \neq 0$.
[Ver Proposición 6.16]

Si φ no es un caracter, entonces existen $a, b \in A$ tales que

$$\varphi(a \cdot b) \neq \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

Como seguimos en A' lo único que no puede satisfacer φ es esta propiedad [Proposición 6.15]

tomando, $z_1 = a$, $z_2 = b$ y $z_3 = ab$ y $z_4 = e$, tomando

$$\mathcal{V}_\varphi^\varepsilon = \{ g \in A' : \forall i \in \{1, \dots, 4\} \ |\langle f - g, z_i \rangle| < \varepsilon \}$$

Entonces, para un éplison suficientemente pequeño

$$\mathcal{V}_\varphi^\varepsilon \subset (\mathrm{Car}(A))^c$$

$|(\varphi - g)(a)| < \varepsilon \qquad |(\varphi - g)(b)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |(\varphi - g)(a)(\varphi - g)(b)| < \varepsilon.$

$$\Rightarrow |(\varphi(a) - g(a))(\varphi(b) - g(b))| < \varepsilon$$

Otra idea

$$\Rightarrow |\varphi(a)\varphi(b) - \varphi(a)g(b) - g(a)\varphi(b) + g(a)g(b)| < \varepsilon$$

$$|g(a)g(b) - g(ab)| > \varepsilon$$

Si $\varphi \in \overline{\mathrm{Car}(A)}^{\sigma(A', A)}$, entonces $\varphi \in \mathrm{Car}(A)$, entonces

$$g \in \mathcal{V}_\varphi^\varepsilon \cap \mathrm{Car}(A) \neq \emptyset$$

luego

entonces

$$|\varphi(ab)-\varphi(a)\varphi(b)| = |\varphi(ab)-g(ab)+g(a)g(b)-\varphi(a)g(b)+g(b)\varphi(a)-\varphi(a)\varphi(b)|$$
$$\leq |\varphi(ab)-g(ab)| + |g(a)||g(a)-\varphi(a)| + |\varphi(a)||g(b)-\varphi(b)|$$
$$< \varepsilon + \|b\|_A \varepsilon + \|a\|_A \varepsilon = \varepsilon(1+\|a\|_A+\|b\|_A) \qquad \forall \varepsilon>0$$

Por lo tanto, $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$. Más aún, $(Car(A), \sigma(A', A))$ es compacto.

- Ahora, mostremos que $Car(A)$ es cerrado en $(Cb(A), \|\cdot\|_\infty)$

Si consideramos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Car(A)$ y $\varphi\in Cb(A)$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \varphi$, entonces φ es lineal (por Banach-Steinhouse) y continua. De esta manera, la convergencia uniforme implica la convergencia puntual y más aún

$$\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi,$$

i.e. $\varphi \in \overline{Car(A)}^{\sigma(Cb(A),\|\cdot\|_\infty)} = Car(A)$

Notación: Al conjunto $(Car(A), \sigma(A', A))$ se lo conoce como el espectro de A, conjunto maximal de A, con la topología de Gelfand y lo notaremos Δ

Definición 6.27 - Transformada de Gelfand -
Sea $(A,\oplus,\odot)$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $x\in A$ definimos la trasformada de Gelfand de x como

$$\hat{x}: \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto \hat{x}(\varphi)=\varphi(x)$$

Proposición 6.28 Sean $(A,\oplus,\odot)$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad, $x\in A$

$\hat{x}\in(Car(\Delta), \|\cdot\|_\infty)$, $Img(\hat{x})=\sigma_A(x)$ y $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\| \quad \forall x\in A$

Demostración

- Notemos que $\hat{x}$ es lineal

$$\hat{x}(\varphi+\lambda g) = \hat{x}(\varphi)+\lambda\hat{x}(g) = \varphi(x)+\lambda g(x)$$

y además

$$|\hat{x}(\varphi-g)| = |(\varphi-g)(x)| \leq \|x\|_A \|\varphi-g\|_{A'}$$

- Por otro lado, como

$$Img(\hat{x}) = \} \lambda\in\mathbb{C} : \exists \varphi\in\Delta \text{ tal que } \varphi(x)=\hat{x}(\varphi)=\lambda \ \{$$
$$\Leftrightarrow \varphi(x)-\lambda=0$$
$$\Leftrightarrow \varphi(x-\lambda e)=0 \qquad \Leftrightarrow \lambda\in\sigma(x)$$

Por lo tanto, por la [Proposición 6.29] $x-\lambda e$ no es invertible

Proposición 6.29 - Transformación de Gelfand -
Sea $(A,\oplus,\odot)$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad
Entonces

1) Definimos $\hat{\ }: A\longrightarrow C(\Delta)$, $x\mapsto\hat{x}$ es un homomorfismo de álgebras (Transformación de Gelfand)

2) $\hat{A}$ es una subálgebra (no necesariamente cerrada) de $C(\Delta)$

3) Si definimos $\hat{}: A \longrightarrow \hat{A} = \mathrm{Img}(A)$ es un isomorfismo si y solo si A es semi-simple ($\mathrm{rad}(A) = \{0\}$)

Observación: Se puede mostrar que un homomorfismo entre dos álgebras de Banach siempre es continuo.

Demostración

literal a) Es claro que $\hat{}$ es un homomorfismo

Observación: $\mathrm{Ker}(\hat{}) = \mathrm{rad}(A)$

Viernes, 1 de septiembre de 2023

Ejercicio 1. Sea A un álgebra de Banach, $(a_n)_n \subseteq A$ y $a \in A$ tal que $a_n \to a$

a) Sea $(\lambda_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_n \to \lambda$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n \in \sigma(a_n)$
P.D. $\lambda \in \sigma(a)$

b) Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ a_n es invertible y a no invertible, entonces $\|a_n^{-1}\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Ahora, supongamos que existe $M > 0$ tal que

$$\|x\| \cdot \|y\| \leq M \|xy\|$$

c) Muestre que $\partial(\mathrm{Img}(A)) = \{0\}$

d) Muestre que $A \approx \mathbb{C}$.

Demostración

literal a)

Por absurdo, supongamos que $\lambda \notin \sigma(a)$, entonces $a - \lambda e$ es invertible, así existe $r > 0$ tal que

$$B(a - \lambda e, r) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$$

Como $a_n \to a$ y $\lambda_n \to \lambda$, entonces $a_n - \lambda_n e$ converge a $a - \lambda e$

De esta manera, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_n - \lambda_n e - (a - \lambda e)\| < r \quad \forall n \geq k_0$$

$$\Rightarrow a_n - \lambda_n e \in B(a - \lambda e, r) \quad \forall n \geq k_0$$

$$\Rightarrow a_n - \lambda_n e \text{ es invertible} \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

literal b)

Por absurdo, supongamos que $(\|a_n^{-1}\|)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Sea $m = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n^{-1}\|$

$$\begin{aligned}
\|e - a a_n^{-1}\| &= \|a_n a_n^{-1} - a a_n^{-1}\| \\
&= \|(a_n - a) a_n^{-1}\| \\
&= \|a_n - a\| \|a_n^{-1}\| \\
&\leq \|a_n - a\| m \\
&< 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow e - (e - a a_n^{-1})$ es invertible

$\Rightarrow a a_n^{-1}$ es invertible

$\Rightarrow a$ es invertible

literal c)

Notemos que

$$\partial(\mathrm{Inv}(A)) = \overline{\mathrm{Inv}(A)} \cap \overline{\mathrm{Inv}(A)^c}$$

Sea $x \in \partial(\mathrm{Inv}(A))$, entonces $x \in \overline{\mathrm{Inv}(A)}$ y $x \in \mathrm{Inv}(A)^c$ (Note que $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto)

Así, existe $(x_n)_n$ tal que $x_n \to x$ y $(x_n)_n \subseteq \mathrm{Inv}(A)$

Por lo tanto,

$$\|x_n\| \|x_n^{-1}\| \leq M \|x_n x_n^{-1}\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|x_n\| \|x_n^{-1}\| \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

literal d)

P.D. $A = \mathbb{C}e$

Sea $x \in A$, tomamos $\lambda \in \partial(\sigma(x))$, i.e

$$\lambda \in \sigma(x) \cap \overline{\sigma(x)^c} \Rightarrow \lambda \in \sigma(x) \Rightarrow x - \lambda e \text{ no es invertible}$$

Luego, como $\lambda \in \overline{\sigma(x)^c}$, entonces existe $(\lambda_n)_n \subseteq \sigma(x)^c$ tal que

$$\lambda_n \to \lambda$$

Problema 2. Definamos A un álgebra de Banach tal que tiene la siguiente propiedad

$$\forall a \in A \quad Aa = \{0\} \Rightarrow a = 0$$

Diremos que $T: A \to A$ es un multiplicador si $\forall x, y \in A \quad x(Ty) = (Tx)y \in A$ [*]

Notaremos

$$M_A = \{T: A \to A \text{ tal que } T \text{ es un multiplicador}\}$$

Entonces $M_A \subseteq \mathcal{L}(A)$ es una subálgebra conmutativa con unidad y cerrada.

Demostración:

Sea $T \in M_A$. P.D. T es lineal

Sea $x, y, z \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, notemos que

$$xT(y + \alpha z) = Tx(y + \alpha z) = Txy + Tx\alpha z = xTy + \alpha xTz$$

Por lo tanto,

$$x(T(y+\alpha z) - Ty + \alpha Tz) = 0 \overset{\text{Usando [*]}}{\Rightarrow} T(y + \alpha z) = Ty + \alpha Tz$$

P.D T es cerrado si y solo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$ en A

$$\Rightarrow x \in A \text{ y } Tx = y$$

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$. P.D. $Tx = y$

Sea $z \in A$, cualquiera

Entonces

$$
\begin{aligned}
\|zy - zTx\|_{\mathcal{A}} &= \|zy - zTx + zTx_n - zTx_n\| \\
&\leq \|zy - zTx_n\| + \|zTx_n - zTx\| \\
&\leq \|z(y - Tx_n)\| + \|z(Tx_n - Tx)\| \\
&\leq \|z\|\,\|y - Tx_n\| + \|T_z(x_n - x)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|T_z\|\,\|x_n - x\| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene que $zy - zTx = 0 \Rightarrow Tx = y$

Más aún por el Teorema del grafo cerrado, T es continuo.

Con esto, hemos mostrado la inclusión $M_A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$

- P.D. Es una subálgebra.

Sean $T, S \in M_A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. y $x, y \in \mathcal{A}$, entonces

$$x(T+\alpha S)y = x(Ty + \alpha Sy) = Txy + \alpha Sxy = (Tx + \alpha Sx)y$$

Ademas, mostremos que $TS \in M_A$ y $ST \in M_A$

$$x(T(Sy)) = (Tx)(Sy) = (STx)_y = TSxy$$

Mostremos que los operadores conmutan, en efecto

$$xTSy = TSxy \qquad y \qquad xSTy$$

Problema 3. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ el conjunto de elementos invertibles.

Para $a \in \mathcal{A}$, definimos

$$\exp(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} a^k$$

$$\operatorname{Exp}(\mathcal{A}) = \left\{ \prod_{\lambda=1}^{n} \exp(a_i) : a_i \in \mathcal{A} \right\}$$

a) Muestre que lo anterior está bien definido.

b) $\operatorname{Exp}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$

c) $\operatorname{Exp}(\mathcal{A})$ es abierto y cerrado

literal a)

Puesto que A es de Banach y

$$\|\exp(a)\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\|a\|^k = e^{\|a\|} \Rightarrow$$ La serie converge absolutamente

literal b)

Si $a_1 a_2 = a_2 a_1 \Rightarrow \exp(a_1)\exp(a_2) = \exp(a_1 + a_2)$

Entonces

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}a_1^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}a_2^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\left(\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!}\right)a_1^k a_2^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_1^k a_2^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(a_1+a_2)^n$$

$$=\exp(a_1+a_2)$$

Lunes, 4 de septiembre de 2023

Ejercicio: Sea $(E,\|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y $A=\sum_n a_n$, $B=\sum_n b_n$ series convergentes con al menos una absolutamente convergente, entonces

$$AB=\sum_n C_n$$

con $C_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$. Notemos

$$A_n=\sum_{i=0}^{n}a_n,\qquad B_n=\sum_{i=0}^{n}b_n\qquad \text{y}\qquad \mathcal{C}_n=\sum_{i=0}^{n}c_i\qquad\qquad A_nB_n\to AB$$

Entonces

$$\mathcal{C}_n=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}B_i\qquad\qquad \mathcal{C}_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}a_k b_{n-k}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}a_{i-k}b_k$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}\sum_{k=0}^{i}b_k=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}B_i$$

Demostración del resultado.

Sea $\varepsilon>0$, entonces existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ $\|B_n-B\|<\dfrac{\varepsilon/2}{\sum_k|a_k|}$ (1)

Además, existe $H_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que

$$\forall n\geq H_\varepsilon\qquad |a_n|<\frac{\varepsilon/2}{N_\varepsilon\Big(\underbrace{\max_{i\in\{1,\dots,N_\varepsilon-1\}}\|B_i-B\|}_{=a}\Big)}\tag{2}$$

Por otro lado, también existe $L_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que

$$\forall n\geq L_\varepsilon\qquad \|A_n-A\|<\frac{\varepsilon/2}{\|B\|}\tag{3}$$

Así, tomando $K=\max(L_\varepsilon, H_\varepsilon+N_\varepsilon)$, se tiene que para todo $n\geq K$

$$\|C_n-AB\|=\left\|\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}(B_i-B+B)-AB\right\|$$

$$=\left\|\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}(B_i-B)+A_nB-AB\right\|$$

$$\leq\sum_{i=0}^{n}|a_{n-i}|\,\|B_i-B\|+\|A_n-A\|\,\|B\|$$

$$=\sum_{i=0}^{N_\varepsilon-1}|a_{n-i}|\,\|B_i-B\|+\sum_{i=0}^{n}|a_{n-i}|\,\|B_i-B\|+\|A_n-A\|\,\|B\|$$

$$< \sum_{i=0}^{N_\varepsilon - 1} \frac{\frac{\varepsilon}{3}}{N_\varepsilon \cdot a} \|B_i - B\| + \sum_{i=N_\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varepsilon/3 \; a_i}{\sum_k |a_k|} + \frac{\varepsilon/3 \;\; \|B\|}{\|B\|}$$

$$\leq \frac{\frac{\varepsilon}{3} \cdot N_\varepsilon}{N_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Demostración (Probema 3 - 1 de septiembre)

Sea $a = \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)$. P.D: a^{-1} existe. Notemos

$$a^{-1} = \prod_{i=1}^{n} \exp(-a_{n-i+1}) \qquad \text{P.D} \quad a a^{-1} = a^{-1} a = e$$

Notemos que

$$a \cdot a^{n-1} = \exp(a_1) \cdots \exp(a_{n-1}) \exp(a_n) \cdot \exp(-a_n) \exp(-a_{n-1}) \exp(-a_1)$$

Además, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$: $a_i(-a_i) = -a_i(a_i)$

$$\Rightarrow \exp(a_i)\exp(-a_i) = \exp(a_i - a_i) = \exp(0)$$

Martes, 5 de septiembre de 2023

P.D. $\sigma(\exp(a)) \subseteq \exp(\sigma(a))$

Notemos que la expansión de Taylor del logaritmo está dada por

$$\ln(x) = \sum_n (-1)^n \frac{(x-1)^i}{i}$$

Aplicando un proceso similar al utilizado para la primera contenencia. Se puede demostrar que

$$\ln(\sigma(\exp(a))) \subseteq \ln(\exp(\sigma(a))) \overset{?}{=} \sigma(a)$$

Además, se tendria que

$$\sigma(\exp(a)) \overset{?}{=} \exp\left(\ln\left(\sigma\left(\exp(a)\right)\right)\right) \subseteq \exp(\sigma(a))$$

Ejercicio 1. Diremos que una álgebra $(A, \oplus, \odot)$ es una C^*-álgebra de Banach si existe una involución

- $* : A \longrightarrow A$
  $a \longmapsto a^*$

Es una involución si

1) Antilineal $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda} b^*$
2) $a^{**} = a \quad \forall a \in A$
3) $(ab)^* = b^* a^*$
4) $\|a^*\| = \|a\|$
5) $\|a^* a\| = \|a\|^2 = \|a^*\|^2$

Con lo anterior, podemos generalizar algunos conceptos como:

- Hermitiano o autoadjunto: $a^* = a$
- Unitario: $a^* = a^{-1}$
- Normal: $aa^* = a^* a$

Además, se puede probar que a es invertible si y solo si a^* es invertible.

Supongamos que a es autoadjunto en C^*-algebra de Banach

$$A(a) = \{ y \in A : ya = ay \}$$

la cual es una subálgebra C^*

Si $\varphi \in Car(\Delta h)$, entonces

$$\varphi(e^{ita}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(-ita)^n}{n!} = e^{i\varphi(ta)} \in \mathbb{C}$$

Como $\|\varphi\| \leq 1$, entonces $|e^{\varphi(-ita)}| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, luego

Por lo tanto, $\varphi(ta) \in \mathbb{R}$ y $\sigma_{A(a)}(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Como $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subseteq \sigma_{A(a)}(a) \subseteq \mathbb{R}$

2) Mostremos que si $A \subseteq B$ son C^* álgebras con la misma unidad, entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{B}(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

3) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y suponga que $x \in Inv(\mathcal{A})$
x^{-1} pertenece a C^* s-álgebra de $\mathcal{A}$ generada por e, x, x^*

4) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad C^*. Asuma que $a \in A$ es <u>normal</u> e <u>invertible</u>, i.e.
$aa^* = a^*a$ y $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

Sea $C^*(a)$ la C^*-álgebra generada por a.

$C^*(a)$ es el generado por $a^m(a^*)^n$ con $n, m \in \mathbb{N}$.

¿Se tiene que $e, a^{-1} \in C^*(a)$?

Ejercicio (2)

Sea $x \in \mathcal{A}$ P.D. $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_B(x) \iff$ P.D. $R_{\mathcal{A}}(x) = R_B(x)$

Sea $\lambda \in R_{\mathcal{A}}(x)$, entonces $x - \lambda e$ es invertible, i.e., existe $(x-\lambda e)^{-1}$, tal que

$$(x-\lambda e)(x-\lambda e)^{-1} = e$$

Luego, el resultado se sigue directamente

Ejercicio (4)

Como a es invertible, entonces $\sigma(a)$ es compacto tal que $0 \notin \sigma(a)$

Como $\sigma(a)$ es compacto, es cerrado y como $0 \notin \sigma(a)$, entonces existe D una vecindad de 0, tal que

$$D \cap \sigma(a) = \emptyset$$

Además, $\sigma(a) \cap \{0\} = 0$

Entonces existe una función f con $f(0) = 0$ y $f(t) = 1/t$ en $\sigma(a)$ (why?)

Por aproximación de Weiertrass, podemos escribir f como el límite de polinomios con constante cero.

Esto implica que $a^{-1} \in C^*(a)$ y más aún $e \in C^*(a)$.

Problema 1. a) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $a, b \in \mathcal{A}$. Muestre la igualdad de conjuntos $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$

b) De ejemplos en los que se cumpla que $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$ y $\sigma(ab) = \sigma(ba)$

Demostración

literal a)

Resultado análogo al obtenido del [Problema 11] en [7]

literal b)

⁎ $\sigma(ab) = \sigma(ba)$

1) Trivialmente se tiene si $ab = ba$

2) Si $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ con E un espacio de Banach de dimensión finita, entonces para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $\sigma(ab) = \sigma(ba)$

En este caso los operadores son compactos y por lo tanto

$$\sigma(ab) = \{0\} \cup \sigma_p(ab)$$

luego por (1),

3) Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita y sean T y S en $\mathcal{L}(E)$, entonces si T o S son compactos y por lo tanto no inversibles; así por a) se sigue el resultado.

literal b)

Si consideramos los shifts se sigue el resultado.

Pregunta 2. a) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con la propiedad: si $a \in \mathcal{A}$ y $a \neq 0$ con a inversible. Muestre que $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$.

b) Supongamos que a) se tiene para $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, con E un espacio de Banach. ¿Cómo es el espacio E?

Demostración

literal a) Sea $a \in \mathcal{A}$, entonces; $\sigma(a)$, es no vacío, i.e., existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$a - \lambda e \quad \text{es no inversible}$$

entonces como todo elemento es inversible salvo el 0, se sigue que

$$a - \lambda e = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \lambda e \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}$$

es decir, $e\mathbb{C} = \mathcal{A}$

literal b)

Si consideramos $T \in \mathcal{L}(E)$ no nulo, entonces existe al menos un punto en el que no se anula. i.e, existe $x \in E$ tal que $Tx \neq 0$ (Aquí la idea es usar Hanh-Banach)

Separamos los singletons (compactos no vacíos) entonces existe $f \in E'$ tal que

$$f(0) < \alpha < f(y) = \underbrace{f(Tx)}_{\hat{f}}$$

la composición de operadores lineales es lineal donde $\hat{f}(x) = 1$

De esta manera, si definimos el operador

$$(x \otimes f)(y) = \langle y, f \rangle x$$

Entonces $(x \otimes f)(x) = x$ y por lo tanto es no nulo; así, por la propiedad a) $(x \otimes f)$ es invertible y por lo tanto sobreyectivo, es decir, para todo $z \in E$ existe ω tal que

$$(x \otimes f)(\omega) = z$$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle \omega, f \rangle}_{\in \mathbb{C}} x = z$$

Por lo tanto, $E = \text{span}\{e\}$, i.e. es de dimensión 1. Luego

$$\underset{\in \mathbb{C}}{(x \otimes f)(y) = \alpha_y} x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(E) = \mathbb{C}\, Id.$$

Ejercicio 3. Sea E un espacio de Banach, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ y T un elemento de $\mathcal{A}$. Definamos

$$\mathcal{A}_T = \{ P(T) : P \in \mathbb{C}[x] \}$$

y $\mathcal{B}$ el álgebra de Banach engendrada por T.

1) Supongamos que E es de dimensión finita

a) Muestre que $\mathcal{A}_T = \mathcal{B}$

b) Muestre que si T es invertible, existe un polinomio Q tal que $T^{-1} = Q(T)$, i.e, $T^{-1} \in \mathcal{A}_T$

Teoría de Operadores Lineales Acotados.
Resumen · Operadores compactos

Definición $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es compacto si $T(B_E)$ es relativamente compacto

Caracterización: T es compacto si y solo si

- Para todo $A \subseteq E$ acotado, $T(A)$ es relativamente compacto

Si $T \in \mathcal{L}(H)$ con H un espacio de Hilbert, entonces además se tiene que

- $T \in \overline{R(H)}$
- $T(B_H)$ es compacta
- Toda sucesión que converge débilmente a cero converge fuertemente a cero su imagen a traves de T
- La imagen de todo sistema ortonormal en H, converge, mediante T, a cero.

Propiedades: Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, entonces

- $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$
- $p(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$ con p un polinomio
- $\sigma(T^{-1}) = (\sigma(T))^{-1}$
- La composición de un operador compacto con un operador acotado es compacta y viceversa.

Definición - Operador de rango finito-
Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$, entonces T es de rango finito si $\dim(Img(T)) < +\infty$

Teorema - Schauder-
Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, entonces

$$T \in K(E) \iff T^* \in K(E')$$

Teorema - Árcela-Ascoli
Sea K un espacio métrico compacto, entonces definamos

$$C(K) = \{ f : K \to \mathbb{K} \text{ continuas} \}$$

luego si $(C(K), d_\infty)$ es completo

entonces $K \subseteq C(K)$

- K es relativamente compacto

$\Updownarrow$

- K es acotado y equicontinuo.

Proposición. Sea $T \in K(E,F)$ entonces T envía convergencias débiles en fuertes.

Proposición $Inv(E,F) \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ es un abierto

Lema: Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(E)$ con $\|\mathcal{U}\| < 1$, entonces

$$(Id - \mathcal{U})^{-1} = \sum_{n \geq 0} \mathcal{U}^n$$

- **Observación:** $Inv(E,F)$ no es un espacio vectorial

Definición: - Espectro-
Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, definimos

$$\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda Id \text{ no es invertible} \}$$

Definición - Espectro puntual-
Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, definimos

$$\sigma_d(T) = \sigma_p(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\} \}$$

i.e., $T - \lambda Id$ no es inyectiva

Definición - Espectro continuo y residual
Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, definimos

$$\sigma_c(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \overline{Img(T - \lambda Id)} = E \}$$
con $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda \notin \sigma_p(T)$

Análogamente, definimos

$$\sigma_r(T) = \{ \lambda \in \sigma(T) \text{ y } \lambda \notin \sigma_p(T) : \overline{Img(T - \lambda Id)} \neq E \}$$

Observación

$$\sigma(T) = \{ \sigma_{ess}(T), \sigma_d(T) \}$$

$$\sigma_{ess}(T) = \{ \sigma_r(T), \sigma_c(T) \}$$

Proposición Sea $T \in \mathcal{L}(E)$

$$\sigma(T) \subseteq \overline{B}(0, \|T\|), \text{ i.e., } |\lambda| \leq \|T\|$$

Definición - Conjunto resolvente -
Definimos,

$$R(T) = \sigma(T)^c,$$

además, para cada $\lambda \in R(T)$, definimos

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda Id)^{-1}$$

Proposición : Identidad del resolvente
Sea $T \in \mathcal{L}(E)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in R(T)$,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) R_{\lambda_1}(T) R_{\lambda_2}(T) = R_{\lambda_1}(T) - R_{\lambda_2}(T)$$

Proposición: El espectro es un conjunto compacto no vacío en $\mathbb{C}$.

Definición - Radio espectral-
Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, definimos

$$\rho(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Teorema: -Alternativa de Fredholm-
Sea $K \in \mathcal{K}(E)$, entonces

a) $\dim(\ker(Id-K))$ es finita

b) $Img(Id-K)$ es cerrada

- $Img(Id-K)^{\perp} = \ker(Id-K^*)$
- $Img(Id-K) = {}^{\perp}\ker(Id-K^*)$

c) $Id-K$ es inyectivo si y solo si es sobreyectivo.

d) $\dim(\ker(Id-K)) = \dim(\ker(Id-K^*))$

Proposición: Si K es un operador compacto, entonces

$$Id-K$$

es un operador de Fredholm con $Ind(K)=0$

$Ind(K) = \dim(\ker(K)) - \text{codimensión}(Img(T))$

Proposición: Sea $T \in \mathcal{K}(E)$, entonces

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$$

$$0 \in \sigma(T)$$

y

$\sigma_p(T)$ es finito o $\sigma_p(T) = \{\lambda_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$

$$\lambda_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Si E es separable

$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ tq $\lambda_n \to 0$

Teorema: Descomposición espectral
Sea H un espacio de Hilbert. Sea $T \in \mathcal{K}(H)$ normal (autoadjunto), entonces

$$H = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)}} \ker(T - \lambda Id)$$

Teorema: Sea $K \in \mathcal{K}(E)$, $T = Id - K$,

No existe una sucesión $(F_n)_n$ de s.e.v. cerrados tales que

$F_n \subsetneq F_{n+1}$ y $T(F_{n+1}) \subseteq F_n$

o

$F_{n+1} \subsetneq F_n$ y $T(F_n) \subseteq F_{n+1}$

Además, se tiene que

$(\ker(T^n))_n$ es creciente y

$(Img(T^n))_n$ es decreciente. Además las sucesiones son estacionarias i.e.,

$\ker(T^n) = \ker(T^{n_0}) \quad \forall n \geq n_0$
$Img(T^n) = Img(T^{n_0}) \quad \forall n \geq n_0$

Teorema - Radio espectral-
Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, entonces

$$\rho(T) = \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{1/n}$$

Proposición: Se tiene que

$$\varphi : Inv(E) \to \mathcal{L}(E)$$
$$T \mapsto T^{-1}$$

es continua.

Definición

- T es unitario si $T^* = T^{-1}$, $TT^* = id$
- T es normal si $TT^* = T^*T = id$
- T es autoadjunto si $T = T^*$
- T es definido positivo si T autoadjunto y $\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$

Proposición. Si T es normal, entonces

$$\ker(T) = \ker(T^*)$$

En general, $\|T\| = \|T^*\|$

Proposición Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ con H de Hilbert

- $T = 0 \iff \langle Tx, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H$
- Si T es autoadjunto $\iff \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$
- Si T es autoadjunto $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$
- Si $\langle Tx, x \rangle \; \forall x \in H$ entonces $\sigma(T) \in \mathbb{R}^+$

Solución EDO segundo orden

$$y''(x) + y'(x) \cdot p + q\, y(x) = 0 \quad \text{con } p, q \in \mathbb{R}$$

ecuación asociada

$$r^2 + r \cdot p + q = 0$$

Casos:

1) Raíces reales distintas

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2) Raíz real única

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{r \cdot x}$$

3) Raíces complejas conjugadas

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos(bx) + C_2 \operatorname{sen}(bx))$$

$r = a + bi$ y $r = a - bi$

Revisión: 31 de julio de 2023

Control Final - Teoría de Operadores

Problema 1. Sean E y F espacios de Banach y asuma que E es reflexivo. Sea $T\in K(E,F)$. Considere $|\cdot|$ otra norma más débil que la norma $\|\cdot\|_E$, i.e., existe $C>0$ tal que $|u| \leq C\|u\|$.

Muestre que

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists C_\varepsilon>0) \text{ tal que } \|Tu\|_F \leq \varepsilon\|u\|_E + C_\varepsilon |u|. \quad \forall u\in E$$

Muestre que la conclusión falla si E no es reflexivo.

Demostración

Por contradicción, supongamos que

$$(\exists \varepsilon>0)(\forall C>0) \text{ tal que } \overset{\text{Existe } u}{\vee} \|Tu\|_F > \varepsilon\|u\|_E + C_\varepsilon |u| \leftarrow \text{Negación de la hipótesis.}$$

Así, existe $\varepsilon_0>0$ tal que para todo $C>0$ existe u tal que

$$\|Tu\|_F > \varepsilon_0\|u\|_E + C_\varepsilon|u|$$

Así, para $C=k>0$, existe u_k para cada $k\in\mathbb{N}$ tal que

Recursivamente, se tiene que

$$\|Tu_k\|_F > \varepsilon_0\|u_k\|_E + n|u_k|$$

Por lo tanto, podemos construir una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|(u_n)\|=1$ y así

$$\|Tu_k\|_F > \varepsilon_0 + n|u_k|$$

De donde, como T es lineal y acotada

$$\|Tu_k\|_F > \varepsilon_0 + k|u_k| \Rightarrow \|T\|\,\|u_k\| > \|Tu_k\| > \varepsilon_0 + k|u_k|$$

$$\Rightarrow \frac{\|T\|}{k} > \frac{\varepsilon_0}{k} + |u_k| \geq 0$$

$$\text{sucesión} \Rightarrow |u_k| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } k\to+\infty$$

Pues $\|(u_n)_n\|=1$ y como el espacio es reflexivo entonces (Utilizando Kakutani).

Más aún, existe una subsucesión $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que converge débilmente a un u, i.e. $u_{k_n} \rightharpoonup u$

No obstante, la aplicación

$$|\cdot| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

es continua y convexa (por las propiedades de norma). Por lo tanto $|\cdot|$ es semicontinua inferiormente para la topología débil $\sigma(E,E')$

Por lo tanto $u=0$; en efecto, notemos que $|$

Puesto que el operador es compacto, envía convergencias débiles a fuertes. Así, se tiene que

$$T(u_{n_k}) \longrightarrow T(u)$$

Aún queda pendiente.

$$\delta + \cancel{x} = \frac{\delta}{1-\varepsilon}$$

$$\delta - \frac{\delta}{1-\varepsilon} = x \qquad \frac{(1-\varepsilon)\delta - \delta}{1-\varepsilon} = x$$

$$= \frac{\cancel{\delta} - \varepsilon\delta - \cancel{\delta}}{1-\varepsilon} = x \qquad x = \frac{\delta\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

Problema 2. Teorema Hilman-Pettis. Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.

Sea $\xi \in E''$ tal que $\|\xi\|_{E''} = 1$. P.D. $\xi \in J(\overline{B}_E)$.

Notemos que $J(\overline{B}_E)$ es cerrada en la topología fuerte $\sigma(E'', \|\cdot\|_{E''})$ (se puede demostrar por sucesiones)

Sea $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq J(\overline{B}_E)$ tal que $\xi_n \to \hat{\xi}$. P.D. $\xi \in J(\overline{B}_E)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $x_n \in \overline{B}_E$ tales que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B}_E$. Notemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy pues J es una isometría. Así, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x \in \overline{B}_E$ pues $\overline{B}_E$ es la bola cerrada. Así, por unicidad del límite

$$\xi_n = Jx_n \longrightarrow \xi = Jx \quad \Rightarrow \quad \xi \in J(\overline{B}_E).$$

Con esto, para probar el resultado, basta mostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad \|\xi - J(\overline{B}_E)\| < \varepsilon$$

Pues $J(\overline{B}_E) = \overline{J(\overline{B}_E)}$.

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ el módulo de la convexidad uniforme. Entonces como

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{\|f\|_{E''}=1} |\langle \xi, f\rangle|$$

y dado que $\|\xi\|_{E''} = 1$, entonces existe $\hat{f}$ con $\|\hat{f}\|_{E''} = 1$ tal que para $\delta/2 > 0$

$$\langle \xi, f\rangle + \frac{\delta}{2} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \xi, f\rangle > 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Luego, consideremos

$$V = \{ \eta \in E'' : |\langle \eta - \xi, \hat{f}\rangle| < \delta/2 \}$$

donde V es una vecindad de ξ en $\sigma(E'', E')$. Luego, por el Lema de Goldstine como $J(\overline{B}_E)$ es denso en $\overline{B}_{E''}$ en $\sigma(E'', E')$, entonces

$$V \cap J(\overline{B}_E) \neq \emptyset$$

Por lo tanto, existe $\hat{\eta} \in V$ y $\hat{\eta} \in J(\overline{B}_E)$; más aún existe $\hat{x} \in \overline{B}_E$ tal que $\hat{\eta} = J\hat{x}$.

Teoría de Operadores Acotados.
Parcial 1 - Bimestre 2.

Problema 1 Sea $E = (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{C}$. Considere la aplicación lineal T definida como

$$T: E \to E$$
$$f \mapsto T(f)(x) = xf(x).$$

a) Demuestre que $T \in \mathcal{L}(E)$
b) Determine $\sigma(T)$
c) Determine el espacio discreto
d) Determine el espectro escencial.

literal a)

P.D. T es lineal. Notemos que para $f, g \in E$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

$$T(\alpha f + g)(x) = x(\alpha f(x) + g(x)) = \alpha x f(x) + x g(x) = \alpha Tf(x) + Tg(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\therefore T(\alpha f + g) = \alpha Tf + Tg.$$

Por otra parte,

$$|Tf(x)| = |x f(x)| = |x||f(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |x||f(x)| = \|f\|_\infty.$$

$$\Rightarrow \|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \|T\| \leq 1.$$

Ahora, si tomamos $f(x) = 1$, para todo $x \in [0,1]$, entonces

$$|Tf(x)| = |x| \Rightarrow \max_{x \in [0,1]} |Tf(x)| = \max_{x \in [0,1]} |x| = 1$$

$$\Rightarrow \|Tf\| = 1$$

$$\therefore \|f\| = 1.$$

Así, se concluye que $T \in \mathcal{L}(E)$.

$\sigma_p(T): \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}\}$

literal b)

Por el literal anterior, $\sigma(T) \subseteq \bar{D}(0,1)$. Ahora, sea $\lambda \in \sigma_p(\lambda)$ y f_λ su valor propio asociado, notemos que

$$Tf_\lambda = \lambda f_\lambda \Rightarrow Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x) \Rightarrow x f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$$

Además, $\lambda f_\lambda(x)$ es una función continua, por lo tanto f_λ es una función continua. Además $f_\lambda \neq 0$ y

$$(T - \lambda Id) f_\lambda = 0 \Rightarrow Tf_\lambda - \lambda f_\lambda = 0$$

$$\Rightarrow Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$$
$$\Rightarrow x f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$$

$$(f_\lambda(x))(x - \lambda) = 0$$

Pero f_λ es distinta de cero, luego, si $x \neq \lambda$, entonces $f_\lambda(x) = 0$. Así, si tomamos

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \neq \lambda}} f_\lambda(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \neq \lambda}} 0 = 0 \Rightarrow f_\lambda(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1].$$

Por lo tanto, $f_\lambda = 0$. Por lo tanto, $\lambda \notin \sigma_p(T)$ y más aún $\sigma_p(T) = \emptyset$. Así

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma(T) \subseteq \bar{D}(0,1)$$

$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda Id$ sea ~~sea~~ invertible$\}$

Sea $\lambda \in \bar{D}(0,1)$, supongamos que $T - \lambda Id$ es invertible, i.e. $\lambda \notin \sigma(T)$. Luego es sobreyectiva. Así si tomamos $g \in C^1([0,1])$, definida como $g(x) = \alpha > 0$ con $\alpha \in [0,1]$, entonces existe $f \in E$ tal que

$$(T - \lambda Id) f(x) = g(x)$$

Luego

$$Tf(x) - \lambda f(x) = g(x) = \alpha > 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \quad x f(x) - \lambda f(x) = \alpha > 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \quad f(x)(x-\lambda) = \alpha > 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

Notemos que $|\lambda| \leq 1$. y $x \in [0,1]$, luego, si $x = \lambda$, entonces.

$$0 < g(x) = \alpha = 0 \qquad \Rightarrow \Leftarrow$$

lo cual no es posible. Así $T - \lambda Id$ no es sobreyectiva y por lo tanto invertible. Así

$$\sigma_{ess} = \sigma(T) = \bar{D}(0,1).$$

Problema 2. Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert. Sea $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$

- Muestre que $Img(A)$ es cerrada ssi existe una constante $c > 0$ tal que

$$\forall u \in H_1 \quad d(u, ker(A)) \leq c\|Au\|.$$

$\Leftarrow$

Supongamos que existe $c > 0$ tal que

$$\forall u \in H_1 \quad d(u, ker(A)) \leq c\|Au\|$$

P.D. $Img(A)$ es cerrada. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Img(A)$ tal que $u_n \to u$ P.D. $u \in Img(A)$
Como $u_n \in Img(A)$, existen $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_n = A w_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, por hipótesis

$$d(w_n, ker(A)) \leq c\|u_n\| = c\|Aw_n\| \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \inf_{z \in ker(A)} d(w_n, z) \leq c\|u_n\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Otra idea.

Notemos que, como $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, entonces $ker(A)$ es cerrado. Así, definamos

$$H = H_1 / ker(A).$$

notemos que H es un espacio de Banach con la norma

$$\|z\|_H = \inf_{w \in ker(A)} \|z - w\| = \inf_{w \in ker(A)} d(w, z) = dist(z, ker(A))$$

Así, consideremos la proyección

$$\pi : H_1 \to H$$
$$x \mapsto \pi(x) = [x] = y. \qquad\qquad y = \pi(x)$$

la cual es sobreyectiva, lineal y acotada. Con esto, definamos

$$\hat{A} : H \to Img(A)$$
$$y \mapsto \hat{A}y = Ax$$

Notemos que $\hat{A}$ está bien definida; Así sea $y \in H$, supongamos que

$$y = \pi(x_1) \quad y \quad y = \pi(x_2),$$

luego, $\pi(x_1) = \pi(x_2) \Rightarrow [x_1] = [x_2] \Rightarrow \Rightarrow x_1 - x_2 \in ker(A)$

$$\Rightarrow Ax_1 = Ax_2$$

Así, $\hat{A}$ está bien definido

Ejercicio 6.1. (Brezis) Pág 170. Sea $E = \ell^p$ con $p \in [1, +\infty]$. Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ y considere el operador $T \in \mathcal{L}(E)$ definido por

$$Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots)$$

con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Muestre que T es compacto si y solo si $\lambda_n \longrightarrow 0$

Consideremos el caso particular de $p \in]1, +\infty[$.

$\Rightarrow$ Supongamos que T es compacto, entonces como $e_n \longrightarrow 0$, se tiene que

$$\|Te_n\| = \|\lambda_n\| \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n \longrightarrow 0.$$

$\Leftarrow$ Recíprocamente, como para $\ell \notin \{1, +\infty\}$, ℓ^p es reflexivo, si mostramos que $e_n \rightarrow 0$ implica que $Te_n \rightarrow 0$, se sigue el resultado.

Reemplazando (e_n) por (δ_{nm}) se obtiene un resultado similar.

Para ello, notemos que

$$\|T_\lambda e^n\|_{\ell^p}^p = \sum_{k=1}^{+\infty} |e_k^n \lambda_k|^p = \sum_{k=1}^{N} |e_k^n \lambda_k|^p + \sum_{k=N+1}^{+\infty} |e_k^n \lambda_k|^p$$

Por otro lado, sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ una sucesión; definamos $(\hat{\alpha}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ como

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_1, \qquad \hat{\alpha}_2 = \sup\{\alpha_n : n > 1\} \qquad \hat{\alpha}_3 = \sup\{\alpha_n : n > 2$$

De esta manera, notemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{\alpha}_n = \limsup \alpha_n$$

Con la idea anterior, consideremos lo siguiente

$$\sum_{k=N+1}^{M} |\lambda_k e_k^n|^p \leq |\hat{\lambda}_N|^p \sum_{k=N+1}^{M} |x_k^n|^p \leq |\hat{\lambda}_N|^p \|x^n\|^p \leq C\, |\hat{\lambda}_N|^p$$

~~Revisar cotas.~~ La cota es correcta, revisar propiedades de sumatorias.

Otra alternativa.

Supongamos que $\lambda_n \rightarrow 0$, definamos

$$T_N : \ell^p \rightarrow \ell^p$$
$$x \longmapsto T_N(x) = (x_1\lambda_1, \dots, x_N\lambda_N, 0, \dots)$$

Entonces, para cada $N \in \mathbb{N}$, $T_N \in R(\ell^p)$ (Operadores de rango finito)

Sea $x \in \overline{B}_{\ell^p}$, entonces

$$\|(T_N - T)x\| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\lambda_n x_n|^p \leq |\hat{\lambda}_N| \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^p \leq |\hat{\lambda}_N| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Otra alternativa es tomando $\sup_{k\in[n+1,+\infty[} |\lambda_k|$

Por lo tanto, se sigue que

$$\|T_N - T\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} = \sup_{\|x\|=1} \|(T_N - T)x\|_{\ell^p} \leq |\hat{\lambda}_N| \longrightarrow 0.$$

$$\Rightarrow \quad T_n \longrightarrow T \quad \leftarrow \text{Convergencia uniforme.}$$

De esta manera, como $K(\ell^p)$ es cerrado, entonces T es acotado (Por ser el límite de operadores compactos)

(La segunda alternativa es válida para todo $p \in [1, +\infty]$)

Referencia Stack Id: 4713895

Brezis (2.16) Sea E un espacio de Banach. Sean G y L s.e.v. cerrados de E y asuma que existe $C>0$ tal que

$$\text{dist}(x, G\cap L) \leq C\, \text{dist}(x, L) \qquad \forall x \in G$$

Muestre que $G+L$ es cerrado.

Demostración.

Consideremos la inyección canónica

$$\pi : E \longrightarrow E/L$$

puesto que L es cerrado, E/L es un espacio de Banach. Luego, consideremos

$$T = \pi|_G \implies T: G \longrightarrow E/L$$

Así, T es un operador lineal, sobreyectivo y satisface que

$$\ker(T) = G\cap L$$

En efecto, sea $x \in \ker(T)$, entonces $Tx = [0]$, luego, $x\in L$. y como $x\in G$, entonces

$$\ker(T) \subseteq G\cap L.$$

Recíprocamente, si $x \in G\cap L$, entonces, como $x\in L$, se tiene que $x\in[0]$; así $x\in \ker(T)$.

Por lo tanto, se sigue que

$$\text{dist}(x, \ker(T)) = \text{dist}(x, G\cap L) \leq C\,\text{dist}(x, L) = C \inf_{y\in L} \|x-y\| = C\,\|[x]\|_{E/L} = C\,\|Tx\|_{E/L}$$

para todo $x\in G$. Así, usando el [Ejer 2.14], la imagen de T es cerrado, luego

$$\pi^{-1}[\pi(G)] = G+L \implies G+L \text{ es cerrado.}$$

En efecto, notemos que

$$T(G) = \pi[G] = [G] = \{y+z : z\in L \text{ y } y\in G\} = G+L$$

↑ Abuso de notación

Revisar esta inyección

Finalmente,

$$\pi^{-1}[\pi(G)] = G+L \implies G+L \text{ es cerrado.}$$

En efecto, notemos que el saturado de G se define como

$$\begin{aligned} \pi^{-1}[\pi[G]] &= \bigcup_{x\in G} [x] \\ &= \bigcup_{x\in G} \{x+y : y\in F\} \\ &= \{x+y : y \in F \text{ y } x\in G\} \\ &= G+F \end{aligned}$$

Más información ver apuntes de topología pág 73 2021 A

Con lo que se obtiene lo requerido.

Ejercicio 6.3 (Brezis) Sean E y F espacios de Banach y sea $T \in K(E,F)$, asuma que $\dim(E)$ es infinita.
Muestre que existe una sucesión $(u_n)_n$ tal que $\|u_n\| = 1$ y $\|T(u_n)\| \to 0$

Sugerencia: Argumente por contradicción.

Solución:

Por contradicción, supongamos que

$$\forall (u_n)_n \text{ tal que } \|u_n\| = 1, \quad \|T(u_n)\| \not\to 0$$

Así, para $u \in E$, no nulo, definamos $v = u/\|u\|$ y por lo tanto $\|v\| = 1$. Luego, como S_E es cerrada y $v \in S_E$, entonces existe $(v_n)_n \subseteq S_E$ tal que $v_n \to v$. Más aún, por continuidad de T, tenemos que

$$Tv_n \to Tv \qquad \text{en } (F, \|\cdot\|_F)$$

Por hipótesis, como $\|T(v_n)\| \not\to 0$, entonces existe $(v_{n_k})_k$ una subsucesión y $\hat{\varepsilon} > 0$ tal que

$$\|T(v_{n_k})\| > \hat{\varepsilon} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por unicidad del límite, se sigue que $T(v_{n_k}) \to Tv$, luego

$$\begin{aligned} \|Tv\|_F &= \|Tv + Tv_{n_k} - Tv_{n_k}\|_F \\ &\geq \|Tv_{n_k}\| - \|Tv - Tv_{n_k}\| \\ &> \hat{\varepsilon} - \|Tv - Tv_{n_k}\| \end{aligned}$$

Ver Ejercicio IV.9 [4]
Más aún, esto muestra que $T \in I(E,F)$, i.e., T es inyectivo de imagen cerrada.

Luego, si $k \to +\infty$, entonces

$$\|Tv\| > \hat{\varepsilon} \iff \|Tu\| > \hat{\varepsilon}\|u\| \qquad \forall u \in E \setminus \{0\}$$

De esta manera, se tiene que $\operatorname{Img}(T)$ es cerrada. Ahora, si definimos

$$\begin{aligned} \hat{T}: E &\to \operatorname{Img}(T) \\ x &\mapsto Tx \end{aligned}$$

entonces $\hat{T}$ es biyectivo y por lo tanto $\hat{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Img}(T), E)$; además como $\hat{T} \in K(E, \operatorname{Img}(T))$ entonces

$$\overline{T(\overline{B}_E)} \text{ es compacta} \implies \hat{T}^{-1}\left(\overline{\hat{T}(\overline{B}_E)}\right) \text{ es compacta}$$

Luego como

$$T(\overline{B}_E) \subseteq \overline{T(\overline{B}_E)} \implies T^{-1}(T(\overline{B}_E)) \subseteq T^{-1}\left(\overline{T(\overline{B}_E)}\right)$$

de esta manera

$$\underbrace{\overline{B}_E}_{\text{cerrado}} \subseteq \underbrace{T^{-1}\left(\overline{T(\overline{B}_E)}\right)}_{\text{compacto}}$$

Así, $\overline{B}_E$ es compacta; pero esto no es posible pues en ese caso la $\dim(E) < +\infty$ lo que contradice nuestra hipótesis. Así, existe $(u_n)_n$ con $(u_n)_n \subseteq S_E$ tal que

$$\|Tu_n\| \to 0$$

como se quería.

Problema de aproximación.

23:01 - Martes, 11 de junio de 2023.

- En general, se sabe que si $(T_n)_n$ es una sucesión de operadores de rango finito, ~~entonces T es~~ tales que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$, entonces T es compacto.

El recíproco de la propiedad anterior se conoce como ~~la~~ propiedad de aproximación.

En general, si F admite una base de Schauder, entonces la ~~pregunta~~ respuesta al problema de aproximación es afirmativo.

Consideremos el caso particular en el que F es un espacio de Hilbert

Como T es compacto, consideremos $K = \overline{T(\overline{B}_E)}$, así K es compacto y más aún precompacto; por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existen f_i tales que (finitos)

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} B(f_i, \varepsilon)$$

I es un conjunto finito

Luego, consideremos $G = \text{span}\{f_i\}_{i \in I}$, notemos entonces que $G \subseteq F$ (como es el span de una familia finita, entonces es cerrado) Así, podemos definir el operador proyección sobre G,

$$P_G : F \to G \subseteq F$$

Para definir el operador proyección necesitamos el producto interno.

Y por lo tanto, podemos definir $T_\varepsilon = P_G T$ (Note la dependencia de ε), entonces T_ε es un operador de rango finito

~~Atr~~ Mediante la precompacidad del conjunto

Conjeturamos que $\|T_\varepsilon - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < 2\varepsilon$; ahora, sea $x \in \overline{B}_E$, cualquiera entonces para $y = Tx$, $y \in K$ y por lo tanto, existe $i_0 \in I$ tal que

Puesto que P_G es un operador de proyección

$$\|y - f_{i_0}\| = \|Tx - f_{i_0}\| < \varepsilon \quad [1]$$

$$\Rightarrow$$

de donde, se tiene que $\|P_G Tx - P_G f_{i_0}\| = \|P_G(Tx - f_{i_0})\| \leq \|Tx - f_{i_0}\| \underbrace{\|P_G\|}_{\leq 1}$

$$\|P_G Tx - P_G f_{i_0}\| < \varepsilon \Rightarrow \|P_G Tx - f_{i_0}\| < \varepsilon \quad [2]$$

Así, por [1] y [2], se sigue que

$$\|P_G Tx - Tx\| < \|P_G Tx - f_{i_0}\| + \|Tx - f_{i_0}\| < 2\varepsilon \qquad \forall x \in B_E$$

$$\Rightarrow \|T_\varepsilon - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow T_\varepsilon \to T$$

Tomando $\varepsilon = 1/n$, y notando T_n, se tiene que

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \frac{2}{n} \longrightarrow 0$$

Así, $(T_n)_n$ es una sucesión de operadores de rango finito.

Para estudiar el caso ℓ^p con $p \in [1, +\infty[$ se realiza un proceso análogo con la consideración de que

$$P_{G_\varepsilon} : \ell^p \quad \ell^p$$

$$x \longmapsto P_{G_\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \langle e_i, x \rangle x^i$$

Analisis III
Prueba 2 - Bimestre 2.

$\| \ \|_{\ell^p} \leq \| \ \|_q$

$\sum' |x_n|^p \leq \sum' |x_n|^q \quad \ell^q \subseteq \ell^p$

$\Rightarrow x \in \ell^q = x \in \ell^p$

$p < q$

$\Rightarrow \ell$

$p < q$

$I: \ell^p \to \ell^q$

$\|Ix\|_{\ell^q} \leq \|x\|_{\ell^p} \|I\|$

La inyección no es continua.

Problema 1.

literal a)

$$T: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$$
$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto T(x) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$$

¿T continuo?

P.D. T es lineal y acotado.
Es claro que T es linea.
Notemos que

$$T(x) = (0, x_2, 0, x_4, \dots) \Rightarrow \|Tx\|_{\ell^2}^2 = \|(0, x_2, 0, x_4, 0, \dots)\|_{\ell}^2$$
$$= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ par}}}' |x_n|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}' |x_n|^2 = \|x\|_{\ell^2}^2$$
$$\Rightarrow \|Tx\|_{\ell^2} \leq \|x\|_{\ell^2}$$
$$\therefore T \text{ es acotado.}$$

literal b)
Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, cualquiera. Notemos que

$$T - \lambda Id \Rightarrow (T - \lambda Id)(x) = (0, x_2, 0, x_4, \dots) - (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \dots)$$
$$= (-\lambda x_1, x_2 - \lambda x_2, -\lambda x_3, x_4 - \lambda x_4, 0, \dots)$$
$$= (-\lambda x_1, x_2(1-\lambda) \cancel{x_3}, -\lambda x_3, x_4(1-\lambda), 0, \dots)$$

Luego

$\ker(T - \lambda Id) = ? \ | \ (T - \lambda Id)(x) = 0$

$$\Rightarrow (-\lambda x_1, x_2(1-\lambda), -\lambda(x_3), x_4(1-\lambda), 0, \dots) = (0, 0, \dots)$$
$$\Rightarrow -\lambda x_1 = 0, \quad x_2(1-\lambda) = 0, \quad \lambda(x_3) = 0,$$

Para $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 0$, $\Rightarrow x = 0$. i.e, $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$.

Ahora, para $n = 2$.

$$(T - \lambda Id)^2(x) = (T - \lambda Id)(-\lambda x_1, x_2(1-\lambda), -\lambda x_3, x_4(1-\lambda), \dots)$$
$$= (0, x_2(1-\lambda), 0, x_4(1-\lambda), \dots) - \lambda(-\lambda x_1, x_2(1-\lambda), -\lambda x_3, x_4(1-\lambda))$$
$$= (+\lambda^2 x_1, x_2(1-\lambda)^2, +\lambda^2 x_3, x_4(1-\lambda)^2, \dots)$$
$$(T - \lambda Id)^3(x) = (0, x_2(1-\lambda)^2, 0, x_4(1-\lambda)^2, \dots) - \lambda(\lambda^2 x_1, x_2(1-\lambda)^2, \lambda^2 x_3, x_4(1-\lambda)^2, \dots)$$
$$= (-0 x_1, x_2(1-\lambda)^3, 0, x_4(1-\lambda)^3, \dots)$$

Así

$$(T - \lambda I)^n(x) = ((-\lambda)^n x_1, x_2(1-\lambda)^n, (-\lambda)^n x_3, \dots)$$

$\ker((T - \lambda Id)^n) = ?$

Si $\lambda = 1$, entonces

$$\ker (T - \lambda Id)^n(x) = ((-\lambda)^n x_1, 0, (-\lambda)^n x_3, 0, \dots)$$

Luego, $\ker(T - \lambda Id) = \text{span}\{\hat{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\hat{e}_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ e_n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

$\Rightarrow \dim(\ker(T - \lambda Id)) = +\infty$.

Análogamente, si $k=0$, $\ker((T-\lambda Id)^n) = \overline{\{e_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$

luego $\dim(\ker((T-\lambda Id)^n)) = +\infty$.

Así, por la alternativa de Fredholm, si $k \neq 0$ y $k \neq 1$

$$\dim(\ker(T-\lambda I)) < +\infty.$$

luego para $k=0$ y $k=1$, T no es compacto.

Problema 2.

literal a).

P.D. T es compacto $\Leftarrow$ P.P. T es de ~~ran~~ dimensión finita.

Notemos que

$$T: H \to H$$
$$f \mapsto Tf(x) = \int_a^b e^{x-y} f(y)\,dy.$$

luego

$$Tf(x) = \int_a^b e^{x-y} f(y)\,dy = \int_a^b e^x e^{-y} f(y)\,dy = e^x \underbrace{\int_a^b e^{-y} f(y)\,dy}_{\in \mathbb{K}} = e^x \alpha \in \mathbb{R}$$

Así, $\operatorname{Img}(T) \subseteq \operatorname{span}\{e^x\} \Rightarrow \dim(\operatorname{Img}(T)) < +\infty$

$$\Rightarrow T \in K(H)$$

literal b)

Para el problema $(T-\mu Id)f = g$. Notemos que el objetivo del problema es encontrar f tal que cumpla la condición. Así, se busca que

$$f = \underbrace{(T-\mu Id)^{-1}(T-\mu Id)}_{Id} f = (T-\mu Id)^{-1} g.$$

Luego, se necesita que $T-\mu Id$ sea invertible, i.e, buscamos determinar el resolvente de T R_T.

Para ello, calculemos $\sigma(T)$. Notemos que, como T es compacto entonces

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T). \in L^2([a,b])$$

Luego, sea $\lambda \in \sigma_p(T)$, entonces existe f_λ tal que

$$Tf_\lambda = \lambda f_\lambda \Rightarrow Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$$

Así,

$$\int_a^b e^{x-y} f_\lambda(y)\,dy = \lambda f_\lambda(y) \Rightarrow e^x \int_a^b e^{-y} f_\lambda(y)\,dy = \lambda f_\lambda(x) \qquad [1]$$

Ahora, si definimos

$$S: L^2([a,b]) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto Sf = \int_a^b e^{-z} f(z)\,dz$$

Luego, en [1], se sigue que

$$e^x Sf(x) = \lambda f_\lambda(x) \Rightarrow Sf = e^{-x} \lambda f_\lambda(x)$$
$$\Rightarrow Sf = \lambda e^{-x} f_\lambda(x)$$
$$\Rightarrow \int_a^b Sf\,dx = \int_a^b \lambda e^{-x} f_\lambda f(x)\,dx.$$

$$\Rightarrow (b-a)Sf \doteq \lambda \int_a^b \lambda e^{-x} f \Rightarrow (b-a)Sf = \lambda Sf$$

$$\Rightarrow \lambda = b-a$$

Por lo tanto, se sigue que $\sigma_p(T) = \{b-a\}$ y por lo tanto

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\} = \{b-a, 0\}$$

luego, para $\mu \in R(T)$, (resolvente de T) se sigue que existe

$$f = (T-\lambda Id)^{-1} g \Rightarrow (T-\mu Id) f = g$$

literal c).

Sean $f, g \in L^2([a,b])$ y $\mu \in R(T)$ tales que

$$(T-\mu I_d) f = g$$

$$\Rightarrow Tf - \mu f = g \Rightarrow \int_a^b e^{x-y} f(y)\,dy - \mu f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow e^x \int_a^b e^{-y} f(y)\,dy - \mu f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^x Sf - \mu f(x) = g(x) \qquad [1]$$

$$\Rightarrow \int_a^b e^{-y} f(y)\,dy - \mu e^{-x} f(x) = e^{-x} g(x)$$

$$\Rightarrow Sf - \mu e^{-x} f(x) = e^{-x} g(x) \Rightarrow \int_a^b Sf - \int_a^b \mu e^{-x} f(x) = \int_a^b e^{-x} g(x)$$

$$\Rightarrow (b-a)Sf - \mu Sf = Sg$$

$$\Rightarrow Sf(b-a-\mu) = Sg$$

$$\Rightarrow Sf = \underbrace{(b-a-\mu)^{-1}}_{\text{pues } \mu \neq b-a} Sg$$

Usando lo anterior en [1], se sigue que

$$e^x (b-a-\mu)^{-1} Sg - \mu f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow e^x (b-a-\mu)^{-1} Sg - g(x) = \mu f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x \mu^{-1} (b-a-\mu)^{-1} Sg - g(x).$$

Así,

$$(T-\mu Id)^{-1}(g)(x) = e^x \mu^{-1} (b-a-\mu)^{-1} Sg - g(x) = f(x)$$

Así, notando $\hat{T} = (T-\mu Id)^{-1}$, entonces

$$\hat{T} : L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$$

$$g \longmapsto \hat{T}g = f$$

Pregunta 3. Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$ y $\tau > 0$. Muestre que para cualquier función real $u([0,\tau])$, la ecuación integral

$$f(t) = u(t) - a \int_0^t f(x)\,dx \qquad 0 \leq t \leq \tau$$

tiene solución continua $f : [0,\tau] \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Determine explícitamente la solución

Notemos que

$$f(t) = u(t) - a\int_0^t f(x)dx \quad 0 \leq t \in \tau.$$

$$\Rightarrow f(t) = (Id - aT)(u)(t)$$

donde

$$T: \mathcal{C}([0,\tau]) \longrightarrow \mathcal{C}([0,\tau])$$
$$f \longmapsto Tf \Rightarrow Tf(t) = \int_0^t f(x)dx$$

luego

$$f = (I - aT)u$$

Notemos que

$$f(t) = u(t) - a\int_0^t f(x)dx$$

$$\Rightarrow u(t) = f(t) + a\int_0^t f(x)dx$$
$$= (Id + aT)(f)(t)$$

con

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(x)dx$$

~~como~~

Equivalentemente, buscamos resolver

$$u = (T - \lambda Id)f$$

Sea $u \in C([0,\tau])$, cualquiera:

$$T: C([0,\tau]) \longrightarrow C([0,\tau])$$
$$f \longmapsto Tf(t) = \int_0^t f(x)dx$$

entonces T es el operador de Volterra, el cual se puede ver como

$$\int_0^t f(x)dx = \int_0^1 k(x,t)\, f(x)\, dx$$

donde $k(x,t) = \mathbb{1}_{[0,t]}(x)$, así este operador ~~se~~ es de Hilbert-Schmith. y más aún es compacto, tal que

$$\sigma = \{0\}$$

En efecto, por ser compacto

$$\sigma(T) = \{0\} = \sigma_p(T).$$

Ahora, sea $\lambda \in \sigma_p(T)$ con $\lambda \neq 0$. Notemos que existe $f_\lambda \in Ker(T - \lambda Id)$ tal que

$$Tf_\lambda = \lambda f_\lambda, \quad \text{luego}$$

$$\text{primitiva} \rightarrow F(t) = \int_0^t f_\lambda(x)dx = \lambda f_\lambda(x).$$

Así, por el primer teorema fundamental del cálculo $f_\lambda \in C^1([0,1])$

Luego, se tiene que

$$f_\lambda(x) = \lambda f'(x) \Rightarrow f_\lambda = \lambda \frac{df}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\lambda} = \frac{df}{f}$$

$$\Rightarrow x = \ln(f) + c$$

$$\Rightarrow ce^{\frac{x}{\lambda}} = f(x)$$

$$\therefore f(x) = c\, e^{\frac{x}{\lambda}}$$

Ahora como $Vf(0)=0$, entonces

$$f(0) = c = 0 \Rightarrow f = 0.$$

lo cual no es posible y por lo tanto

$$\sigma(V) = \{0\}$$

Luego $R(T) = \sigma(T)^c = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

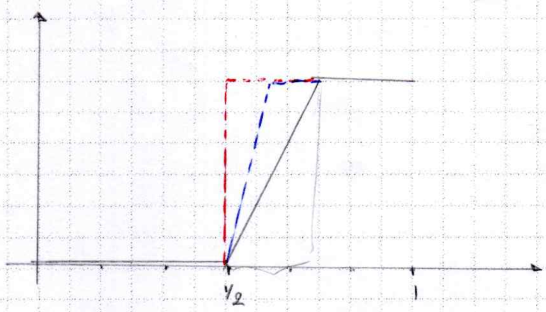
Así, para

Problema 1 - literal c)

Considere la sucesión de funciones

$$u_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ n(t - 1/2) & \text{si } 1/2 < t \le 1/2 + 1/n \\ 1 & \text{si } 1/2 + 1/n < t \le 1 \end{cases}$$

Gráficamente



Así, claramente

$$Tu_n(t) = \int_0^t u_n(s)\,ds$$

si $t < 1/2$ $\quad Tu_n(t) = 0$.

Notemos que $T(u_n) \to f$ pero $f \notin C^1([0,1])$

Problema 2. Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Consideremos V el espacio de sucesiones complejas $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |u_n|^2$$

El espacio V está dotado del producto interno $\quad \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$

$$((u,v)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n v_n.$$

Muestre que $V \subseteq \ell^2$ es un espacio de Hibert.

Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en V, cualquiera.

Consideremos el operador

$$T: V \longrightarrow \ell^2$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} =: x \longmapsto Tx = (\sqrt{\lambda_1}\, x_1, \sqrt{\lambda_2}\, x_2, \dots)$$

Así, ~~to~~ sin perdida de generalidad supongamos que $n \ge m$; con esto.

$$\| v_n - v_m \|_V^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i (v_n^i - v_m^i)(v_n^i - v_m^i)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i\left((v_n^i)^2 - v_n^i v_m^i - v_m^i v_n^i + (v_m^i)^2\right)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \left(v_n^i - v_m^i\right)^2$$

Por otra parte

$$\| Tu \|_{\ell^2}^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} |\sqrt{\lambda_i}\, u_i|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i |u_i|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i u_i^2$$

Con esto

$$\| u_n - u_m \|_V^2 = \| T(u_n - u_m) \|_{\ell^2}^2$$

$$\Rightarrow \| T(u_n - u_m) \|_{\ell^2}^2 = \| u_n - v_m \|_V$$

Notemos que T es sobreyectiva. Ahora,

$$\| u_n - u_m \|_V = \| Tu_n - Tu_m \|_{\ell^2}$$

donde ~~el~~ $T(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en ℓ^2. Luego, como ℓ^2 es completo, entonces existe $w \in \ell^2$ tal que

$$T(u_n) \longrightarrow w.$$

Como T es sobreyectivo, entonces existe $u \in V$ tal que

$$Tu = w.$$

P.D. $u_n \to u$

Notemos que

$$\| u_n - u \|_V = \| Tu_n - w \|_{\ell^2} \quad \text{y como} \quad Tu \to w$$

$$u_n \to v$$

y así, V es completo.

P.D.
$$I: V \longrightarrow \ell^2$$
$$x \longmapsto Ix = x$$

es continua y ~~sobreyectiva~~ in

~~Trivia~~ Notemos que

$$\| Ix \|_{\ell^2}^2 = \| x \|_{\ell^2}^2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |x_n|^2 = \| x \|_V^2\right.$$

$$\Rightarrow \| Ix \|_{\ell^2} \le \| x \|_V$$

Así, I es lineal y acotada.

Luego, si definimos

$$J_n: V \longrightarrow \ell^2$$
$$x \longmapsto J_n x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$$

entonces

$$\| Id\, x - J_n x \|_{\ell^2}^2 = \| (x_1, x_2, \dots, x_n, \cancel{0}, \dots) - (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) \|_{\ell^2} \qquad \text{con } \| x \|_V = 1$$

$$= \|(0,\dots,x_{n+1},\dots)\|_{\ell^2}^2$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |x_n|^2 = \|x\|_V = 1$$

$$\longrightarrow 0. \quad \Rightarrow \quad \text{si } n \longrightarrow +\infty.$$

Por lo tanto, Id es el límite de un sucesión de operadores compactos

Ejercicio 6.8. Sean E, F dos espacios de Banach y $T \in K(E,F)$. Asumamos que $R(T)$ es cerrado

a) Muestre que T es un operador de rango finito.
b) Asuma que $\dim(N(T)) < +\infty$. Pruebe que $\dim(E) < +\infty$.

Notemos que, por el teorema de la aplicación abierta existe $c>0$ tal que

$$\underbrace{B_{R(T)}}_{\text{cerrado}} \subseteq cT(B_E) \subseteq \underbrace{\overline{cT(B_E)}}_{\text{compacto}}$$

Luego, por el teorema de Riesz, $B_{R(T)}$ es compacto y así $\dim(R(T)) < +\infty$.

Como $\dim(N(T)) < +\infty$ y es cerrado $N(T)$, entonces admite un suplementario topológico E_0, luego

$$T|_{E_0} = R(T)$$

$$\Rightarrow \dim(E_0) < +\infty$$

$$\Rightarrow \dim(E) < +\infty.$$

Análisis Matemático III Parcial Bimestre 2.
2020 A.

Problema 1. Sea H un espacio de Hilbert complejo, y sea $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto

a) Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Muestre que existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in H \qquad |\langle T_x - \lambda x, x\rangle| \geq \delta \|x\|$$

b) Deducir de a) que si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces los operadores $T - \lambda Id$ y $(T - \lambda Id)^*$ son inyectivos y a imagenes cerradas.

c) Mostrar que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

literal a)

Como T es autoadjunto, entonces $T = T^*$, más aún

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \forall x, y \in H$$

Luego,

$$|\langle Tx - \lambda x, x\rangle| = \langle Tx, x\rangle - \langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle - \lambda\|x\|$$

Otra idea.

$$\langle x, \quad |\langle Tx - \lambda x, x\rangle| \leq \|Tx - \lambda x\| \|x\|$$

$$\|x\| = \|R_\lambda(T)(Tx - \lambda x)\| = \|(T - \lambda Id)^{-1}(T - \lambda Id)x\|$$

$$\leq \underbrace{\|(T - \lambda Id)^{-1}\|}_{\neq 0} \|T - \lambda Id\, x\|$$

$$|\langle Tx - \lambda x, x\rangle| = |\langle (T - \lambda Id)x, x\rangle|$$

$$\langle Tx, x\rangle \to \langle x, x\rangle.$$

⋮

$$|\langle Tx, \lambda x\rangle| = |\langle x, T\lambda x\rangle| \Rightarrow \lambda\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$$

b) Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in H \qquad |\langle Tx - \lambda x, x\rangle| \geq \delta\|x\|$$

$$\Rightarrow \quad \|Tx - \lambda x\|\|x\| \geq \delta\|x\| \qquad \forall x \in H$$

$$\Rightarrow \quad \|Tx - \lambda x\| \geq \delta > 0 \qquad \forall x \in H, \quad x \neq 0.$$

P.D. $(T - \lambda Id)$ es inyectivo. Sea $\hat{x} \in \ker(T - \lambda Id)$, ~~i.e.~~, con $\hat{x} \neq 0$, entonces

$$0 = \|T\hat{x} - \lambda\hat{x}\| > 0 \qquad \Rightarrow\Leftarrow$$

Por lo tanto, $\hat{x} = 0$, i.e. $(T - \lambda Id)$ es inyectivo. Ahora, mostremos que $Img(T - \lambda Id)$ es cerrada, sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Img(T - \lambda Id)$, cualquiera, tal que $z_n \to z$. P.D. $z \in Img(T - \lambda Id)$.

Por hipótesis existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~y $\hat{x}$ tales que $x_n \to \hat{x}$~~, luego

$$(T - Id)x_n = y_n$$

Usando el primer literal se sigue que

$$0 \leq \|x_n - x_m\|\delta \leq |\langle T(x_n - x_m) - \lambda(x_n - x_m), x_n - x_m\rangle|$$

$$\leq |\langle Tx_n - \lambda x_n - (Tx_m - \lambda x_m), x_n - x_m\rangle|$$

$$\leq |\langle (T - \lambda Id)x_n - (T - \lambda Id)x_m, x_n - x_m\rangle|$$

$$\leq |\langle y_n - y_m, x_n - x_m\rangle|$$

$$\leq \|x_n - x_m\|^* \underbrace{\|y_n - y_m\|^*}_{\to 0}$$

$(y_n)_n$ es convergente.

luego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en H y como este es completo, entonces existe $\hat{x}\in H$ tq $x_n \longrightarrow \hat{x}$, luego, por unicidad

$$(T-\lambda Id)\hat{x} = \hat{y} \quad \in Img(T-\lambda Id)$$

i.e., $Img(T-\lambda Id)$ es cerrada.

Por otro lado, como

$$(T-\lambda Id)^* = T^* - \bar{\lambda} Id^* = T - \bar{\lambda} Id. \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},$$

entonces $(T-\lambda Id)^*$ también es inyectiva con imagen cerrada

literal c) Sea $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, por el literal anterior $(T-\lambda Id)$ es inyectiva Más aún, se tiene que

$$(T-\lambda Id)^* = T - \bar{\lambda} Id \quad \in S(H,H).$$

Probando que $T-\lambda Id$ es biyectiva, se tiene que

$$\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subseteq \sigma(T)^c.$$

Problema 2. Sea H un espacio de Hilbert y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores normales en $\mathcal{L}(H)$ tales que $T_n \longrightarrow T$ en $\mathcal{L}(H)$. Muestre que T es normal.

P.D. $\quad TT^* = T^*T.$

Notemos que $\quad \|T_n - T\| \longrightarrow 0 \quad$ Así

$$\|(T_n-T)^*\| = \|T_n - T\|$$

$$\hookrightarrow \|T_n^* - T^*\| \longrightarrow 0.$$

luego

$$\|T_n^* T_n - T_n T_n^*\| = \|T_n^* T_n + \overbrace{T_n T_n^*}^{(T_n^* T_n)} - T_n T_n^* + T_n T_n^*\|$$

$$\leq \|T_n^*(T_n - T)\| + \|(T_n-T)T_n^*\|$$

$$\leq \|T^*\|\,\|T-T_n\| + \|T-T_n\|\,\|T^*\|$$

$$\longrightarrow 0.$$

$$\|T_n^* T_n - T_n T_n^*\| = \|\cancel{T_n^* T_n} + T^* T_n - T^* T_n - T_n T_n^*\|$$

$$\leq \underbrace{\|T_n\|}_{\to T}\,\underbrace{\|T_n^* - T^*\|}_{\to 0} + \underbrace{\|T_n\|}_{\to T}\,\underbrace{\|T_n^* - T\|}_{\to 0}$$

Problema 3. Consideremos $E = C([0,1],\mathbb{R})$, definamos. $\longleftarrow$ Reales.

$$T: E \longrightarrow E$$

$$Tf \longmapsto Tf \Rightarrow Tf(x) = xf(x).$$

- Determinar los valores propios de T.
- Determinar $\sigma(T)$
- Muestre o refute si T es compacto.

literal a) Determinar los $\lambda\in\sigma_p(T) = \{\lambda\in\sigma(T) : Ker(T-\lambda Id) \neq \{0\}\}$

Sea λ un valor propio y f_λ su vector propio asociado, entonces

$$Tf_\lambda = \lambda f_\lambda \quad \Rightarrow \quad Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x).$$

$$\Rightarrow \quad x f_\lambda(x) = \lambda f(x)$$

luego $\quad (x-\lambda)(f_\lambda(x)) = 0.$

Así, como $f_\lambda \in Img(T)$, entonces

$$f_\lambda(x) = x g(x) \quad \text{y más aún } f_\lambda(x) \text{ es una función continua.}$$

Así, se tiene que, si $x \neq \lambda$ entonces $f_\lambda(x) = 0$, y como f es continua

$$f(\lambda) = \lim_{\substack{x \to \lambda \\ x \neq \lambda}} f(x) = 0 \Rightarrow f_\lambda = 0$$

Por lo tanto, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$), $f_\lambda = 0$. Así $\sigma_P(T) = \emptyset$ } No tiene valores propios el operador.

$$\Rightarrow \sigma_{ess}(T) = \sigma(T)$$

Calculemos $\|T\|$, pues $\quad \sigma(T) \subseteq \overline{D}(0, \|T\|) = \overline{B}(0, \|T\|)$

Así, notemos que

$$|Tf(x)| = |x f(x)| \leq |x| \, |f(x)| \leq 1 \max_{x \in [0,1]} |f(x)| = 1 \, \|f\|. \Rightarrow \|T\| \leq 1$$

Recíprocamente

$$|T\hat{f}(x)| = |x \cdot 1| \Rightarrow \max_{x \in [0,1]} |T\hat{f}(x)| = \|Tf\| = 1.$$

$$\therefore \|T\| = 1.$$

P.D. $0 \in \sigma(T)$; P.D. T es no ~~sobr~~ invertible.

$T - \lambda Id = T$. $\quad$ T es inyectiva

P.D. T no es sobreyectiva

Sea $f = c$

$f(x) = c > 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

$x g(x) = f(x) \Rightarrow 0 = f(x) \Rightarrow \Leftarrow$.

$\therefore T$ no es sobreyectiva

$0 \in \sigma(T)$

Así, $\sigma(T) \subseteq \overline{B}(0,1)$.

Así, si $\lambda = 0$, entonces. $\quad T - \lambda Id = T$.

P.D. $\overline{B}(0,1) \subseteq \sigma(T)$

Sea $\lambda \in \overline{B}(0,1)$. P.D.

$T - \lambda I$ no es sobreyectivo

Supongamos que sí lo es; así si $g \in E$, entonces existe $f \in E$ tal que

$$(T - \lambda Id) f = g \Rightarrow Tf - \lambda f = g \Rightarrow Tf(x) - \lambda f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow x f(x) - \lambda f(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,1] \; \forall \lambda \in [0,1]$$

luego, si $g(x) = c > 0$ y $x = \lambda$, entonces. $g(0) = 0 \neq c. \Rightarrow \Leftarrow$ $\therefore$

$$\sigma(T) = \overline{B}(0,1).$$

Problema 4. Sea E un espacio de Banach y $x_0 \in E$, $f \in E^*$ con $f(x_0) = \langle f, x_0 \rangle \neq 0$. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$ definido por $T(x) = f(x) x_0$ para todo $x \in E$.

1) Muestre que T es una proyección si y solo si $f(x_0) = 1$.

2) Determine $\sigma(T)$ y encuentre el operador resolvente de T.

literal a)

$\Rightarrow$. Supongamos que T es una proyección, i.e. T es idempotente. P.D. $f(x_0) = 1$.

Por hipótesis, se tiene que

$$T(Tf(x)) = T(f(x) \cdot x_0) = f(\underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{K}} \cdot x_0) \cdot x_0 = f(x) \cdot f(x_0) \cdot x_0 = f(x) \cdot x_0$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f(x_0) \cdot x_0 - f(x) \, x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x) \, x_0}_{\neq 0} (f(x_0) - 1) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_0) = 1.$$

Recíprocamente, supongamos que $f(x_0) = 1$. P.D. $T^2 = T$.

Notemos que

$$T(Tf(x)) = T(f(x)\,x_0) = f(x)\cdot \cancel{f(x_0)}^{1}\cdot x_0 = f(x)\cdot x_0 = Tf(x)$$

$$\Rightarrow Tf = T^2 f \Rightarrow T^2 = T.$$

Así, T es un operador de proyección

literal b)

Notemos que $Img(T) = span\{x_0\}$. $\Rightarrow \dim(Img(T)) < +\infty$, así T es compacto y más aún

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$$

Sea $\lambda \in \sigma_p(T)$ y x_λ su vector propio asociado, entonces

$$Tx_\lambda = \lambda x_\lambda \Rightarrow f(x_\lambda)\cdot x_0 = \lambda x_\lambda \quad \in E$$

Luego si aplicamos nuevamente f

$$f(f(x_\lambda)\cdot x_0) = f(\lambda x_\lambda) \Rightarrow f(x_\lambda)\cdot f(x_0) = \lambda f(x_\lambda)$$

¿$f(x_\lambda) \neq 0$? Como $x_\lambda \in Img(T)$, entonces $x_\lambda = \alpha x_0$.

$$\Rightarrow f(\alpha x_0)\cdot f(x_0) = \lambda f(\alpha x_0)$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha f(x_0)}\cdot f(x_0) = \lambda\, \cancel{\alpha f(x_0)}$$

$$\Rightarrow \lambda = f(x_0).$$

Por lo tanto, $\sigma(T) = \{0, f(x_0)\}$

Ahora, para hallar el resolvente, sea $\lambda \in \sigma(T)^c$, entonces $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq f(x_0)$.

~~Notemos que~~ Hallemos

$(T - \lambda Id)^{-1}$, para ello, sea $y \in Img(T)$, entonces

$$y = Tx - \lambda x$$

$$\Rightarrow y = f(x)\cdot x_0 - \lambda x$$

$$\Rightarrow f(y) = f(x_0)\cdot f(x) - \lambda f(x).$$

$$\Rightarrow f(y) = f(x)\,(f(x_0) - \lambda)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{f(y)}{f(x_0)-\lambda}$$

Por lo tanto

$$y = \frac{f(y)}{f(x_0)-\lambda}\, x_0 - \lambda x$$

$$\Rightarrow x = \frac{f(y)}{\lambda(f(x_0)-\lambda)} - \frac{y}{\lambda}$$

Así

$$(T - \lambda Id)^{-1} = \frac{f(y)}{\lambda(f(x_0)-\lambda)} - \frac{y}{\lambda}$$

a) Notemos que

$$|Tf(x)| = \left| \int_0^1 (3x^2 + 4y^3) f(y)\,dy \right|$$

$$\leq \int_0^1 |3x^2| |f(y)| dy + \int_0^1 |4y^3| f(y)\,dy$$

$$\leq \|f\|_\infty \, 3x^2 + \|f\|_\infty .$$

$$\Rightarrow \| |Tf(x)| \leq \|f\|_\infty \, (1+3x^2)$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[0,1]} |Tf(x)| \leq \max_{x\in[0,1]} \|f\|_\infty (1+3x^2)$$

$$\leq 4\|f\|_\infty .$$

Luego, si $f(x)=1$, para $x\in[0,1]$, entonces

$$|Tf(x)| = \left| \int_0^1 (3x^2+4y^3)\,1\,dy \right|$$

$$= |3x^2+1|$$

$$\Rightarrow \|Tf\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |3x^2+1| = 4.$$

Así, $\|T\| = 4$

Litoral b)

Ahora, como

$$Tf(x) = \int_0^1 (3x^2+4y^3) f(y)\,dy = 3x^2 \int_0^1 f(y)\,dy + \int_0^1 4y^3 f(y)\,dy$$

$$= 3x^2 A + B$$

con $A_f = \int_0^1 f(y)\,dy$ y $B_f = \int_0^1 4y^3 f(y)\,dy$. Por lo tanto.

$$\mathrm{Img}(T) = P_1[\mathbb{R}].$$

Por lo tanto, $\dim(\mathrm{Img}(T)) < +\infty$ y así

$$\sigma(T) = \{\nu_p\} \cup \{0\} = \sigma_p(T) \cup \{0\}$$

Así, sea $\lambda \in \sigma_p(T)$, y $f_\lambda \in$ su valor propio asociado, notemos que $f_\lambda \neq 0$. Así,

$$Tf_\lambda = \lambda f_\lambda ,$$

es decir que $Tf_\lambda(x) = \lambda f(x)$.

$$Tf_\lambda(x) = \int_0^1 (3x^2+4y^3) f_\lambda(y)\,dy = \lambda f_\lambda(x)$$

$\Rightarrow$ $3x^2 A f_\lambda + B f_\lambda = \lambda f_\lambda(x)$ | Integrando nuevamente

$$\int_0^1 3x^2 A f_\lambda + B f_\lambda \,dx = \int_0^1 \lambda f_\lambda(x)\,dx$$

$$= A f_\lambda + B f_\lambda = \lambda A f_\lambda$$

$$\Rightarrow (1-\lambda) A f_\lambda + B f_\lambda = 0.$$

Luego.

Así, como

$$(\tilde{A} \circ \pi)(x) = \tilde{A}(\pi(x)) = Ax \Rightarrow A = \hat{A} \circ \pi.$$

Luego, $\hat{A}$ es lineal y continuo, entonces

$$Img(A) = Img(\hat{A})$$

más aún, $\hat{A}$ es inyectiva y por lo tanto biyectiva; así $Img(\hat{A})$ es cerrada.

$\Rightarrow$ Por el teorema de isomorfismos de Banach, existe $c>0$ tal que

$$\|y\| \leq c\|\hat{A}y\| \qquad \forall y \in H.$$

$$\Rightarrow \|\pi(x)\|_H \leq c\|(\hat{A}\circ\pi)(x)\| \qquad \forall x \in H_1$$

$$\Rightarrow \inf_{w \in ker(A)} \|x-w\| \leq c\|Ax\| \qquad \forall x \in H_1$$

$$\Rightarrow dist(w, ker(A)) \leq c\|Ax\| \qquad \forall x \in H_1.$$

Otra forma

$\Rightarrow$ Notemos que, como H_1 y H_2 son espacios de Hilbert, entonces

$$H_1 = ker(T) \oplus ker(T)^\perp$$

$$H_2 = Img(T) \oplus Img(T)^\perp$$

Problema 3. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador normal.

a) Muestre que $ker(T) = ker(T^*)$
b) Muestre que T es a imagen densa ssi cuando T es inyectivo.
c) Muestre que el espectro residual de T es vacío.

a) Recordemos que $\|Tx^*\|^2 = \|Tx\|^2 \Rightarrow \|T^*x\| = \|Tx\|$, así

$$ker(T) = ker(T^*)$$

b) Supongamos que T es inyectivo; así $ker(T) = \{0\}$, luego, como

$$\overline{Img(T)} = {}^\perp ker(T^*) = {}^\perp ker(T) = {}^\perp\{0\} = H.$$

$\Rightarrow$ Supongamos que $\overline{Img(T)} = {}^\perp ker(T^*) = H$

$$H = {}^\perp ker(T^*) = \{0\} = ker(T)$$

Así, T es inyectivo.

c)

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ess}(T).$$

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \overline{Img(T-\lambda Id)} \neq E\}$$

Problema 4. Sea $E = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el operador $T \in \mathcal{L}(E)$.

$$T: E \to E$$

$$\cancel{f(x) \mapsto Tf}$$

$$f \mapsto Tf \Rightarrow Tf(x) = \int_0^1 (3x^2 + 4y^2) f(y)\, dy$$

a) Encontrar $\|T\|_{\mathcal{L}(E)}$

b) Encuentre el espectro de T

c) Encuentre el operador resolvente de T.

Se sigue que.

$$4x^3(3x^2 Af_\lambda + Bf_\lambda) = 4x^3 f_\lambda(x)$$

$$12x^5 Af_\lambda + 4x^3 Bf_\lambda = 4x^3 f_\lambda(x)$$

Integrando nuevamente

$$\underbrace{\int_0^1 12x^5 Af_\lambda \, dx}_{2Af_\lambda} + \underbrace{\int_0^1 4x^3 Bf_\lambda \, dx}_{Bf_\lambda} = \lambda \underbrace{\int_0^1 4x^3 f_\lambda(x) \, dx}_{Bf_\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad 2Af_\lambda + Bf_\lambda = \lambda Bf_\lambda$$

$$\Rightarrow \quad 2Af_\lambda + (1-\lambda) Bf_\lambda = 0.$$

Con lo que tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} (1-\lambda) Af_\lambda + Bf_\lambda = 0 \\ 2 Af_\lambda + (1-\lambda) Bf_\lambda = 0 \end{cases}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & (1-\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Af_\lambda \\ Bf_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - 2 = 0.$$

$$(1-\lambda)^2 = 2$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{2}!$$

Por lo tanto,

$$\sigma(T) = \{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\} \cup \{0\}$$

d) Resolvente

Sea $\lambda \in \sigma(T)^c$, el operador resolvente está dado por,

$$(T-\lambda \, Id)^{-1} \Rightarrow (T-\lambda \, Id)^{-1}(f)$$

Luego, la matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & (1-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(u) \\ S_2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(g) \\ S_2(g) \end{pmatrix}$$

cuya inversa está dada por

$$\frac{Adj(A)^T}{\det(A)} = \frac{1}{(1-\lambda)^2-2} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}^T = \frac{1}{(1-\lambda)^2-2} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Así, como

$$(T-\lambda \, Id)^{-1}(u) = g \Rightarrow (T-\lambda Id)^{-1} u(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 A_u + B_u - \lambda u = g(x)$$

$$u = \frac{1}{\lambda}(3x^2 A_u + B_u - g(x))$$

$\boxed{\text{Guarda dependencia.}}$

Ejercicio VII.15. Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita.

a) Muestre que $\sigma(A^2) = \{\lambda^2 : \lambda \in \sigma(A)\} = (\sigma(A))^2$

b) Si A^2 es compacto y autoadjunto:

i) Muestre que A admite al menos un valor propio

ii) Muestre que si A admite dos valores propios λ y μ tales que $\lambda^2 \neq \mu^2$ entonces los espacios propios correspondientes son ortogonales

iii) ¿Es A compacto?

c) Supongamos que A es autoadjunto y A^2 es compacto

i) Si $A^2 = 0$, ¿Qué se puede decir de A?

ii) Si $A^2 = Id$ y H es de dimensión finita, ¿Que se puede decir de A?

iii) En el caso general, propuesto al inicio, muestre que A es compacto.

Demostración

literal a)

Por la [Proposición 3.20] se sigue el resultado.

literal b) parte i)

- Si $A = 0$, entonces 0 es un valor propio de A, pues
$$A - \lambda Id = 0 - 0 \cdot Id = 0 \qquad \text{No es inyectivo.}$$
- Si $A^2 = 0$ y $A \neq 0$, entonces
$$\{0\} \neq Img(A) \subseteq Ker(T)$$

y así, $0 \in \sigma_p(A)$. En efecto
$$A - \lambda Id = A - 0 \cdot Id = A \qquad \text{No es inyectivo pues } Ker(T) \neq \{0\}$$
- Si $A^2 \neq 0$, como es autoadjunto, entonces
$$\|A^2\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A^2)} |\lambda|$$

Como A es autoadjunto, entonces es normal

En efecto, recordemos que por el teorema del radio espectral
$$\rho(T) = \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Luego, si T es autoadjunto y para $\|u\| = 1$,
$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu \rangle = \langle T^2 u, u \rangle \leq \|T^2 u\| \|u\| = \|T^2 u\|$$

tomando el supremo, se sigue que $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$, y así $\|T^2\| = \|T\|^2$

Por inducción, se sigue que
$$\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Con esto, se sigue que

$$\rho(T) = \lim_{n\to+\infty} \|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \|T\| = \|T\|$$

2. Por otro lado, si T es normal, entonces TT^* es autoadjunto

$$\rho(T^*T) = \lim_{n\to+\infty} \|(T^*T)^n\|^{\frac{1}{n}} = \|T^*T\| = \|T\|^2$$

pues

$$\|(T^*T)^n\| = \|T^n\|^2 \Rightarrow (\rho(T))^2 = \left(\lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{2}{n}}\right)$$

$$\therefore \rho(T) = \|T\|$$

Así, como el espectro es compacto, y no vacío entonces existe $\lambda_0 \in \sigma(A^2)$ tal que

$$\|A^2\| = |\lambda_0|$$

luego, como $\lambda_0 \neq 0$, entonces como A^2 es compacto, $\lambda_0 \in \sigma_p(A^2)$ y el espacio propio asociado

$$Ker\,(A^2 - \lambda_0\, Id) \quad \text{es de dimensión finita}$$

luego, como

$$A^2 x = \lambda_0 x \Rightarrow A(A^2 x) = A^2(Ax) = \lambda_0 (Ax)$$

y así, A admite al menos un valor propio. En efecto, como buscamos que $Ax = \lambda x$, entonces como $\lambda_0 \in \sigma(A^2)$, ← son reales positivos. entonces

$$\lambda^2 = \lambda_0$$

en efecto, como $\lambda \in \sigma_p(A)$, entonces existe $\hat{x} \in H$ tal que

$$(A^2 - \lambda_0\, Id)\, x = (A - \lambda\, Id)(A + \lambda\, Id)\, v = 0$$

Así, si $(A + \lambda Id)v = 0$; entonces $-\lambda \in \sigma \in \sigma_p(A)$, caso contrario $\lambda \in \sigma_p(A)$

Para este ejercicio, se requiere que el espacio sea complejo, pues si no lo es podemos considerar

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (\text{la rotación } \pi/2)$$

entonces $T^2 = -Id$ con T^2 autoadjunto y compacto.

Para más información Ver Stack Σ: 610849

literal b) parte ii)

Si A admite dos valores propios distintos y no opuestos ($\lambda^2 \neq \mu^2$), sean F_λ y F_μ los espacios propios asociados, entonces λ^2, μ^2 son valores propios de A^2, en efecto

$$Au = \lambda u \Rightarrow A^2 u = \lambda^2 u \qquad \text{En efecto} \quad A^2 u = \lambda A u = \lambda \lambda u = \lambda^2 u$$

Por lo tanto, por el teorema de descomposición espectral

$$E_{\mu^2} \perp E_{\lambda^2} \quad \text{con } E_{\mu^2} \text{ y } E_{\lambda^2} \text{ los espacios propios}$$

Así, como $F_\lambda \subseteq E_{\lambda^2}$ y $F_\mu \subseteq E_{\mu^2}$, entonces se sigue el resultado
En efecto, si $z \in F_\lambda$, entonces

$$z \in Ker\,(A - \lambda Id) \Rightarrow (A - \lambda Id)z = 0 \quad = Az = \lambda z$$

entonces

$$A^2 z = \lambda A z = \lambda^2 z \Rightarrow (A^2 - \lambda^2 Id) z = 0$$
$$\Rightarrow z \in \ker(A^2 - \lambda^2 Id)$$
$$\Rightarrow z \in E_{\lambda^2}$$

literal b) parte iii)

No necesariamente, es fácil encontrar un operador compacto de cuadrado nulo. En efecto, consideremos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H y $A \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$Ae_{2n-1} = e_{2n} \quad y \quad Ae_{2n} = 0$$

Entonces A es de cuadrado nulo y no es compacto. Notemos que la familia $(e_n)_{2n-1}$ es un acotada y la distancia entre sus puntos es $\sqrt{2}$ por lo que no es relativamente compacta su imagen

literal c) parte i)

Si $A^2 = 0$, por la parte a), $\sigma(A) = \{0\}$ y $\rho(A) = 0$, pero como A es autoadjunto entonces

$$\rho(A) = \|A\|$$

Por lo tanto, $A = 0$. Además, se puede argumentar, usando el [Ejercicio VII.20] que si A es normal, entonces $A = 0$.

literal c) parte ii)

Si H es de dimensión finita y A es autoadjunto **(Como H es finito todos los operadores son compactos)**

Teorema: Si $T : V \to V$ es autoadjunto con $\dim(V) < +\infty$ entonces existe una base ortonormal de vectores propios de T.

Por el teorema anterior, existe una base de vectores ortonormales de A. Luego, como A^2 es compacto y $A^2 = Id$, por el literal a) se tiene que

$$\sigma(A^2) = (\sigma(A))^2 = \sigma(Id) = 1 \Rightarrow \sigma(A) = \{-1, 1\}$$

Así, por descomposición espectral

$$H = \underbrace{\ker(A - Id)}_{F} \oplus \underbrace{\ker(A + Id)}_{F^\perp}$$

Por el teorema, se tiene que

$$T = \sum_i \lambda_i \langle \cdot, v_i \rangle v_i$$ con $(v_i)_i$ la base ortonormal de vectores propios

---

Consideremos la descomposición espectral de la identidad (Id)

(Revisar) Se tiene que A es la identidad sobre F y menos la identidad sobre $F^\perp$

literal c) parte iii)

Ver P.7.16 [4]
T compacto y normal en espacios de Hilbert

$$Tx = \sum \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$ con λ_n valor y e_n vector propios

Supongamos que A^2 es autoadjunto y compacto, entonces

$$A^2 x = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

Consideremos la familia $(\lambda_p, H_p)_{p\geq 1}$ de valor y espacio propio asociado. Entonces los espacios propios son ortogonales dos a dos (de dimensión finita)

(revisar) $$H = H_0 \oplus^{\perp} \overline{\left(Span(H_p)_{p\geq 1}\right)}$$

Ejercicio VII.18 Sea E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ y $K \in \mathcal{K}(E)$ un operador compacto. Sea $\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \sigma(T+K)$, notemos

$$S = (T + K - \lambda_0 Id)^{-1}$$

1) Muestre que

$$\ker(T - \lambda_0 Id) = \ker(Id - SK)$$

2) Deducir que λ_0 es un valor propio de T

3) Muestre que

$$\sigma(T) = \left[\bigcap_{K \in \mathcal{K}(E)} \sigma(T+K)\right] \cup \sigma_p(T)$$

Demostración

literal 1)

Si $\lambda_0 \notin \sigma(T+K)$, entonces

$$S(T - \lambda_0 Id) = S(T - \lambda_0 Id + K - K) = Id - SK \qquad [A]$$

Por lo tanto,

$$\ker(S(T - \lambda_0 Id)) = \ker(Id - SK)$$

Más aún, como S es invertible, entonces es inyectivo y así

$$\ker(T - \lambda_0 Id) = \ker(Id - SK)$$

como se quería.

literal 2)

Por contradicción, supongamos que $\lambda_0 \notin \sigma_p(T)$, entonces por el literal anterior, $Id - SK$ es inyectivo; más aún como SK es compacto; entonces $Id - SK$ es sobreyectivo y así invertible

De esta manera, por [A],

$$S(T - \lambda_0 Id) = Id - SK \Rightarrow T - \lambda_0 Id = S(Id - SK) \quad \text{Invertible}$$

Es decir, $\lambda_0 \notin \sigma(T)$; pero esto no es posible. Así, $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$

literal 3)

Notemos $M = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(E)} \sigma(T+K)$, entonces como $K = 0 \in \mathcal{K}(E)$, se tiene que $M \subseteq \sigma(T)$

Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus M$, entonces existe $K \in \mathcal{K}(E)$ tal que $\lambda \notin \sigma(T+K)$. Así, por el literal 2), se tiene que $\lambda \in \sigma_p(T)$. Por lo tanto

$$\sigma(T) = \left[\bigcap_{K \in \mathcal{K}(E)} \sigma(T+K)\right] \cup \sigma_p(T).$$

Análogamente se puede concluir usando el ejercicio 4 de la prueba 2, bimestre 2 del 2021B.

Ver solución del ejercicio mencionado en los ejercicios del Lunes, 14 de agosto de 2023.