Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas.

Evaluación

1) Evaluaciones cortas (microevaluaciones) 15 % (Semanales)
2) Trabajos y/o talleres 25 %
3) Prueba parcial 25% (Semanas 4 y 12)
4) Examen 35% (Semanas 8 y 16)

Martes, 23 de abril de 2024 (Revisión).

Definición 1.1 (σ-álgebra)

Una σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre un conjunto X es un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si cumple las siguientes condiciones

1) $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{A}$
2) si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$
3) Para toda familia numerable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{A}$, tenemos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Un conjunto X dotado de una σ-álgebra $\mathcal{A}$ será llamado <u>espacio medible</u> y denotado por $(X, \mathcal{A})$. Los elementos de la σ-álgebra $\mathcal{A}$ serán denominados conjuntos $\mathcal{A}$-medibles

Definición 1.2 (Medida)

Sea $(X,\mathcal{A})$ un espacio medible. Una medida sobre $(X,\mathcal{A})$ es una función $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que verifica las siguientes propiedades

1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) Para toda sucesión de elementos disjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{1}$$

Esta propiedad se denomina σ-aditividad de μ.

La tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se denomina espacio medido.

→ Propiedades:

- Monotonía: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y A, B dos subconjuntos de X que pertenecen a $\mathcal{A}$ tales que $A \subset B$. Entonces

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

y si además $\mu(A) < +\infty$, entonces

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Subaditividad. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y (A_n) una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$. Se tiene la siguiente estimación

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \qquad (2)$$

Observación: La σ-aditividad implica la subaditividad.

Continuidad de las medidas Sea μ una medida sobre una σ-álgebra.

a) Si $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{A}$

$$\mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

b) Si $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$ es una sucesión decreciente de elementos de $\mathcal{A}$ y $\mu(B_0) < +\infty$ entonces

$$\mu\left(\lim_{n\to+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)$$

c) Para toda sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{A}$ se tiene que

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} C_n\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mu(C_n)$$

dode se definen el límite interior y el límite superior como

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

Proposición 1.3 Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido. La reunión (unión) contable de conjuntos de medida nula es de medida nula.

Demostración: Consecuencia de (2).

Definición 1.4 (Propiedades válidas ctp).

Ver [1] Pág 134

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido. Decimos que una propiedad $P(x)$ que depende de un punto $x \in X$ es válida μ-casi en todas partes si el conjunto de los $x \in X$ en donde esta propiedad no se verifica es un conjunto de μ-medida nula o si es un conjunto despreciable.

Definición 1.5.

Ver [2] Pág 340.
Ver [1] Pág 68.

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido. Una medida μ se dice <u>finita</u> si $\mu(X) < +\infty$. Se dice que μ es σ-finita si existen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementos de $\mathcal{A}$ tales que

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

y para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) < +\infty$.

Observación: Se puede extender para E un subconjunto medible de E.

Definición 1.6 (Medida completa)

Ver [1] Pág 80
Ver [2] Pág 340.

Un espacio medido $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se dice completo si $\mathcal{A}$ contiene todos los subconjuntos de conjuntos de medida nula.

Teorema 1.7. (Completación de medidas).

Ver [1] Pág 92. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y $\mathcal{D}_\mu$ el conjunto de partes μ-despreciables de X. Entonces:

a) el conjunto $\overline{\mathcal{A}}$ determinado por

$$\overline{\mathcal{A}} = \{ A \cup D \text{ con } A \in \mathcal{A} \text{ y } D \in \mathcal{D}_\mu \}$$

es una σ-álgebra sobre X.

b) Existe una única medida $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que coincide con μ sobre $\mathcal{A}$ y que hace al espacio $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ un espacio medido completo. Esta medida está definida de la siguiente manera:

$$\forall A' \in \overline{\mathcal{A}}, \quad A' = A \cup D \text{ con } A \in \mathcal{A} \text{ y } D \in \mathcal{D}_\mu, \text{ entonces}$$

$$\overline{\mu}(A') = \mu(A)$$

Proposición 1.8. (Operaciones con funciones medibles)

Ver [1] Pág 130. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y sean $f, g : X \to \mathbb{K}$ dos aplicaciones medibles, entonces:

1) las funciones suma $f+g$ y producto fg son medibles.

2) Si f no se anula, la función $1/f$ es medible

3) Si f y g son a valores reales, las funciones $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ son medibles

4) Para todo $p>0$ la función $|f|^p$ es medible.

Martes, 24 de abril de 2024

- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y abierto.

$$C^0(\Omega; \mathbb{R}) = C^0(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ es continua (en } \Omega) \}$$

$C^0(\Omega)$ es un s.e.v. del espacio de funciones con la suma de funciones y producto por escalar usuales.

- Dado $k \in \mathbb{N}$

$$C^k(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N, |\alpha| \leq k, \ \partial^\alpha u \in C^0(\Omega) \}$$

$C^k(\Omega)$ es un s.e.v. de $C^0(\Omega)$

$C^k(\Omega)$ coincide con el espacio de las funciones k-veces Fréchet diferenciables.

A los elementos de $C^k(\Omega)$ se los denomina funciones de clase C^k en Ω.

- Se define

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$$

$C^\infty(\Omega)$ es un s.e.v. de $C^0(\Omega)$.

A los elementos de $C^\infty(\Omega)$ se los denomina como funciones suaves.

Observación: Los espacios vectoriales $C^0(\Omega)$, $C^k(\Omega)$ y $C^\infty(\Omega)$ no pueden ser dotados de una norma, pero sí de una topología, la cual los convierte en espacios vectoriales topológicos localmente convexos.

topología natural $\longrightarrow$ familia de seminormas. Ver Rudin - Functional Analysis.

Soporte de una función.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y u una función $u: A \to \mathbb{R}$, entonces el soporte de u se define como

- $$supp(u) := A \setminus \bigcup_{\substack{\omega \subseteq A \\ \omega \text{ abierto en } A \\ u=0}} \omega$$ abierto en A más grande donde la función se anula

- $supp(u) \subseteq A$
- $supp(u)$ es cerrado en A
- $supp(u) = Adh_A\left(\{ x \in A : u(x) \neq 0 \} \right)$

↳ adherencia relativa al conjunto A.

Observaciones:

- La definición de soporte de una función que acabamos de enunciar está enmarcada en la topología [Munkres]

En libros de análisis funcional, se suele definir el soporte de una función $u: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por:

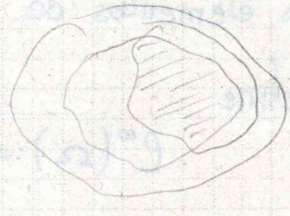
$$supp(u) = Adh_{\mathbb{R}^N}\left(\{ x \in A : u(x) \neq 0 \} \right) \qquad (3)$$

- Note, que de (3), permite que $A \subsetneq supp(u)$. Por ejemplo, considere la función

$$u : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad supp(u) = \overline{\{ x : u(x) \neq 0 \}}$$
$$x \longmapsto sen(x) \qquad = \overline{(0,\pi)}$$
$$= [0,\pi]$$

Por otro lado, si $u: B(0,2) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto u(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{si } (x,y) \in B(0,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) \in B(0,2) \setminus B(0,1) \end{cases}$$



Propiedades

1) $supp(u)$ es cerrado (en A)
2) Si $x \in A \setminus supp(u)$, entonces $u(x) = 0$.
3) Si $supp(u) = \emptyset$, entonces $u = 0$.
4) Si $\varphi : A \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi = 1$ en $supp(u)$, entonces con $A \subseteq \Omega$.

$\partial\Omega \subseteq \overline{\Omega^c}$

$\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^c}$

$$\ell\,\tilde{u} = \tilde{u} \qquad \tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \operatorname{supp}(u) \\ 0 & x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(u) \end{cases}$$

Observación 1.9 Sean (X, τ_X) un espacio topológico y Y un subconjunto de X dotado de la topología inducida. Sea T un subconjunto de Y, entonces

Ver [3] Pág 21

$$\overline{T}^{\tau_Y} = Y \cap \overline{T}^{\tau_X}$$

Recordemos que
$$\tau_Y = \{ U \cap Y : U \in \tau_X \}$$
es la topología inducida por τ_X en Y.

Observación 1.10. Un conjunto es compacto en la topología inducida si y solo si es compacto en la topología principal.

Jueves, 25 de abril de 2024.

Espacios de funciones continuas a soporte compacto.

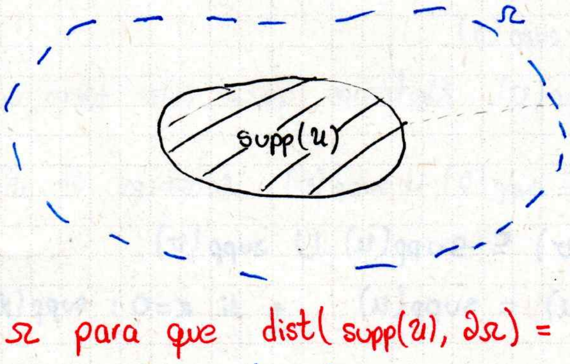
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y abierto. Definamos el siguiente conjunto
$$C_c^0(\Omega) := \{ u \in C^0(\Omega) : \operatorname{supp}(u) \text{ es compacto contenido en } \Omega \} \tag{4}$$

Respecto a la compacidad ver la Observación 1.10.

Dado $k \in \mathbb{N}$,
$$C_c^k(\Omega) := \{ u \in C^k(\Omega) : \operatorname{supp}(u) \text{ es compacto contenido en } \Omega \}$$
$$= C^k(\Omega) \cap C_c^0(\Omega)$$

Por otro lado, también se tiene
$$C_c^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_c^k(\Omega) = \{ u \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}(u) \text{ es compacto contenido en } \Omega \}$$

Gráficamente,



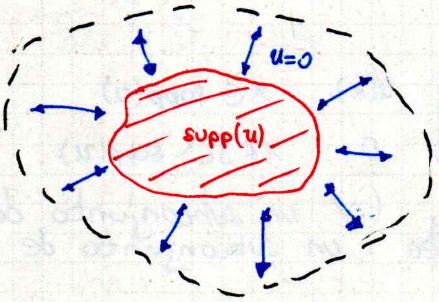
$\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^c}$

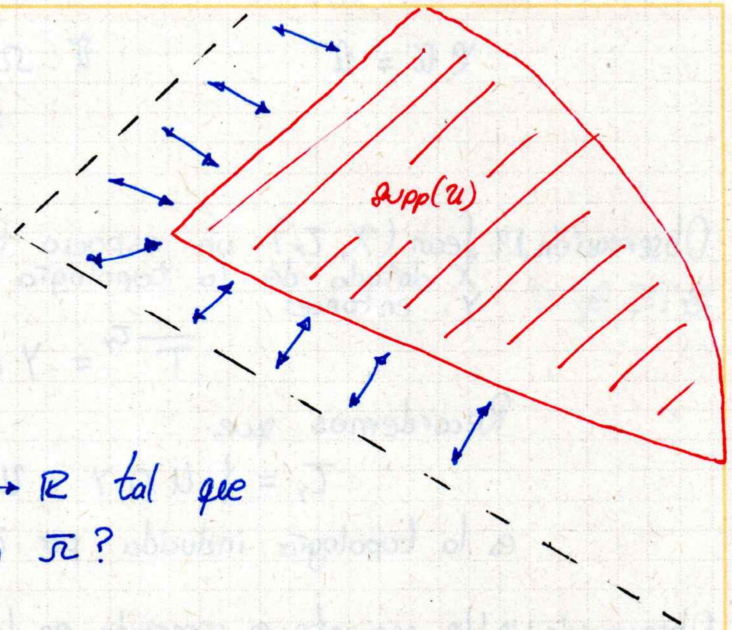
dist(supp(u), $\partial\Omega$)

dist(supp(u),

¿Condiciones sobre Ω para que $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \partial\Omega) = \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$?

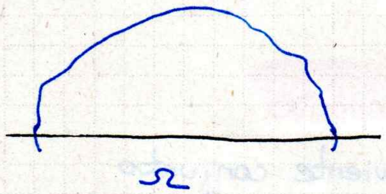
Sabemos que $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \partial\Omega) \geq \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq r$

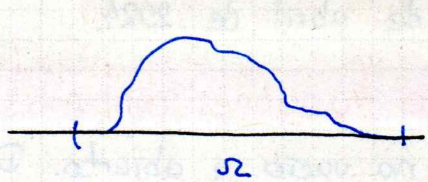




¡Problema de extensión!

Si u es continua, ¿Existe $\tilde{u}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ tal que $\tilde{u}\big|_{\Omega}=u$ y $\tilde{v}$ es continua en $\overline{\Omega}$?





¿ $u\in C_c^0(\Omega)$? No ¿ $u\in C_c^0(\Omega)$? Sí.

$C_c^0(\Omega)$ es s.e.v. de $C^0(\Omega)$

- $0\in C_c^0(\Omega)$ ✓ trivial

  $u,v\in C_c^0(\Omega) \Rightarrow u+v\in C_c^0(\Omega)$

P.D. $u+v\in C_c^0(\Omega)$.

Como u y v están definidas sobre el mismo dominio, definamos

$$\omega:\Omega\to\mathbb{R} \quad \text{como } \omega(x)=u(x)+v(x).$$

Puesto que la suma de funciones continuas es continua, basta probar que $\operatorname{supp}(\omega)$ es compacto.

P.D. $\operatorname{supp}(\omega)$ es compacto.

Para ello, determinemos el $\operatorname{supp}(u)$.

P.D. $\operatorname{supp}(\omega)\overset{?}{=}\operatorname{supp}(u)\cup\operatorname{supp}(v)$. Notemos que si esto fuera cierto la unión de compactos es compacto.

Por lo tanto, como $\operatorname{supp}(\omega)\subseteq\operatorname{supp}(u)\cup\operatorname{supp}(v)$, entonces se sigue lo requerido

$$\operatorname{supp}(u+v)\subseteq\operatorname{supp}(u)\cup\operatorname{supp}(v) \tag{5}$$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$ con $\alpha\neq 0$ $\quad \operatorname{supp}(\alpha u)=\operatorname{supp}(u)$ y si $\alpha=0:\ \operatorname{supp}(\alpha u)=\emptyset$ (6)

$$g:\operatorname{supp}(u)\to\mathbb{R}$$
$$z\mapsto \operatorname{dist}(z,\mathbb{R}^N\setminus\Omega)$$

1) Por contradicción, supongamos $\mathrm{dist}(\mathrm{supp}(u), \mathbb{R}^N \setminus \Omega) = 0$.

2) Definamos
$$g: \mathrm{supp}(u) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto h(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$$

3) g es continua, sobre un compacto

4) Alcanza su máximo y mínimo. Por lo tanto, existe $z \in \mathrm{supp}(u)$
$$\mathrm{dist}(z, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) = 0.$$

y $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ es cerrado, entonces $z \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ $\Rightarrow \Leftarrow$

$z \in \mathrm{supp}(u) \subseteq \Omega$ $\Big\}$ y $\Rightarrow$ $z \in \Omega$ y $z \notin \Omega$

P.D. g es continua. Basta probar que la función es Lipschitz.

P.D. g es Lipchitz continua.

P.D. $|g(x) - g(y)| \leq |x-y|$

Sean $x, y \in \mathrm{supp}(u)$. (Pendiente de demostrar)

→ Otra idea.

1) Por caracterización de ínfimo

$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de K y $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en F tal que
$$\|x_n - y_n\| \to 0$$
$$\mathrm{dist}(K, F) = \inf\{\|x-y\| : x \in K, y \in F\}$$
$$x_{n_k} \to x \in K \quad \text{y} \quad y_{n_k} \to x \in F.$$

Revisemos las condiciones necesarias para que Ver 2305972
$$\mathrm{dist}(\mathrm{supp}(u), \partial\Omega) = \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(u), \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$$

Consideremos lo siguiente: Sea (X, d) un espacio métrico, $\mathcal{U}$ un abierto y $x \in \mathcal{U}$, los cuales se definen como
$$X = \mathbb{R} \times \{0, 1\} \text{ con la métrica inducida como subespacio de } \mathbb{R}^2$$
$$\text{y} \quad \mathcal{U} = (0, +\infty) \times \{0\}.$$

Con lo anterior, tomando $x = (42, 0)$, entonces es claro que $x \in \mathcal{U}$. Así, se sigue que
$$X \setminus \mathcal{U} = (-\infty, 0] \times \{1\}, \quad \overline{\mathcal{U}} = [0, +\infty) \times \{0\}$$
$$\partial\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} \cap \overline{X \setminus \mathcal{U}} = [0, +\infty) \times \{0\} \cap (-\infty, 0] \times \{1\}$$
$$= \{0\} \times \emptyset$$

En consecuencia, se sigue que
$$\mathrm{dist}(x, X \setminus \mathcal{U}) = 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{dist}(x, \partial\mathcal{U}) = 42,$$

con lo que $\mathrm{dist}(x, X \setminus \mathcal{U}) \neq \mathrm{dist}(x, \partial\mathcal{U})$, lo que verifica que

$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \partial\Omega) \geq \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \qquad (7)$$

Observación 1.11. En $\mathbb{R}^n$ con $N \in \mathbb{N}$, si $x \in A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$\operatorname{dist}(x, \partial A) \leq \operatorname{dist}(x, \partial B) \qquad (8)$$

Conjeturamos que si el conjunto es convexo, entonces la distancia es igual.
Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, mostremos que para $x \in \Omega$

$$\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega).$$

Gracias a [8], es claro que

$$\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$$

P.D $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \leq \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Sea $x \in \Omega$, arbitrario pero fijo.

Recordemos que Ω es abierto y convexo.

Por absurdo, supongamos que

$$\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega).$$

como Ω es abierto, $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ es cerrado, entonces existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ tal que

$$\operatorname{dist}(x, \bar{\Omega}) > \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > d(x,y) > 0 \quad \text{pues } y \notin \Omega$$

como Ω es convexo, $\bar{\Omega}$ también lo es, así, como $\bar{\Omega}$ es convexo, entonces $y \in \Omega$
lo cual es absurdo.

Mostremos que la función

$$g : \operatorname{supp}(u) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$$

es continua.

P.D. g es continua.

P.D g es Lipschitz continua con $L = 1$.

Sean $x, y \in \operatorname{supp}(u)$, cualesquiera. Notemos que

$$\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \|x - z\| \qquad \forall z \in \partial\Omega.$$
$$\Rightarrow \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \leq \|x - z + y - y\| \qquad \forall z \in \partial\Omega$$
$$\Rightarrow \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \leq \|x - y\| + \|y - z\| \qquad \forall z \in \partial\Omega$$
$$\Rightarrow \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) - \|y - z\| \leq \|x - y\| \qquad \forall z \in \partial\Omega$$
$$\Rightarrow \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) - \inf_{z \in \partial\Omega} \|y - z\| \leq \|x - y\|$$
$$\therefore \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) - \operatorname{dist}(y,\partial\Omega) \leq \|x - y\|$$

Procedemos de manera análoga para obtener que

$$|\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) - \operatorname{dist}(y,\partial\Omega)| \leq \|x - y\|$$

es decir, g es Lipchitz continua y más aún continua.

Utilicemos otra estrategia:

Por absurdo, supongamos que $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \mathbb{R}^N \setminus \Omega) = 0$, i.e.

$$\inf_{\substack{x \in \operatorname{supp}(u) \\ y \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega}} \|x - y\| = 0.$$

Por caracterización de ínfimo podemos encontrar dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\|x_n - y_n\| \to 0 \quad \text{cuando } n \to +\infty.$$

donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{supp}(u)$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Como $\operatorname{supp}(u)$ es compacto, entonces existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x_{n_k} \to x \quad \text{con } x \in \operatorname{supp}(u).$$

Así, como

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| = 0 \implies \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} y_{n_k}$$

$$\implies \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = x$$

pero, como Ω es abierto, $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ es cerrado y en consecuencia

$$x \in \operatorname{supp}(u) \subseteq \Omega \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$$

lo cual no es posible. $\Rightarrow\Leftarrow$.

Así, se ha mostrado que $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > 0$.

Viernes, 26 de abril de 2024

$C_c^0(\Omega)$

$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c^0(\Omega)$

$C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c^0(\Omega)$

$C_c^0(\Omega)$, $C_c^k(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$ son s.e.v. de $C^0(\Omega)$

Más aún, si definimos

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

entonces

$(C_c^0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, $(C_c^k(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ y $(C_c^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ son e.n.

Observación 1.12 Se tiene que

$$u \in C_c^\infty(\Omega) \implies \operatorname{supp}(\partial^\alpha u) \subseteq \operatorname{supp}(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

Demostración: Ejercicio.

Observaciones respecto al cambio de la norma en cada espacio.

- $C_c^0(\Omega)$, $C_c^k(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$ no son espacios de Banach (depende de la norma)
- Suma y producto por escalar dejan de ser continuas.
- Distribución

Funciones continuas con extensión continua.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío.

Dada una función $u: A \to \mathbb{R}$ continua, ¿existe $v: B \to \mathbb{R}$ tal que con $A \subsetneq B$

$v\big|_A = u$ y v es continua en B? No!

En efecto, consideremos

$$u: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Jamás existirá una función que existiende a u a la frontera.

¿Qué condiciones asegurarían la extensión continua.

Observación 1.13. Se tiene la siguiente notación

$$A \subset\subset B \iff \overline{A} \subset B$$

compacto.

Teorema 1.14 (Extensión continua)

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ tales que A es denso en B, i.e.,

$$(\forall x \in B)(\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión en } A)(x_n \to x \text{ en } \mathbb{R}^N)$$

si $u: A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces existe una única extensión continua de u a B. Más aún, esta es uniformemente continua en B.

Definamos

$$v: B \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto v(x) = \begin{cases} u(x) & x \in A \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u(x_n) & x \in B \setminus A \\ \text{con } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ cualquier sucesión convergente a } x \end{cases}$$

Pregunta: ¿Es posible extender este resultado a otros espacios? Generalizar el resultado.

Demostración (Observación 1.12).

Sea $u \in C_0^\infty(\Omega)$, cualquiera.

P.D. $\operatorname{supp}(\partial^\alpha u) \subseteq \operatorname{supp}(u)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N$

Procedamos por inducción sobre la talla de α.

- Caso base: Puesto que para $\alpha = (0,\dots,0)$, $\partial^\alpha u = u$, entonces es claro que
$$\operatorname{supp}(\partial^\alpha u) \subseteq \operatorname{supp}(u).$$
- Base de la inducción: Supongamos que para $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ con $|\alpha| = k$, se tiene lo requerido, i.e.,
$$\operatorname{supp}(\partial^\alpha u) \subseteq \operatorname{supp}(u),$$
donde $k \in \mathbb{N}$ es arbitrario pero fijo.

Paso inductivo: Tomemos $\hat{\alpha} \in \mathbb{N}_0^N$ con $|\hat{\alpha}| = k+1$, entonces

$$\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_N) = \alpha + (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$
$$= (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s + 1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_N)$$

para algún $s \in \{1, \dots, N\}$. Así, gracias a la base de la inducción sabemos que

$$\operatorname{supp}(\partial^\alpha u) \subseteq \operatorname{supp}(u).$$

P.D. $\operatorname{supp}(\partial^{\hat{\alpha}} u) \subseteq \operatorname{supp}(\partial^\alpha u) \subseteq \operatorname{supp}(u)$.

Tomando $\omega = \partial^\alpha u$, basta probar que

$$\operatorname{supp}(\partial^{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)} \omega) \subseteq \operatorname{supp}(\omega).$$

Por contradicción, supongamos que

$$\operatorname{supp}(\partial^\beta \omega) \not\subseteq \operatorname{supp}(\omega) \quad \text{con } \beta = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \qquad [A]$$

es decir que existe un elemento, digamos z tal que

$$z \in \operatorname{supp}(\partial^\beta \omega) \quad \text{y} \quad z \notin \operatorname{supp}(\omega). \qquad [B]$$

Como $z \notin \operatorname{supp}(\omega)$, entonces $z \in (\operatorname{supp}(\omega))^c$ y como este conjunto es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$z \in B(z, r) \subseteq (\operatorname{supp}(\omega))^c \qquad [C]$$

Por otro lado, como ω es diferenciable, entonces por definición de diferenciación en un punto, sabemos que

$$(\partial^\beta \omega)(z) = \lim_{t \to 0} \frac{\omega(z + t\beta) - \overbrace{\omega(z)}^{0}}{t} \qquad \text{Por [B]}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\omega(z + t\beta)}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0 \qquad \text{Por [B]}$$

Gracias a que la función es cero en una vecindad del punto z. En consecuencia, gracias a la definición de límite para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t| < \delta \implies \frac{\omega(z + t\beta)}{t} = 0$$

Es decir, existe V_z una vecindad abierta dada por

$$V_z = B(0, \delta/2)$$

en la cual la derivada β-ésima de ω se anula, i.e.,

$$(\partial^\beta \omega)(x) = 0 \qquad \forall x \in V_z$$

Así, por definición de soporte, se concluye que

$$z \notin \operatorname{supp}(\partial^\beta \omega)$$

pero esto no es posible pues contradice [B], con lo cual se demuestra que

$$\operatorname{supp}(\partial^\beta \omega) \subseteq \operatorname{supp}(\omega)$$

como se quería.

Para responder a la pregunta del teorema 3.14, cosideremos la siguiente versión más general del teorema.

Teorema 1.15. Sean X y Y dos espacios métricos y $f: S \to Y$ una función uniformemente continua, con S denso en X y Y un espacio completo. Entonces existe $\hat{f}$ una extensión uniformemente continua en $\overline{S}$

Demostración

Definamos la función $\hat{f}: \overline{S} \to Y$, de la siguiente manera

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in S \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) & \text{con } \underset{\subseteq S}{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \text{ tal que } x_n \to x \text{ con } x \in \overline{S}\setminus S \end{cases}$$

Primero, mostremos que $\hat{f}$ está bien definida, para esto basta mostrar que el límite existe y es único.

- Existencia.

Sea $x \in \overline{S}\setminus S$, entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$ en X. Mostremos que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

existe, como Y es un espacio completo, basta probar que la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Puesto que f es uniformemete continua, por definición, sabemos que

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall a,b \in S)\left(d(a,b)<\delta \Rightarrow \hat{d}(f(a),f(b))<\varepsilon\right). \qquad [A]$$

Como la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces es de Cauchy. Así, para todo $\hat{\varepsilon}>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \hat{\varepsilon} \qquad \forall n,m \geq N.$$

En particular, para $\varepsilon>0$, cualesquiera, gracias a la continuidad uniforme existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que tomando $\hat{\varepsilon}=\delta$, y gracias a [A], se sigue que

$$d(x_n, x_m) < \hat{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \hat{d}(f(x_n, x_m)) < \varepsilon \qquad \forall n,m \geq N,$$

es decir, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y como Y es completo, entonces existe $y \in Y$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = y$$

es decir, el límite existe.

- Unicidad

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones tales que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = a. \qquad [B].$$

mostremos que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n).$$

Definamos la siguiente sucesión

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots).$$

Gracias a [B] y la definición de convergencia de sucesiones se sigue que para todo $\varepsilon>0$, existen N_1 y N_2 naturales tales que

$$d(x_n,a)<\varepsilon \quad \forall n\geq N_1, \quad y \quad d(y_n,a)<\varepsilon \quad \forall n\geq N_2.$$

tomando $N=\max\{N_1,N_2\}$, se sigue que si n es par

$$d(z_n,a)=d(y_n,a)<\varepsilon \qquad \forall n\geq N$$

y si n es impar

$$d(z_n,a)=d(x_n,a)<\varepsilon, \qquad \forall n\geq N$$

Por lo tanto, se concluye que $z_n\to a$ y así

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty} f(y_n)$$

como se quería.

Martes, 30 de abril de 2024

Continuamos con el análisis del Teorema 1.14

Demostración (Teorema 1.14)

Unicidad

Supongamos que existen v y ω extensiones continuas de u a B.

P.D. $\forall x\in B \quad v(x)=\omega(x)$

Notemos que para todo $x\in A$:

$$v(x)=\omega(x)=u(x).$$

Sea $x\in B\setminus A$, cualesquiera, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que

$$x_n\to x \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

Así, por la continuidad de v y ω

$$v(x_n)\to v(x) \quad y \quad \omega(x_n)\to\omega(x)$$

de esta manera, como $u(x_n)=v(x_n)=\omega(x_n)$, entonces por unicidad del límite se sigue que $v(x)=\omega(x)$, como se quería.

Existencia

Definamos

$$v: B\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto v(x)=\begin{cases} u(x) & x\in A \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u(x_n), & x\in B\setminus A \text{ y } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión que converge a } x\end{cases}$$

1) P.D. Existe $\lim\limits_{n\to+\infty} u(x_n)$

Puesto que $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$

2) Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en A tales que $x_n\to x$ y $z_n\to z$

P.D. $\lim\limits_{n\to+\infty} u(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} u(z_n).$

Observación 1.16.

u es uniformemente continua en A $\iff$ $\big(\forall (x_n), (z_n)$ sucesiones en $A \big)$
$\big(x_n - z_n \to 0$ en $\mathbb{R}^N \Rightarrow u(x_n) - u(z_n) \to 0$ en $\mathbb{R} \big)$

Note que solo la diferencia de las sucesiones debe converger, no individualmente.

3) v es una extensión continua de u a B.

3.1) v es extensión de u (Directo por definición)

3.2) v es continua.

P.D. v es uniformemente continua.

- Utilizando ε-δ se sigue la demostración
- Si ahora intentamos utilizar la caracterización, no nos salió.

Espacios de funciones continuas con extensión continua a la frontera.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y abierto. Se define

$$C^0(\overline{\Omega}) := \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ es continua en } \Omega \text{ y uniformemente continua en subconjuntos acotados de } \Omega \}$$

No corresponde a la clausura de Ω

$$C^0(Adh(\Omega)) := \{ u : Adh(\Omega) \to \mathbb{R} \mid u \text{ es continua en } Adh(\Omega) \}$$

Note que la adherencia es respecto a todo el espacio.

Miércoles, 1 de mayo de 2024

Además de los conjuntos anteriores, podemos definir

$$C_w(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ es uniformemente continua} \}$$

con esto,

$$C^0(\overline{\Omega}) = \{ u \in C^0(\Omega) : (\forall A \subset \Omega \text{ acotado}) \ u|_A \in C_w(A) \}$$

1) $u \in C^0(Adh(\Omega))$

Sea $A \subseteq \Omega$ acotado, sabemos que

$$Adh(A) \subseteq Adh(\Omega)$$

De esta manera, se sigue que $Adh(A)$ es compacto y así

$$u|_{Adh(A)} \in C_w(Adh(A))$$

$$\therefore \ u|_A \in C_w(A) \quad \text{y} \quad u|_\Omega \in C^0(\Omega)$$

2) $u \in C^0(\bar{\Omega})$, entonces existe una única extensión continua de u digamos v a $Adh(\Omega)$

$$\therefore\ v \in C^0(Adh(\Omega))$$

Ejercicio: Demuestre el resultado del punto 2.

3) $u \in C_\omega(\Omega)$, entonces es claro que $u \in C^0(\bar{\Omega})$. En consecuencia, gracias al punto 1), existe $v \in C^0(Adh(\Omega))$ tal que

$$v\big|_\Omega = u$$

Más aún,

$$v \in C_\omega(Adh(\Omega)).$$

4) ¿ $u \in C^0(Adh(\Omega))$ entonces $u\big|_\Omega \in C_\omega(\Omega)$? No.

Ejemplo: Consideremos

$$\Omega = (0, +\infty) \qquad u(x) = e^x$$

$u \in C^0([0,+\infty[)$ y no es uniformemente continua en Ω

En efecto, consideremos las sucesiones con término general:

$$x_n = n + \frac{1}{n} \qquad y \qquad y_n = n$$

entonces $x_n - y_n \to 0$ pero $e^{x_n} - e^{y_n} \not\to 0$

5) ¿ $u \in C^0(\bar{\Omega}) \Rightarrow u \in C_\omega(\Omega)$? No! Considere el mismo ejemplo anterior

Dado $k \in \mathbb{N}$,

$$C^k(\bar{\Omega}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le k)\ \partial^\alpha u \in C^0(\bar{\Omega})\} \tag{9}$$

Además, definimos

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\bar{\Omega}) \tag{10}$$

Observación 1.17. $C^0(\bar{\Omega})$, $C^k(\bar{\Omega})$, $C^\infty(\bar{\Omega})$ son e.v. topológicos convexos. En general, no pueden ser dotados de una norma.

• Ahora, supongamos que Ω es acotado, entonces

$$C^0(Adh(\Omega)) = C_\omega(Adh(\Omega)) \tag{11}$$

con esto, además se tiene que $(C^0(Adh(\Omega)), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

• Por otro lado, también tenemos que

$$C^0(\bar{\Omega}) = C_\omega(\Omega)$$

de esta manera, se sigue que

$$(C^0(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_\infty) \text{ es un espacio normado.}$$

Pregunta.

Por otro lado, sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $C^0(\Omega)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{en la norma } \|\cdot\|_\infty$$

Consideremos $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de extensiones continuas de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la $Adh(\Omega)$

a) ¿ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v? (en la norma $\|\cdot\|_\infty$)?

b) ¿ $v_n\big|_{\Omega} \to v\big|_{\Omega}$?

c) $v\big|_{\Omega} = u$

Volviendo a lo anterior, bajo las mismas hipótesis

* $(C^k(Adh(\Omega)), \|\cdot\|_\infty)$ espacio normado

$$C^k(Adh(\Omega)) \subseteq C^0(Adh(\Omega))$$

$(C^k(Adh(\Omega)), \|\cdot\|_k)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_\infty$$

Para probar que el espacio con la norma $\|\cdot\|_\infty$ no es completo, considere:

$N=1$, $\Omega=(-1,1)$ y

$$u_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} \qquad x\in(-1,1)$$

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C^1(-1,1)$

2) $u_n \to u$. $u \notin C^1(-1,1)$.

Sección: convolución (lectura Brezis pág 104-108).

En esta sección vamos a definir el producto en convolución de una función $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ con una función $g\in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p\in[1,+\infty]$, como resultados previos para esta sección consideremos los teoremas de Fubini-Tonelli.

Teorema 1.18 (Tonelli) Sea $F(x,y):\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{R}$ una función medible tal que

Ver [3] Teo 4.4

a) $\int_{\Omega_2} |F(x,y)|\, d\mu_2 < +\infty$ ctp $x\in\Omega_1$

b) $\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} |F(x,y)|\, d\mu_2\right) d\mu_1 < +\infty$

entonces $F\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$.

Teorema 1.19 (Fubini) Suponga que $F\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$, entonces

Ver [3] Teo 4.5

a) Para ctp $x\in\Omega_1$ $F(x,y)\in L^1_y(\Omega_2)$ y $\int_{\Omega_2} F(x,y)\, d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$

b) Para ctp $y\in\Omega_2$ $F(x,y)\in L^1_x(\Omega_1)$ y $\int_{\Omega_1} F(x,y)\, d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2)$

Más aún, se tiene que

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)\, d\mu_2\, d\mu_1 = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} F(x,y)\, d\mu_1\, d\mu_2 = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)\, d(\mu_1\times\mu_2)$$

Un resultado más general está dado de la siguiente manera:

Teorema 1.20 Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios medidos σ-finitos.

Dada $f: X\times Y \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ medible tal que satisface alguna de las siguientes condiciones:

a) f es no negativa

b) $f\in L^1(X\times Y)$

c) $\int_X\int_Y |F(x,y)|\, d\nu\, d\mu < +\infty$

d) $\int_Y\int_X |F(x,y)|\, d\mu\, d\nu < +\infty$

entonces, se tiene que

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\times\nu) = \int_X\int_Y f(x,y)\, d\nu\, d\mu$$

$$= \int_Y\int_X f(x,y)\, d\mu\, d\nu$$

en el sentido de que las integrales existan y sean iguales.

Con estos resultados, estamos listos para introducir la operación de convolución.

Teorema 1.21. (Young) Sea $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g\in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p\in[1,+\infty]$. Entonces para ctp $x\in\mathbb{R}^N$ la función

Ver [3], teo 4.15.

$$y \longmapsto f(x-y)g(y)$$

es integrable en $\mathbb{R}^N$. Más aún, $f*g\in L^p(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|f*g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$$

En esta sección utilizaremos la notación

$$\check{f}(x) = f(-x)$$

La demostración del teorema 1.21 es una separación por casos y aplicación de los teoremas de Fubini-Tonelli y la desigualdad de Hölder

Proposición 1.22. Sea $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g\in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $h\in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N}(f*g)h = \int_{\mathbb{R}} g(\check{f}*h)$$

Proposición 1.23. (Definición de soporte esencial)

Sea $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ cualquier función. Considere la familia de abiertas $(w_i)_{i\in I}$ de todos los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^N$ tales que para $i\in I$, $f=0$ ctp en w_i. Definamos

$$\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$$

entonces $f = 0$ ctp en ω. Así, por definición el soporte esencial de f es el complemento de ω en $\mathbb{R}^N$

Observación 1.24. Note que si f es continua la definición de soporte coincide con la definición de soporte escencial.

Demostración (Proposición 1.23)

Puesto que I puede no ser contable, consideremos el siguiente razonamiento

Dado que $\mathbb{R}^N$ es 2-numerable, entonces existe $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de abiertos tal que para todo $\mathcal{U}$ abierto en $\mathbb{R}^N$ $\mathcal{U}$ se puede escribir como la unión de elementos en $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Así, notemos que para cada $i \in I$,

$$\omega_i = \bigcup_{i \in A_i} O_i \qquad \text{con } A_i \text{ contable.}$$

Por lo tanto,

$$\omega = \bigcup_{i \in B} O_i \qquad \text{con } B = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Así, como $f = 0$ ctp sobre cada O_n con $n \in B$ y dado que ω es la unión a lo más contable de los conjuntos O_n, entonces

$$f = 0 \quad \text{sobre} \quad \omega.$$

Proposición 1.25. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p \in [1, +\infty]$, entonces

Ver [3] Prop 4.18

$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}$$

Observación 1.26. Note que, si f y g poseen soporte compacto, entonces $f * g$ también lo tiene. No obstante, esto no se aplica si solo una de las funciones es a soporte compacto.

Proposición 1.27 Sea $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, entonces $(f*g)(x)$ está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y más aún $(f*g) \in C(\mathbb{R}^N)$.

Ver [3] teo 4.19.

Proposición 1.28. Sea $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ $(k \geq 1)$ y sea $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ y además

Ver [3] Prop 4.20

$$D^\alpha (f * g) = (D^\alpha f) * g \qquad \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k$$

En particular, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, entonces $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

Jueves, 2 de mayo de 2024.

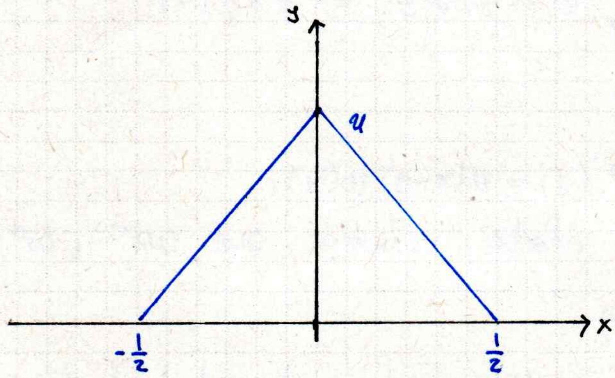
Sección: Convolución de funciones.

Motivación

Aproximación de funciones irregulares a través de funciones regulares.

Funciones continuas:

$u \in C^0([-1,1])$



Una forma de responder esta pregunta en $\mathbb{R}$ es mediante el siguiente teorema:

Teorema: Los polinomios en $[a,b]$ $(\mathcal{P}([a,b]))$ son densos en $C^0([a,b])$

Si ahora $u \in \mathcal{L}([-1,1])$ entonces consideremos el teorema 2.10 de Folland.

Sean $u, v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funciones Lebesgue medibles. Para $x \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)|\,|v(y)|\, dy < +\infty \tag{12}$$

se define la convolución de u y v en x, denotado por $u * v(x)$, como

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)\, v(y)\, dy \tag{13}.$$

Si notamos $g_x(y) := u(x-y)v(y)$, entonces (12) es equivalente a que $g_x(y) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Cuando (12) se cumple, se dice que la convolución está definida en x.

¿Para que tipo de funciones u y v es posible verificar (12) en $x \in \mathbb{R}^N$?

- Si $u, v \in C^0(\mathbb{R}^N)$, ¿ $u * v$ está definido en $x \in \mathbb{R}^N$? No!

Proposición 1.29: Si $u \in C^0(\mathbb{R}^N)$, $v \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$, entonces

1) $u * v$ está definida en $\mathbb{R}^N$
2) $u * v \in C^0(\mathbb{R}^N)$

Demostración

1) P.D. $\forall x \in \mathbb{R}^N$: $\int |u(x-y)|\,|v(y)|\, dy < +\infty$.

Sea $x \in \mathbb{R}^N$, cualquiera. Gracias a la continuidad de las funciones y al soporte compacto se sigue el resultado.

2) Sean $x \in \mathbb{R}^N$, cualquiera y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$ en $\mathbb{R}^N$.

P.D. $u * v(x_n) \to u * v(x)$ en $\mathbb{R}$

Notemos que

$$u * v(x_n) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x_n - y)\, v(y)\, dy.$$

de esta manera, basta probar que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u(x_n-y)v(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} u(x_n-y)v(y)\,dy$$

pues, por continuidad de u, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} u(x_n-y)v(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y) = u*v(x)$$

Para ello, definamos

$$\omega_n^{(x)}(y) = u(x_n-y)v(y) \quad y \quad \omega^{(x)}(y) = u(x-y)v(y).$$

vamos a aplicar convergencia dominada, en efecto, notemos que $\omega_n^{(x)}$ y $\omega^{(x)}$ es a soporte compacto, por lo tanto

$$\omega_n^{(x)}, \omega^{(x)} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Es claro que $\omega_n^{(x)}$ converge puntualmente a $\omega^{(x)}$ por la continuidad de las funciones.

T.C.D.L.

Para cada $n\in\mathbb{N}$, definamos $f_n(y) = u(x_n-y)v(y)$

1) $\forall n\in\mathbb{N}$: $f_n\in L^1(\mathbb{R}^N)$

2) $f_n(y) \to f(y)$ $\forall y\in\mathbb{R}^N$ (puntualmente).

3) P.D. $(\exists g\in L^1(\mathbb{R}^N))(\forall n\in\mathbb{N})$

Consideramos $g(y) = \max\limits_{\bar{B}(0,r)-\mathrm{supp}(v)} |u(z)|\,|v|(y)$

aplicando el teorema se sigue.

Martes, 7 de mayo de 2024.

A partir de la proposición 1.29 podemos relajar las hipótesis de manera que se tenga el siguiente resultado.

Proposición 1.30 Sean $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $v\in C_c^0(\mathbb{R}^N)$

1) $u*v$ está definida en $\mathbb{R}^N$

2) $u*v\in C^0(\mathbb{R}^N)$

donde $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) = \{u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R} \mid (\forall K\subseteq\mathbb{R}^N \text{ compacto})\ u|_K\in L^1(K)\}$

Demostración

1) Similar a la Proposición 1.29

2) Primero se demuestra la conmutatividad y luego un proceso similar al realizado en la Proposición 1.29.

Proposición 1.31 (Desigualdad de Young)

Sean $u\in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $v\in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p\in[1,+\infty]$

- Para $p \in [1,+\infty[$: $u * v$ está definida c.t.p. en $\mathbb{R}^N$
$$u * v \in L^p(\mathbb{R}^N) \qquad (14)$$
- Para $p = +\infty$: $u * v$ está definida en $\mathbb{R}^N$
$$u * v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad (15)$$

En cualquier caso, se cumple que
$$\| u * v \|_{L^p} \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^p} \qquad (16)$$

Demostración:

- Supongamos que $p = +\infty$

Sea $x \in \mathbb{R}^N$.
$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)| \, dy \leq \|v\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)| \, dy \leq \|v\|_{L^\infty} \|u\|_{L^1} < +\infty$$

Invarianza de la integral por traslaciones en el dominio

Gracias a lo anterior,
$$|u * v(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) v(y) \, dy \right| \leq \|v\|_{L^\infty} \|u\|_{L^1}$$

$$\therefore \quad \|u * v\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{L^1}$$

- Supongamos que $p = 1$.

Definamos, $F(x,y) = u(x-y)v(y)$

P.D. $\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)v(y)| \, dy < +\infty$ ctp $x \in \mathbb{R}^N$.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)| \, dx = |v(y)| \, \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty \quad \text{ctp } y \in \mathbb{R}^N$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)| \, dx \, dy = \|u\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^N} |v(y)| \, dy = \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1} < +\infty$$

En consecuencia, gracias a Tonelli
$$F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$$

Así, aplicando Fubini, se sigue que
$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)| \, dy < +\infty$$

y más aún,
$$\|u * v\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) v(y) \, dy \right| dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)| \, dy \, dx \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1}$$

$$\therefore \|u * v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1}$$

Caso $p>1$.

Para la demostración del caso $p>1$ ver los apuntes anteriores pág 43.

P.D $\|u*v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^p}$.

definamos

$$f_x(y) = |u(x-y)|^{1/p} |v(y)| , \quad f_x \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

$$g_x(y) = |u(x-y)|^{1/q} , \quad g_x \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

Notemos que

$$\|u*v\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u*v(x)|^p \, dx$$

Por otro lado,

$$|u*v(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)| \, |v(y)| \, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f_x \, g_x \, dy \leq \|f_x\|_{L^p} \|g_x\|_{L^q}$$

$$\|f_x\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)| \, |v(y)|^p \, dy \right)^{1/p} = \left(|u| * |v|^p(x) \right)^{1/p}$$

Así

$$|u*v(x)| \leq \left(|u| * |v|^p(x) \right)^{1/p} \|u\|_{L^1}^{1/q} \qquad [*]$$

Miércoles, 8 de mayo de 2024.

Continuación de la demostración.

Integrando [*] sobre $\mathbb{R}^N$

$$\|u*v\|_{L^p}^p \leq \|u\|_{L^1}^{p/q} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} |u| * |v|^p \, dx}_{= \| |u| * |v|^p \|_{L^1}}$$

$$\leq \|u\|_{L^1}^{p/q} \|u\|_{L^1} \| |v|^p \|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1}^p \|v\|_{L^p}^p$$

$$\therefore \|u*v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^p} \qquad \blacksquare$$

Soporte de la convolución. Sean $u, v : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que su convolución esté definida

$$\operatorname{supp}(u*v) = \operatorname{Adh}\left(\{ x \in \mathbb{R}^N : u*v(x) \neq 0 \} \right)$$

¿Cuando $u*v(x) = 0$?

Notemos que

$$u*v(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) v(y) \, dy = \int_{\operatorname{supp}(u)} u(x-y) v(y) \, dy$$

$$= \int_{\{x\} - \operatorname{supp}(u)} u(x-y) v(y) \, dy$$

$$= \int_{(\{x\} - \operatorname{supp}(u)) \cap (\operatorname{supp}(v))} u(x-y) v(y) \, dy.$$

A partir de lo anterior, notemos que si $(\{x\} - supp(u)) \cap supp(v) = \emptyset$, entonces la integral es cero.

Por lo tanto

$$\forall x \notin supp(u) + supp(v) \Rightarrow (\{x\} - supp(u)) \cap supp(v) = \emptyset$$

$$\Rightarrow u * v(x) = 0$$

Con lo cual $\Rightarrow supp(u*v) \subseteq \overline{supp(u) + supp(v)}$

Notemos que en efecto,

$$u * v(x) \neq 0 \Rightarrow x \in supp(u) + supp(v)$$

$$\therefore \{x \in \mathbb{R}^n : u * v(x) \neq 0\} \subseteq supp(u) + supp(v)$$

$$\therefore \quad supp(u*v) \subseteq \overline{supp(u) + supp(v)}$$

Aproximación de Brezis.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, cualquiera.

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) v(y)\, dy = \int_{supp(v)} u(x-y) v(y)\, dy$$

$$\forall y \in supp(v) : x - y \in supp(u) \Rightarrow u * v(x) = 0$$

$$\int_{supp(v)} u(x-y) v(y)\, dy = 0 \quad \text{si} \quad \underbrace{\forall y \in supp(v) : x - y \notin supp(u)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall y \in supp(v) : x \notin \{y\} + supp(u).$$

Notar que

$$\{y\} + supp(u) \subseteq supp(u) + supp(v)$$

entonces, gracias al razonamiento anterior

$$(supp(u) + supp(v))^c \subseteq (\{y\} + supp(u))^c$$

$$\therefore \forall x \in (supp(u) + supp(v))^c \qquad u * v(x) = 0$$

$$\underset{u*v(x)=0}{\forall x \in (supp(u) + supp(v))^c} \subseteq \bigcup_{\substack{\omega \text{ abierto} \\ u*v=0}} \omega$$

$$supp(u*v) \subseteq \overline{supp(u) + supp(v)}$$

Conocemos que la convolución de u y v está definida cuando $x \in \mathbb{R}^n$ satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y)| |v(y)|\, dy < +\infty.$$

Si una convolución está definida ctp en $\mathbb{R}^N$, entonces estamos interesados en que si una función es igual ctp en $\mathbb{R}^N$ a dicha convolución, entonces sus soportes son iguales.

Soporte esencial de una función.

Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ una función.

El soporte esencial de u, denotado por ess supp(u), se define como

$$\text{ess supp}(u) = \Omega \setminus \bigcup_{\substack{\omega \text{ abierto en } \Omega \\ u=0 \text{ ctp en } \omega}} \omega \qquad (17)$$

¿ $u = 0$ en $\bigcup_{\substack{\omega \text{ abierto en } \Omega \\ u=0 \text{ ctp en } \omega}} \omega$ ctp ? Es decir, el soporte esencial, ¿está bien definido?

Ejemplos:

Consideremos $u(x) = 0$ en $\mathbb{R}$, entonces $\text{supp}(u) = \emptyset$

$v(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ en $\mathbb{R}$, entonces $\text{Supp}(v) = \mathbb{R}$

Además, $u = v$ ctp en $\mathbb{R}$ y

$$\text{ess supp}(u) = \text{ess supp}(v) = \emptyset.$$

Observaciones

1) $u = v$ ctp en $\Omega \Rightarrow \text{ess supp}(u) = \text{ess supp}(v)$

2) Si $u \in C^0(\Omega)$, entonces

$$\text{supp}(u) = \text{ess supp}(u)$$

3) Para funciones en L^p, se debe reemplazar el concepto de soporte por soporte esencial

4) Si $u, v \in C^0_c(\mathbb{R}^N)$, entonces $u * v \in C^0(\mathbb{R}^N)$

$$\text{Supp}(u * v) \subseteq \overline{\text{supp}(u) + \text{supp}(v)}$$

$$\therefore u * v \in C^0_c(\mathbb{R}^N)$$

¿Se puede hablar de ess supp(u) compacto? Sí

i.e. puede ser compacto

Proposición 1.32 (Efecto regularizante de la convolución)

Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario. Si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $v \in C^m_c(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$u * v \in C^m(\mathbb{R}^N)$$

y además

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N_0, \ |\alpha| \leq m$$

$$\partial^\alpha (u * v) = u * \partial^\alpha v$$

Demostración Por inducción sobre m.

Base de la inducción : $m=1$

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $v \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$

P.D. $u * v \in C^1(\mathbb{R}^N)$ y $\forall i \in \{1,\dots,N\}$ $\frac{\partial}{\partial x_i}(u*v) = u * \frac{\partial}{\partial x_i} v$

P.D $u*v$ posee derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^N$

Sea $x \in \mathbb{R}^N$, cualquiera

P.D $\lim_{t \to 0}\left[\frac{(u*v)(x+te_i) - (u*v)(x)}{t}\right]$ existe

Jueves, 9 de mayo de 2024.

Recapitulación:

Sean $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $v \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$u*v \in C^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{y} \quad \forall i \in \{1,\dots,N\} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(u*v) = u * \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Observaciones: 1.32.

1) $\lim_{t \to t_0} f(t) = L \iff \forall (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \ (t_n \to t_0 \Rightarrow f(t_n) \to L)$

2) $\frac{\partial}{\partial x_i}(u*v)$ es continua (Utilizando la Proposición 1.30)

3) $\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)\frac{\partial}{\partial y_i}v(y)\,dy$ donde $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $v \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$

$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\mathbb{R}^N} v(x-y)u(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x-y)\,u(y)\,dy$

4) Regla de Leibniz (Teoría de la medida)

$x \in A \iff x = (x_1,\dots,x_N)$

Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida, $A \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío, y $f: A \times X \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ una función de Caratheodory (f es medible respecto a y [$\forall x \in A$: $y \mapsto f(x,y)$ es $\mathcal{A}$ medible] y continua respecto a x) [$\forall y \in X$: $x \mapsto f(x,y)$ es continua]

Consideremos la función $g: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \int_X f(x,y)\,d\mu$ suponiendo que para todo $x \in A$, $f(x,\cdot) \in L^1(X)$. [$y \mapsto f(x,y)$ es integrable]

A partir de lo anterior, se sigue que:

a) g es continua en A.

[$x \mapsto f(x,y)$; ~~para cada $x\in A$ y cada $y \in X$~~ - posee derivada parcial respecto a i y es continua] .

b) Si además que para cada $i \in \{1,\dots,N\}$ y cada $y \in X$, $\partial_i f(x,y)$ existe respecto a x_i y es continua como función de x y además $\partial_i f(x,\cdot) \in L^1(X)$, entonces g es continuamente diferenciable y

[$y \mapsto \partial_i f(x,y)$ es integrable]

$$\partial_i g(x) = \int_X \partial_i f(x,y)\,d\mu(y)$$

Demostración: Convergencia dominada.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(x) = \int_X \frac{\partial}{\partial x_i} f(x,y)\, d\mu(y)$$

Consideremos

$$f: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto v(x-y)\,u(y)$$

1) $\forall y \in \mathbb{R}^N$: $x \mapsto v(x-y)u(y)$ es continua pues v es continua.

2) $\forall x \in \mathbb{R}^N$: $y \mapsto u(x-y)v(y)$ es medible

composición de funciones continuas y por lo tanto medibles

Volviendo a la demostración anterior.

Hipótesis de inducción

Supongamos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $g \in C_c^m(\mathbb{R}^N)$
$$f * g \in C^m(\mathbb{R}^N)$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N,\ |\alpha| \leq m \qquad \partial^\alpha (f*g) = f * \partial^\alpha g$$

Sean $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $v \in C_c^{m+1}(\mathbb{R}^N)$

Observación. 1.34.

1) Si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces
$$u * v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$
y además
$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N \qquad \partial^\alpha (u*v) = u * \partial^\alpha v$$

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_c^m(\mathbb{R}^N)$$

2) Si $u \in C^m(\mathbb{R}^N)$ y $v \in C_c^m(\mathbb{R}^N)$, entonces
$$u * v \in C^{m+n}(\mathbb{R}^N)$$
y
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N \quad |\alpha| \leq m \ \text{ y } \ |\beta| \leq n$$
$$\partial^{\alpha+\beta}(u*v) = \partial^\alpha u * \partial^\beta v.$$

Viernes, 10 de mayo de 2024.

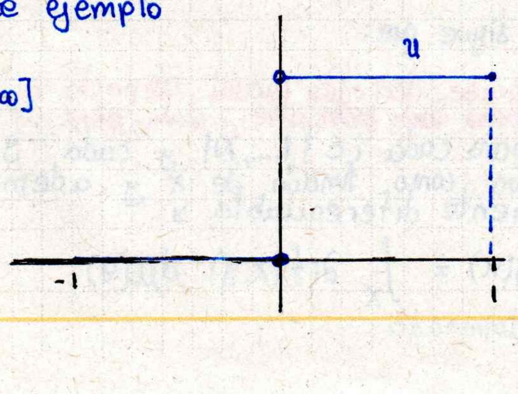
Consideremos el siguiente ejemplo

$u \in L^p(-1,1) \quad \forall p \in [1,+\infty]$

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$

$v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$\Rightarrow u * v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$



Sucesiones regularizantes

Se dice que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regularizante (mollifiers) si

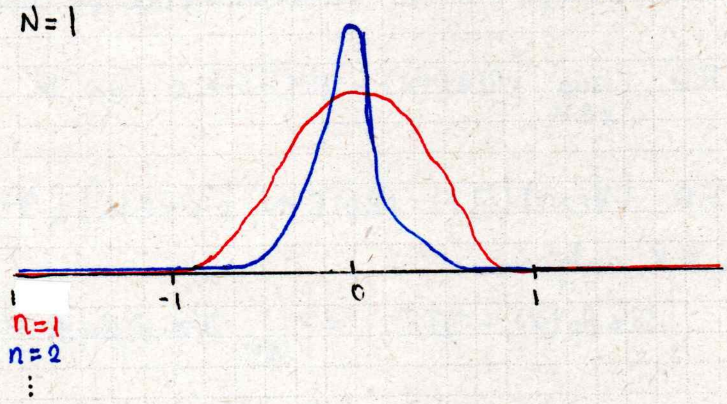
1) $\forall n\in\mathbb{N}\ : \rho_n : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

2) $\forall n\in\mathbb{N}\ : \rho_n \geqslant 0$

3) $\forall n\in\mathbb{N}\ : \rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

4) $\operatorname{supp}(\rho_n) \subseteq \overline{B}(0, 1/n)$

5) $\forall n\in\mathbb{N}\ : \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \, dx = 1$



Definamos

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x|<1 \\ 0 & |x|\geqslant 1 \end{cases}$$

entonces $\operatorname{supp}(\varphi) = [-1,1]$, $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y $H = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$

A partir de lo anterior, definamos

$$\forall x\in\mathbb{R}^N : \qquad \varphi_n(x) = \varphi_n(n\|x\|), \text{ entonces}$$

$$\varphi_n : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \rho_n(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{n^2\|x\|^2-1}} & n\|x\|<1 \\ 0 & n\|x\|\geqslant 1 \end{cases}$$

Consideremos las siguientes funciones

$$\varphi_n : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = n^2\|x\|^2 - 1 \qquad\qquad x \longmapsto g(x) = \begin{cases} e^{+\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

entonces $\rho_n = \rho\circ\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Además, notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n \, dx = M_n < +\infty.$$

de esta manera,

Ver Brezis Pág 108. $\quad \rho_n(x) = C\, n^N \varphi(n\|x\|) \quad$ con $\quad C = \dfrac{1}{H} = \dfrac{1}{\int \varphi\, dx}$

Teorema 1.35. Si $u\in C(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$u * \rho_n \longrightarrow u$$

uniformemente en compactos.

Demostración

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto.

P.D. $u * \rho_n \to u$ uniformemente en compactos.

P.D. $\sup_{x\in K} |u*\rho(x) - u(x)| \to 0$ en $\mathbb{R}$

P.D. $(\forall \varepsilon>0)(\exists N = N(\varepsilon)\in \mathbb{N})(\forall x\in K)(\forall n \geq N \Rightarrow |u*\rho_n(x) - u(x)| < \varepsilon)$

Sea $x\in K$, cualquiera

$$\begin{aligned}
|u*\rho_n(x) - u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)\rho_n(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\rho_n(y)\,dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} [u(x-y) - u(x)]\rho_n(y)\,dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y) - u(x)|\,\rho_n(y)\,dy \\
&\leq \int_{B(0,1/n)} |u(x-y) - u(x)|\,\rho_n(y)\,dy
\end{aligned}$$

En este punto, buscamos utilizar la continuidad uniforme

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon)>0)(\forall a,b\in C)\ (\|a-b\|<\delta \Rightarrow |u(a)-u(b)|<\varepsilon)$,

tomando

$$C = K - \overline{B}(0,1) \quad \text{pues} \quad \overline{B}(0,1/n) \subseteq \overline{B}(0,1)$$

Como u es continua en $\mathbb{R}^N$, entonces u es uniformemente continua en C y por lo tanto, satisface que

$(\forall a,b\in C)\ (\|a-b\|<\delta \Rightarrow |u(a)-u(b)|<\varepsilon)$,

de donde, $x-y\in C$, $x\in C$. Así, para

$(\forall x\in K)\ (\forall y\in \overline{B}(0,1))$

$$\|x-y-x\| < \delta \Rightarrow |u(x-y) - u(x)| < \varepsilon$$

Tomando $N = \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(\forall x\in K)(\forall n\in \mathbb{N})\ (n\geq N \Rightarrow |u*\rho_n(x) - u(x)| \leq \varepsilon \int_{\overline{B}(0,1/n)} \rho_n(y)\,dy = \varepsilon.$$

Teorema 1.36. Sea $u\in L^p(\mathbb{R}^N)$, con $p\in[1,+\infty[$, entonces

$$u*\rho_n \to u \text{ en } L^p$$

Demostración:

P.D. $\|u * \rho_n - u\|_{L^p} \to 0$

P.D. $\|u * \rho_n - u\|_{L^p}^p \to 0$

P.D. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u * \rho_n(x) - u(x)|^p \, dx$

Directamente, no podemos concluir de modo que planteamos la siguiente pregunta. ¿Existe $v \in C(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|u - v\|_{L^p} < \varepsilon$? No, pero sí conocemos que

$$\overline{C_c^0(\mathbb{R}^N)} = L^p(\mathbb{R}^N) \qquad 1 \leq p + \infty.$$

Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, entonces existe $v \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|u - v\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Por otro lado, $v * \rho_n \to v$ uniformemente en compactos

$$v * \rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

$$\|u * \rho_n - u\|_{L^p} \leq \|u * \rho_n - v * \rho_n\| + \|v * \rho_n - v\|_{L^p} + \|v - u\|_{L^p}$$

y como

$$\|u * \rho_n - v * \rho_n\|_{L^p} = \|(u - v) * \rho_n\|_{L^p} \leq \|u - v\|_{L^p} \|\rho_n\|_{L^1} = \|u - v\|_{L^p}$$

Como $\operatorname{supp}(v) + \bar{B}(0,1)$ es compacto, entonces

$$v * \rho_n \to v \quad \text{uniformemente sobre } \operatorname{supp}(v) + \bar{B}(0,1).$$

entonces

$$\sup_{x \in \operatorname{supp}(v) + \bar{B}(0,1)} |v * \rho_n - v| < \frac{\varepsilon}{3\lambda(\operatorname{supp}(v) + \bar{B}(0,1))^{1/p}}.$$

Martes, 14 de mayo de 2024.

Consideremos

$u \in C^0(\mathbb{R}^N)$ y $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$

y

$u \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ y $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$

$u * v$ 1. $\operatorname{supp}(u)$ 2. $\operatorname{supp}(v)$ compactos.

La convolución sigue existiendo pero las derivadas pueden no tener soporte compacto.

¿Qué sucede si cambiamos la propiedad del soporte compacto entre u y v?

Proposición 1.37. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y abierto

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{L^p} = L^p(\Omega)$$

Observación: Para el caso $p = +\infty$: Una constante no nula no puede ser aproximada por funciones C_c^∞.

Demostración

Sea $u \in L^p(\Omega)$, cualquiera.

P.D. $\left(\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión en } C_c^\infty(\Omega) \right) \; u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$.

$$u \in L^p(\Omega) \Rightarrow \tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$ extensión natural de u por cero fuera de Ω.

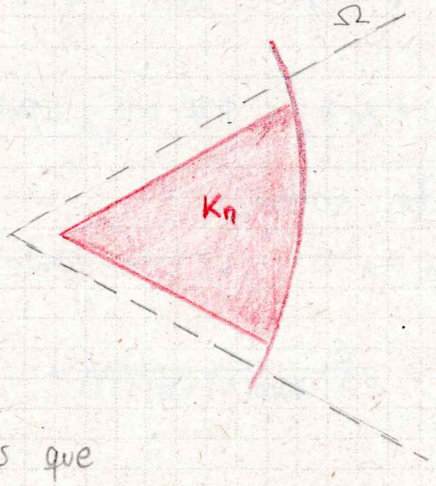
Note que $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pues

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^p dx = \int_{\Omega} |\tilde{u}|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} |\tilde{u}|^p dx$$

$$= \int_{\Omega} |u|^p dx$$

A partir de esto, podemos considerar $\tilde{u} * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, no obstante esta no es a soporte compacto.

Por lo tanto, vamos a construir funciones que poseen soportes compactos contenidas en Ω.



Definamos

$$K_n = \{ x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > 2/n, \; x \in \overline{B}(0,n) \}$$

Entonces, conjeturamos que

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n,$$

es claro que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq \Omega.$$

Probemos la otra contenencia.

Entonces: ‣ si $x = 0$, $x \in \overline{B}(0, m_x) \quad \therefore x \in K_{m_x}$

tomando $n_x := m_x \in \mathbb{N}$, se tiene lo requerido.

‣ si $x \neq 0$, entonces $\|x\| \neq 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $l_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x\|_{l_x}$$

tomando $n_x = \max\{m_x, l_x\}$, se tiene que

$$\|x\| < l_x \leq n_x \Rightarrow x \in \overline{B}(0, n_x)$$

$$m_x \leq n_x \iff \frac{2}{n_x} \leq \frac{2}{m_x} \Rightarrow \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > \frac{2}{m_x} \geq \frac{2}{n_x}$$

$$K_n = \{ x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq 2/n, \ \|x\| < n \}$$

Sea $z \in K_n + \overline{B}(0, 1/n)$. P.D. $z \in \Omega$.

Notemos que $z = x + y$, con $x \in K_n$, $y \in \overline{B}(0, 1/n)$

Sea $\omega \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, cualquiera.

$$\begin{aligned} \|z - \omega\| &= \|x + y - \omega\| \\ &\geq \|x - \omega\| - \|y\| \\ &\geq \frac{2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} > 0 \end{aligned}$$

Más aún, $\tilde{u}_n\big|_\Omega \in C_c^\infty(\Omega)$. Tomando, $u_n := \tilde{u}_n\big|_\Omega \in C_c^\infty(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega \left| \tilde{u}_n\big|_\Omega - u \right|^p dx \\ &= \int_\Omega \left| \tilde{u}_n - \tilde{u} \right|^p dx \end{aligned}$$

¿ $\tilde{u}_n = \tilde{v}_n * \rho_n \longrightarrow \tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$?

$u \in L^p(\mathbb{R}^N)$: $u * \rho_n \longrightarrow u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_n * \rho_n - \tilde{u}\|_{L^p} &= \|\tilde{v}_n * \rho_n + \tilde{u} * \rho_n - \tilde{u} * \rho_n - \tilde{u}\|_{L^p} \\ &\leq \|(\tilde{v}_n - \tilde{u}) * \rho_n\|_{L^p} + \|\tilde{u} * \rho_n - \tilde{u}\|_{L^p} < \varepsilon + \|\tilde{v}_n - \tilde{u}\|_{L^p} \end{aligned}$$

Así, como

$$\chi_{K_n}(x) \longrightarrow \chi_\Omega(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

$$\Rightarrow \tilde{u}(x)\chi_{K_n}(x) \longrightarrow \tilde{u}(x)\chi_\Omega(x)$$

entonces, utilizando el teorema de convergencia dominada versión L^p, se sigue el resultado.

Observaciones 1.38.

a) $u \in L^p(\Omega)$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{u}\chi_{K_n} * \rho_n\big|_\Omega \longrightarrow u \text{ en } L^p(\Omega) \qquad \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

b) $\Omega = \mathbb{R}^N$, $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$

$$u\chi_{K_n} * \rho_n \longrightarrow u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N) \qquad K_n = \overline{B}(0, n).$$

Además, se tiene que

1) $\forall n \in \mathbb{N} : K_n \subseteq \overline{B}(0,n)$ $\therefore$ K_n es acotado

2) $\forall n \in \mathbb{N}$: K_n es cerrado

Sean $x \in \Omega$ y $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sucesión en K_n con $x_m \to x$ P.D. $x \in K_n$.

$\forall m \in \mathbb{N} : \|x_m\| \leq n \Rightarrow \|x\| \leq n$

↑ Preservación de la desigualdad en el paso al límite.

P.D. $\inf\limits_{w \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega} \|x - w\| \geq \frac{2}{n}$ (Por caracterización de ínfimo)

Por otro lado, como

$$K_n = \overline{B}(0,n) \cap \varphi^{-1}\left([2/n, +\infty[\right)$$

y definiendo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \end{aligned}$$

entonces φ es continua y por lo tanto, K_n es compacto.

Jueves, 16 de mayo de 2024.

P.D $\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $C_c^\infty(\Omega)$ con $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ a $u \in L^p(\Omega)$.

Definamos

$$\begin{aligned} \tilde{u} : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \Omega \end{cases} \end{aligned}$$

entonces $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y más aún $\tilde{u} * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Y, por lo hecho previamente,

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

donde $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos compactos. Con esto, definimos

$$\tilde{v}_n = \tilde{u}\, \chi_{K_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \tilde{v}_n \in L^p(\mathbb{R}^N) \qquad \operatorname{supp}(\tilde{v}_n) \subseteq \underbrace{K_n}_{\text{compacto en } \mathbb{R}^N}$$

Definamos $\tilde{u}_n = \tilde{v}_n * \rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\operatorname{supp}(\tilde{u}_n)$ compacto, contenido en Ω

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\tilde{u}_n) &\subseteq \operatorname{supp}(\tilde{v}_n) + \operatorname{supp}(\rho_n) \\ &\subseteq K_n + \overline{B}(0, 1/n) \subsetneq \Omega. \end{aligned}$$

Proposición 1.39. (Lema fundamental del cálculo de variaciones)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y abierto, y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si

$$\int_\Omega u\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

entonces $u = 0$ ctp en Ω.

Demostración.

Basta probar que $u=0$ ctp en $K \subseteq \Omega$ $\forall K$ compacto.

Pues si lo anterior es cierto, entonces existe N_n tal que $\lambda(N_n) = 0$ y $u \neq 0$ en N_n, así,

$$u = 0 \quad \text{ctp en } \Omega$$

Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Basta probar que

$$\int_K |u| \, dx = 0 = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega u\varphi_n \, dx \quad \text{para } \varphi_n \in C_c^\infty(\Omega) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\int_K u \, \mathrm{sgn}(u) \, dx \qquad \mathrm{sgn}(u) \, \chi_K \in L^p(\Omega)$$

Por el teorema anterior, existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to \mathrm{sgn}(u)\chi_K$

P.D. $\int u\varphi_n \, dx \to \int_\Omega \mathrm{sgn}(u) \, u \, \chi_K \, dx$

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u\varphi_n \in L^1(\Omega)$ pues

$$\int_\Omega |u||\varphi_n| \, dx = \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} |u||\varphi_n| \, dx \leq \max_{x \in \Omega} |\varphi(x)| \int_{\mathrm{supp}(\varphi_n)} |u| \, dx < +\infty.$$

2) $u\varphi_n \to \mathrm{sgn}(u) \, u \, \chi_K$ ctp en Ω

$\varphi_n \to \mathrm{sgn}(u) \, \chi_K$ ctp en Ω

$$\mathrm{sgn}(u)\chi_K \in L^p(\mathbb{R}^N) \qquad \mathrm{sgn}(u(x)) \, \chi_K(x)$$

$$\mathrm{sgn}(f(x)) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$$

Definamos

$$v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto v(x) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(u(x)) \, \chi_K(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

$$v * \rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

$$\mathrm{sopp}(v * \rho_n) \subseteq \mathrm{supp}(v) + \mathrm{supp}(\rho_n)$$

$$\subseteq K + \overline{B}(0, 1/n) \subseteq \Omega$$

¿? Justificar apropiadamente.

Viernes, 17 de mayo de 2024.

$v_n \to v$ cuando $n \to +\infty$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$. Luego existe una subsucesión $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$v_{n_k}(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} v(x) \quad \text{ctp } x\in\mathbb{R}^N$$

$\forall k\in\mathbb{N}: u v_{n_k} \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

$$x\in\mathbb{R}^N: \quad |v_{n_k}(x)| = |v * \rho_{n_k}(x)| \leq \|v * \rho_{n_k}\|_{L^\infty}$$

$$\leq \|v\|_{L^\infty} \|\rho_{n_k}\|_{L^1} = \underbrace{\|v\|_{L^\infty} \chi_{K+\bar{B}(0,1/H)}} \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

$$\therefore |u v_{n_k}(x)| \leq \underbrace{u(x)\|v\|_{L^\infty} \chi_{K+\bar{B}(0,1/H)}(x)}_{g(x)}$$

Definamos $\varphi_k = v_{n_k}\big|_\Omega \in C_c^\infty(\Omega)$.

Por T.C.D.L.

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) v_{n_k}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} uv\,dx$$

Así,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega u\, v_{n_k}\big|_\Omega\,dx = \int_\Omega uv\big|_\Omega\,dx$$

$$0 = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega u\varphi_k\,dx = \int_\Omega u(x)\,\mathrm{sgn}(x)\,\chi_K(x)\,dx = \int_K |u|\,dx$$

Sección: Derivadas débiles de una función. (2)

Motivación: En $N=1$ $\quad f\in C^0((a,b))$

1) (PVF) $\begin{cases} -u'' = f & \text{en } (a,b) \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} u: [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$

es una solución clásica (PVF) si $u\in C^2([a,b])$ tal que

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x\in(a,b) \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases}$$

En análisis cualitativo (existencia y unicidad) del problema PVF, si $f\in C^0(\Omega)$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$, $N>1$, entonces, no necesariamente $u\in C^2(\Omega)$ tal que sea solución clásica de

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Para analizar la existencia de al menos una solución clásica de (P), se debe precisar el marco funcional donde se desea encontrar dichas soluciones

Si consideramos $C^2(\Omega)$ como marco funcional entonces no necesariamente existe una solución clásica (problema mal planteado)

* $C^2(\Omega)$ no es el marco funcional adecuado para analizar este problema.
  ↳ solución clásica.

* Cambiando el marco funcional a otros espacios funcionales que se puedan ver como una extensión de los espacios regulares $C^m(\Omega)$, podemos analizar la existencia de al menos una solución (concepto a precisar)

Observación 2.1. • Si $f \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ (espacio de las funciones Hölder continuas)
$\Rightarrow \exists u \in C^{2,\lambda}(\bar{\Omega})$ solución clásica de (P)

• (Integral de Riemann)
Existen funciones que no son Riemann integrables pero poseen integral en otro sentido, finita.

Martes, 21 de mayo de 2024.

Proposición 2.2. (Derivada débil)

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y abierto, y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se dice que u posee derivada débil en la i-ésima variable ($i \in \{1,\dots,N\}$) en Ω, si existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ y

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad (2.1)$$

A la función v se la conoce como una derivada débil de u en la i-ésima variable (con respecto a la i-ésima variable)

Proposición 2.3. Si u posee derivada débil en la i-ésima variable, entonces dicha derivada débil es única, salvo un conjunto de medida nula. (o conjunto despreciable)

Demostración

Sean v y ω derivadas débiles de u en la i-ésima variable

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v\varphi\, dx = -\int_\Omega \omega\varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\int_\Omega (v-\omega)\varphi\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$\therefore v = \omega$ ctp. en Ω (por el L.F.C.V)

Observaciones 2.4. 1) Notar que la existencia de la derivada débil no es en puntos del conjunto Ω (no es una definición puntual). En realidad, la derivada débil existe en Ω

La siguiente proposición es incorrecta:

$u \in C^1(\Omega)$
u es dif en $x \in \Omega$
$\Rightarrow u$ posee derivada débil en $x \in \Omega$ X

2) La hipótesis de que Ω es abierto se utiliza en el hecho de que consideramos las derivadas parciales clásicas de φ en Ω.

3) Note que si $u \in C^1(\Omega)$, entonces para cualquier $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$ ... consideremos el siguiente resultado.

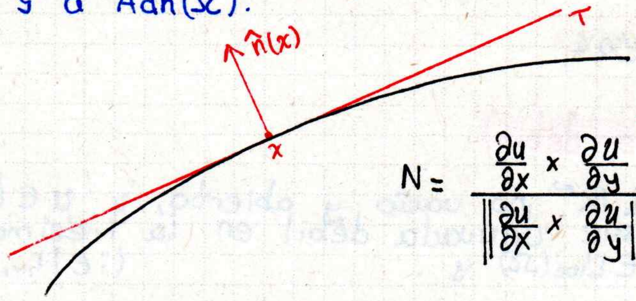
Teorema 2.5. (Integración por partes)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y de frontera regular. $f, g \in C^1(\bar{\Omega})$*

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} f g \, \eta_i \, ds(x) \qquad (2.2)$$

Ω posee frontera regular si existe una parametrización mediante funciones regulares de la frontera de Ω. En este caso se dice que Ω es regular si las funciones que parametrizan la frontera de Ω son de clase C^m, se dirá que Ω es de clase C^m.

En la integral sobre $\partial\Omega$, las funciones f y g deben entenderse como extensiones continuas de f y g a $Adh(\Omega)$.



$$N = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial u}{\partial y} \right\|}$$

Si Ω es de clase C^1, entonces

$$(\forall x \in \partial\Omega)\ (\exists\, \hat{n} = \hat{n}(x) \text{ vector normal unitario})$$

$$\hat{n} = \hat{n}(x) = \big(n_1(x), \dots, n_N(x) \big)$$

$u \in C^1(\Omega)$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, como $supp(\varphi)$ es compacto, podemos considerar $u \in C^1(\bar{B}(x_0, R))$, $\varphi \in C^1(\bar{B}(x_0, R))$

$$\int_{B(x_0,R)} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{B(x_0,R)} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx + \int_{\partial B(x_0,R)} u \cancel{\varphi}^{\,0} n_i \, ds(x)$$

$$\int_{B(x_0,R)} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{B(x_0,R)} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx$$

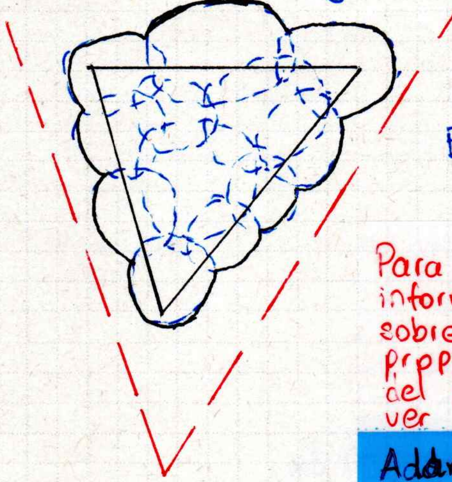
---

* Gracias al teorema de extensión continua existen $\tilde{f}, \tilde{g} : Adh(\Omega) \to \mathbb{R}$ extensiones continuas de f y g respectivamente. $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^1(Adh(\Omega))$

De donde, se deduce que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\, dx.$$

No obstante, note que la bola no siempre puede estar contenida en Ω. Consideremos el siguiente conjunto



Recordemos la definición de cono $C \subseteq E$, con E un espacio vectorial.

Entonces C es un cono si

$$\forall t \geq 0 \quad \forall x \in C \quad tx \in C$$

Para más información sobre la propiedad del cono ver

Adams Fournier Sobolev Spaces

Se pueden relajar las hipótesis a que Ω posea la propiedad del cono.

$$\int_{\partial\Omega} \underbrace{f}_{\in L^1} \underbrace{g}_{\in L^\infty} \eta_i \, dS(x).$$

Lo mínimo que necesitamos es Lipschitz pues

$$W^{1,\infty} \cong \text{Lipschitz}$$

Miércoles, 22 de mayo de 2024.

Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ posee derivada débil (de primer orden) en la i-ésima variable (en Ω) si existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$\forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega) : \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v \varphi\, dx$$

se puede relajar a $\forall \varphi \in C^1_c(\Omega)$.

$u = g$ sobre $\partial\Omega$

$u \in C^0(\text{Adh}(\Omega))$
$g \in C^0(\partial\Omega)$

$\forall x \in \partial\Omega$

$u(x) = g(x)$

Sentido clásico

Recapitulación (Integración por partes)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto acotado de clase C^1

$$\forall u, v \in C^1(\text{Adh}(\Omega)) \quad \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} u v \eta_i\, dx$$

$C^1(\overline{\Omega})$

Observación 2.6. Es posible relajar la hipótesis de acotamiento cuando una de las funciones posee soporte compacto en Ω

Observación 2.7. Supongamos que $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, i.e., $u \in C^1(\text{Adh}(\Omega))$ entonces

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\, dx$$

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ es la derivada débil (de primer orden) en la i-ésima variable en Ω.

Teorema 2.8 (Teorema de la divergencia) Sean $\vec{F}:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^N$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ abierto, no vacío acotado de clase C^1, $\vec{F}\in C^1(\bar{\Omega};\mathbb{R}^N)$

$$\int_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\,dx = \int_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\hat{n}\,dS(x). \tag{2.3}$$

Ejemplos:

1) Consideremos

$$u:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto u(x)=|x|$$

Notemos que $u\in L^1_{loc}(-1,1)$ pues $u\in C^0((-1,1))$.

Sea $\varphi\in C^\infty_c((-1,1))$, entonces

$$\int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^0(-x)\varphi'(x)\,dx + \int_0^1 x\varphi(x)\,dx$$

Notemos que no estamos dentro de las hipótesis del teorema de integración por partes es necesario extender continuamente u y extender continuamente con regularidad a $[-1,1]$.

$$\tilde{u}:[-1,1]\to\mathbb{R} \qquad\qquad \tilde{\varphi}:[-1,1]\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto\tilde{u}(x)=|x| \qquad\qquad x\mapsto\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi & \text{en } (-1,1)\\ 0 & \text{en } \{-1,1\}\end{cases}$$

con esto

$$\int_{-1}^1\tilde{u}(x)\tilde{\varphi}'(x)\,dx = \int_{-1}^1(-x)\tilde{\varphi}'(x)\,dx + \int_0^1 x\tilde{\varphi}'(x)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^0(-1)\tilde{\varphi}(x)\,dx + (-x)\tilde{\varphi}(x)\Big|_{-1}^0 - \int_0^1 1\,\tilde{\varphi}(x)\,dx + x\tilde{\varphi}(x)\Big|_0^1$$

$$= -\int_{-1}^1 v(x)\cdot\tilde{\varphi}(x)\,dx \qquad \text{donde } v(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } -1\leq x<0\\ 1 & \text{si } 0<x\leq 1\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

$$v:[-1,1]\to\mathbb{R}$$

$$\therefore \int_{-1}^1\tilde{u}(x)\tilde{\varphi}'(x)\,dx = -\int_{-1}^1 v(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx$$

$$\parallel$$

$$\int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)\,dx$$

$\therefore u$ posee derivada débil en $(-1,1)$.

Jueves, 23 de mayo de 2024.

Observación 2.9. Supongamos que $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ y sean $i\in\{1,\dots,N\}$.

Entonces si existe $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ la derivada débil, note que esta depende de i.

$$u : (-1,-1) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto u(x) = |x|$$

posee derivada débil

$$v = sgn(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$v \in L^1_{loc}(-1,1)$

- $u \in L^1_{loc}(-1,1)$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$

$$\int_{-1}^{1} u\varphi' \, dx = \int_{-1}^{0} (-x)\varphi' \, dx + \int_0^1 x\varphi' dx$$
$$= -\int_{-1}^{0} -\varphi' dx + (-x)\varphi\Big|_{-1}^{0} - \int_0^1 \varphi' dx + x\varphi\Big|_0^1$$
$$= \int_{-1}^{1} v\varphi \, dx$$

Ejemplo 2:

$$v : (-1,1) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto v(x) = sgn(x)$$

Notemos que $v \in L_{loc}((-1,1))$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$

$$\int_{-1}^{1} v\varphi' \, dx = \int_{-1}^{0} -\varphi' dx + \int_0^1 \varphi' dx$$
$$= -(\varphi(0) - \varphi(-1)) + (\varphi(1) - \varphi(0))$$
$$= -2\varphi(0).$$

Nos realizamos la siguiente pregunta:

¿Existe $h \in L_{loc}(-1,1)$ tal que $\varphi(0) = \int_{-1}^{1} h\varphi \, dx$?

Desde el punto de vista de ingeniería, sí, tomando $h = \delta_0$

¿$h = \delta_0 \in L^1_{loc}(-1,1)$?

$$\varphi(0) = \delta_0(\varphi) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(-1,1)$$

$$\delta_0 : C_c^\infty(-1,1) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \mapsto \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

$$\delta_0 \in (C_c^\infty(-1,1))^* = D'(-1,1)$$

$\hookrightarrow$ distribución.

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} h \varphi \, dx, \quad h \in L^1_{loc}(-1,1)$$

δ_0 posee una representación integral (distribución regular)

En realidad, δ_0 no es una distribución regular.

Demostración:

¡Supongamos que sí es cierto!

Consideremos la familia de funciones $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2-\varepsilon^2}} & |x|<\varepsilon \\ 0 & |x|\geq \varepsilon \end{cases}$$

Así, $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ concentra su valor en $x=0$ (concentra su masa en $x=0$)

Luego, $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, con $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$: \int_{\mathbb{R}} v \varphi_\varepsilon \, dx = \frac{1}{e}$$

Pues estamos suponiendo que

$$\int_{\mathbb{R}} v \varphi_\varepsilon \, dx = \varphi_\varepsilon(0).$$

Por otro lado, note que

$$\int_{\mathbb{R}} v \varphi_\varepsilon \, dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v \, e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2-\varepsilon^2}} dx$$

$$\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v| \, e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2-\varepsilon^2}}$$

$$\leq \frac{1}{e} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v| \, dx$$

Así, como

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v| \, dx = \int_{\mathbb{R}} |v| \, \chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(x) \, dx$$

Definamos

$$f_\varepsilon(x) = |v|(x) \, \chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(x) \qquad 0<\varepsilon<1$$

$$f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}) \qquad f_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0 \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$|f_\varepsilon(x)| \leq \underbrace{|v|(x) \, \chi_{[-1,1]}}_{\in L^1_{loc}(\mathbb{R})}$$

Así, aplicando el TCDL, se sigue que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v| \, dx = 0.$$

Pero, junto con lo anterior, nos permite concluir que $0 = 1/e$, lo cual no es posible.

Ejemplo 3

Considere una función u de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ la cual es continuamente diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ con x_0 un punto de discontinuidad de salto.

Además, la derivada de u posee una discontinuidad de salto en x_0, denotado por $[u](x_0)$ o $j_u(x_0)$, como

$$j_u(x_0) = u(x_0^+) - u(x_0^-)$$

- $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
- Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi' \, dx = \int_{-\infty}^{x_0} u\varphi' \, dx + \int_{x_0}^{+\infty} u$$

$$= -\int_{-\infty}^{x_0} u'\varphi \, dx + u\varphi(x_0^-) - \lim_{b \to +\infty} u(b)\varphi(b) - \int_{x_0}^{+\infty} u'\varphi \, dx + \lim_{a \to +\infty} u\varphi(a)$$

$$- u\varphi(x_0^+)$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} u'\varphi \, dx + j_u(x_0)\varphi(x_0)$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} u'\varphi \, dx + j_u(x_0) \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

$$\therefore \int_{\mathbb{R}} u\varphi' \, dx = -\int_{\mathbb{R}} u'\varphi \, dx + j_u(x_0) \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

Justifiquemos rigurosamente

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}} u\varphi' \, dx = \int_{-\infty}^{x_0 - \frac{1}{n}} u\varphi' \, dx + \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} u\varphi' \, dx + \int_{x_0 + \frac{1}{n}}^{+\infty} u\varphi' \, dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{x_0 - \frac{1}{n}} u'\varphi \, dx + u\varphi\left(x_0 - \tfrac{1}{n}\right) - \lim_{b \to -\infty} u\varphi(b)$$

$$- \int_{x_0 + \frac{1}{n}}^{+\infty} u'\varphi \, dx + \lim_{a \to +\infty} u\varphi(a) - u\varphi\left(x_0 + \tfrac{1}{n}\right) + \underbrace{\cancel{\int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} u'\varphi \, dx}}_{\to 0 \text{ por TCDL}}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} -\int_{-\infty}^{x_0} u'\varphi \, dx + u\varphi(x_0^-) - \int_{x_0}^{+\infty} u'\varphi \, dx - u(x_0^+) + \lim_{n \to +\infty} \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} u'\varphi \, dx$$

Usando TCDL

$$\therefore \int_{\mathbb{R}} u\varphi'\,dx = -\int_{\mathbb{R}} u'\varphi\,dx + j_u(x_0)\,\varphi(x_0) + \lim_{n\to+\infty}\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} u'\varphi\,dx$$

Miércoles, 29 de mayo de 2024

Recapitulación.

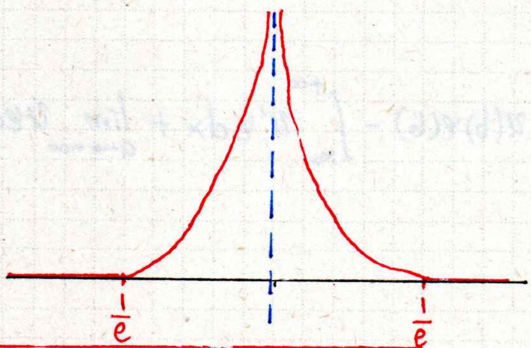
Hasta ahora, hemos visto los siguientes ejemplos:

1) Función que no es diferenciable pero sí posee derivada débil (acotadas)
2) Funciones localmente integrables que no posean derivadas débiles
   (masas de Dirac)
   (funciones acotadas) → puntos de discontinuidad de salto.

3) Consideremos

$$u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto u(x,y) = \begin{cases} \ln\left|\ln\left(\|(x,y)\|_2\right)\right| & (x,y)\in B_2\left(0,\frac{1}{e}\right)\setminus\{0\} \\ 0 & (x,y)\notin B_2\left(0,\frac{1}{e}\right)\setminus\{0\} \end{cases}$$



Para saber si esta función está en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$

Sabemos que

- $C_c^\infty(\Omega) \subsetneq L^1_{loc}(\Omega) \qquad C_c^k(\Omega) \subsetneq L^1_{loc}(\Omega)$

$p\in[1,+\infty] \qquad L^p(\Omega) \subsetneq L^1_{loc}(\Omega)$

Note que en general,
$L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$
no es cierto.

P.D. $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

P.D. $\int_{\mathbb{R}^2} |u(x,y)|^2\,d(x,y) < +\infty$.

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x,y)|^2\,d(x,y) = \int_{B_2(0,e^{-1})} \left(\ln\left|\ln\left(\|(x,y)\|_2\right)\right|\right)^2 d(x,y)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{e}} \left(\ln|\ln r|\right)^2 r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{1}{e}} \left(\ln|\ln r|\right)^2 r\,dr$$

Ahora, notemos que

$$0 < r < e^{-1} \Rightarrow \ln(r) < -\ln(e) = -1$$ pues $\ln(x) < x \quad \forall x > 1$

$$|\ln r| = -\ln(r) = \ln\left(\frac{1}{r}\right) < \frac{1}{r}$$ $\frac{1}{r} > e > 1$

Para todo $0 < r < \frac{1}{e}$, $0 < \ln\left(\frac{1}{r}\right) = |\ln r| < \frac{1}{r}$, con lo cual

$$\ln|\ln r| < \ln\left(\frac{1}{r}\right) = -\ln(r)$$

$$\Rightarrow \left(\ln|\ln r|\right)^2 < (\ln(r))^2$$

Con lo cual, se tiene la siguiente estimación

$$2\pi \int_0^{\frac{1}{e}} \left(\ln|\ln r|\right)^2 r\,dr \leq 2\pi \int_0^{\frac{1}{e}} (\ln(r))^2 r\,dr$$

luego, calculando la integral por partes

$$2\pi \int_0^{\frac{1}{e}} (\ln(r))^2 r\,dr = (\ln r)^2 \frac{r^2}{2} - \int \frac{r^2}{2} 2 \ln(r) \cdot \frac{1}{r}\,dr$$

$$= (\ln r)^2 \frac{r^2}{2} - \int \ln(r)\, r\,dr < +\infty$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, cualquiera

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\, d(x,y) = \int_{B(0,\frac{1}{e})} \ln\left|\ln \|(x,y)\|_2\right| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\, d(x,y)$$

Debido a que u posee derivadas parciales respecto a x e y, entonces estas servirán como candidatas a derivadas débiles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{|\ln \|(x,y)\||} \frac{\partial}{\partial x}\left(|\ln \|(x,y)\||\right)$$

$$= |\ln \|(x,y)\||^{-1} \operatorname{sign}\left(\ln \|(x,y)\|\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln \|(x,y)\|\right)$$

$$= |\ln \|(x,y)\||^{-1} \operatorname{sign}\left(\ln \|(x,y)\|\right) \frac{1}{\|(x,y)\|} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \|(x,y)\|$$

$$= |\ln \|(x,y)\||^{-1} \operatorname{sign}\left(\ln \|(x,y)\|\right) \frac{1}{\|(x,y)\|} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$= |\ln \|(x,y)\||^{-1} \|(x,y)\|^{-1} \frac{x}{\|(x,y)\|}$$

$$= |\ln \|(x,y)\||^{-1} \|(x,y)\|^{-2} \cdot x$$

$$= \left(\ln \|(x,y)\|\right)\left(\|(x,y)\|^{-2}\right) x$$

Entonces los candidatos a derivada débil son

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(r)\, r^2} & \text{si } 0<r<e^{-1} \\ 0 & \text{si } r \geq e^{-1} \end{cases}$$

análogamente para la derivada parcial respecto a y.

Jueves, 30 de mayo de 2024.

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto u(x,y) \begin{cases} \ln|\ln r| & 0<r<e^{-1} \\ 0 & r \geq e^{-1} \quad r=0 \end{cases}$$

Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\mathbb{R}^2$ $\quad$ u, φ poseen derivadas clásicas parciales

$r = \|(x,y)\|_2$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d(x,y) = \int_{R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<r<e^{-1}\}} u \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d(x,y)$$

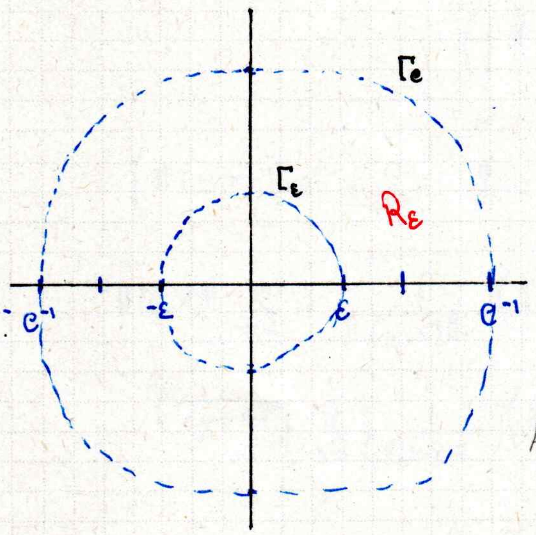
* No es posible hacer uso del teorema de la divergencia de Gauss

$$= \int_R \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)\, d(x,y) - \int_R \frac{\partial u}{\partial x} \varphi\, d(x,y)$$

Para $\varepsilon>0$ arbitrario pero fijo

$$R_\varepsilon := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \varepsilon < r < e^{-1}\},$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{R_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)\, d(x,y) - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi\, d(x,y)$$



$$\int_{R_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)\, d(x,y) = \int_{\partial R_\varepsilon} u\varphi n_x\, d\sigma(x,y)$$

$$= \int_{\Gamma_\varepsilon} u\varphi n_x\, d\sigma(x,y)$$

$$= \int_{\Gamma_\varepsilon} \ln|\ln(\varepsilon)|\, \varphi\, n_x\, d(x,y)$$

Ahora,

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \ln|\ln(\varepsilon)|\, \varphi n_x\, d\sigma(x,y) \right| \leq \int_{\Gamma_\varepsilon} \ln|\ln\varepsilon|\, |\varphi|\, d\sigma(x,y)$$

$$\leq \ln|\ln\varepsilon|\, \|\varphi\|_{\infty, \bar{B}(0,e^{-1})}\, \sigma(\Gamma_\varepsilon)$$

con $M = \max_{(x,y)\in\bar{B}(0,e^{-1})} |\varphi(x,y)|$ $\quad = 2\pi\varepsilon \ln|\ln\varepsilon|\, M < 2\pi\varepsilon|\ln\varepsilon|\, M$

Por lo tanto, se sigue que $\ln(x) \leq x-1 \leq x$

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, d(x,y) = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi \, d(x,y)$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x} \in L_{loc}(\mathbb{R}^2)$, entonces u posee derivadas débiles respecto a x y análogamente, respecto a y.

Observación.

1) Las funciones con discontinuidad de salto no poseen derivadas débiles.
2) Las funciones con discontinuidad esencial pueden o no pueden poseer derivada débil
3) Las funciones con discontinuidad removible (las funciones continuas) pueden o no pueden poseer derivada débil. Ej. Función de Weierstrass.
4) Existen funciones acotadas que no poseen derivadas débiles.

Para la existencia y que coincidan las derivadas débiles con clásicas necesitamos verificar las hipótesis del teorema de integración por partes.

Sección: Derivadas débiles de orden superior.

Definición: Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ y $u \in L_{loc}(\Omega)$

Se dice que u posee derivada débil α-ésima en Ω si existe $v \in L_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega u \, \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, dx$$

En este caso, v se denomina como derivada débil α-ésima de u en Ω. y se denotará por $v = \partial^\alpha u$.

1) Caso $N=2$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$, $|\alpha| = 2$ $\quad \vec{x} = (x,y)$

$$\int_\Omega u \, \partial^\alpha \varphi \, d\vec{x} = \begin{cases} \int_\Omega u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \, d\vec{x} \\ \int_\Omega u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \, d\vec{x} \\ \int_\Omega u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \, d\vec{x} \end{cases}$$

Teorema de Scharwz

2) Si Ω es suficientemente regular y $u \in C^k(\overline{\Omega})$, entonces u posee todas sus derivadas α-ésima hasta el orden k

¿ $u \in C^k(\overline{\Omega}) \Rightarrow u$ posee derivada débil de orden $k+1$?

Función C^1 pero no C^2

$$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto u(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

u) Notar que para que una función posea derivadas débiles α-ésima en Ω no es necesario que posean derivadas débiles de orden menor

Proposición: La derivada débil α-ésima de una función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es única salvo una redefinición de la función en un conjunto despreciable o de medida nula.

Proposición: Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y abierto, $u_1, u_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$. Si u_1 y u_2 poseen derivadas débiles α-ésimas en Ω, entonces

$cu_1 + u_2$ posee derivada débil α-ésima en Ω.

En este caso, se cumple que

$$\partial^\alpha(cu_1 + u_2) = c\,\partial^\alpha u_1 + \partial^\alpha u_2$$

Sea $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, definimos

$$\underset{\text{weak}}{W_\alpha} := \{u \in L^1_{loc}(\Omega) : \ u \text{ posee derivada débil } \alpha\text{-ésima en } \Omega\}$$

$W_\alpha(\Omega)$ es un s.e.v. de $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definamos

$$\partial^\alpha : W_\alpha(\Omega) \longrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$$
$$u \longmapsto \partial^\alpha u$$

∂^α es un operador lineal.

¿∂^α es un operador continuo?

Consideremos la siguiente topología en $L^1_{loc}(\Omega)$

$u_n \to u$ en $L^1_{loc}(\Omega) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall K \Subset \Omega : u_n \to u$ en $L^1(K)$.

Martes, 4 de junio de 2024.

Recordemos que se definió

$$\partial^\alpha : W_\alpha(\Omega) \longrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$$
$$u \longmapsto \partial^\alpha u$$

entonces

- ∂^α es lineal
- ∂^α no es continuo

Pues si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $W_\alpha(\Omega)$, con $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \text{ en } L^1_{loc}(\Omega)$$

esto no necesariamente implica que $u\in W_\alpha(\Omega)$

Propiedad ∂^α es un operador Γ-cerrado:

Notemos que Γ-cerrado por definición es:

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $W_\alpha(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \text{ en } L^1_{loc}(\Omega) \quad \text{y} \quad \partial^\alpha u_n \to v \text{ en } L^1_{loc}(\Omega)$$

entonces

$$u\in W_\alpha(\Omega) \quad \text{y} \quad \partial^\alpha u = v.$$

Demostración

P.D. $(\forall \varphi\in C_c^\infty(\Omega))\ \int_\Omega u\,\partial^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\,dx$

Sea $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$, cualquiera.

$$u_n\to u \text{ en } L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega u_n\,\partial^\alpha\varphi\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega u\,\partial^\alpha\varphi\,dx \qquad [1]$$

En efecto,

$$\int_\Omega |u_n-u||\partial^\alpha\varphi|\,dx = \int_{supp(\varphi)} |u_n-u||\partial^\alpha\varphi|\,dx \leq M_\varphi \|u_n-u\|_{L^1(supp(\varphi))} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

$$\partial^\alpha u_n \to v \text{ en } L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega (\partial^\alpha u_n)\varphi\,dx \to \int_\Omega v\varphi\,dx \qquad [2]$$

Así, para cualquier $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_\Omega u\,\partial^\alpha\varphi\,dx \xleftarrow[{[1]}]{} \int_\Omega u_n\,\partial^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \partial^\alpha u_n\,\varphi\,dx \xrightarrow[{[2]}]{} (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\,dx$$

Por unicidad del límite

$$\int_\Omega u\,\partial^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\,dx$$

Observación: Si ahora consideramos el espacio de las distribuciones $D'(\Omega)$, y

$$\partial^\alpha: D'(\Omega)\longrightarrow D'(\Omega)$$

entonces este es continuo (en la topología natural sobre $D(\Omega)$)

Proposición Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ no vacío y abierto. Si u posee derivada débil α-ésima, para algún, $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$, entonces u posee derivada débil α-ésima en cualquier $\omega\subseteq\Omega$ abierto no vacío.

Demostración:

Sea $\omega \subseteq \Omega$ no vacío y abierto.

P.D. $\forall \Psi \in C_c^\infty(\omega)$: $\displaystyle\int_\omega u\, \partial^\alpha \Psi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\omega \partial^\alpha u\, \Psi\, dx$

Sea $\Psi \in C_c^\infty(\omega) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\omega u\,\partial^\alpha \Psi\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_\Omega u\,\partial^\alpha\Psi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \partial^\alpha u\, \Psi\, dx \underset{\uparrow}{=} (-1)^{|\alpha|}\int_\omega \partial^\alpha u\, \Psi\, dx$$

Pues $\operatorname{supp}(\Psi) \subsetneq \omega \subseteq \Omega$.

Proposición - Conmutatividad de las derivadas débiles-

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y abierto, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $k \in \mathbb{N}$.
Si $u \in W_\lambda(\Omega)$, para todo $\lambda \in \mathbb{N}_0^n$, $|\lambda| \leq k$, entonces para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| + |\beta| \leq k$

$$\partial^\alpha(\partial^\beta u) = \partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^{\alpha+\beta} u.$$

Demostración:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

Sea $u \in W_\lambda(\Omega)$, entonces, $\forall \lambda \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\lambda| \leq k$

[*]

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega u\, \partial^\lambda \varphi\, dx = (-1)^{|\lambda|}\int_\Omega \partial^\lambda u\, \varphi\, dx$$

Definamos $\gamma := \alpha + \beta \in \mathbb{N}_0^n$ $\quad |\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leq k$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega u\, \partial^\gamma \varphi\, dx = (-1)^{|\gamma|}\int_\Omega \partial^\gamma u\, \varphi\, dx$$

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \partial^\alpha u\, \partial^\beta \varphi\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_\Omega u\, \underbrace{\partial^{\alpha+\beta}\varphi}_{\partial^\alpha\partial^\beta\varphi}\, dx = \underbrace{(-1)^{|\alpha|+|\beta|}}_{(-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\beta|}}\int_\Omega \partial^{\alpha+\beta} u\, \varphi\, dx$$

Por [*] con $\lambda = \alpha$

Conmutatividad derivadas clásicas

Simplificando las expresiones,

$$\int_\Omega \partial^\alpha u\, \partial^\beta \varphi\, dx = (-1)^{|\beta|}\int_\Omega \partial^{\alpha+\beta} u\, \varphi\, dx$$

Por lo tanto, se sigue que

$\therefore$ $\partial^\alpha u$ posee derivada débil β-ésima.

Más aún,

$$\partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^{\alpha+\beta} u.$$

Análogamente a lo anterior, considerando $\partial^\alpha(\partial^\beta \varphi) = \partial^\beta(\partial^\alpha \varphi)$, se concluye que $\partial^\beta u$ posee derivada débil α-ésima, más aún

$$\partial^\alpha(\partial^\beta u) = \partial^{\alpha+\beta} u$$

Observación: Basta que

$$u \in W_\alpha, \quad u \in W_\beta \quad y \quad u \in W_{\alpha+\beta}$$

para que se tenga el mismo resultado.

Sección: Espacios de Sobolev.

Motivación: Consideremos el siguiente problema a valores en la frontera unidimensional:

$$(P) \quad \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) & = f(x) \\ u(a) = u(b) & = 0 \end{cases}$$

Si $c, f \in C^0([a,b])$, entonces $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice solución clásica de (P) si $u \in C^2([a,b])$ y

$$\forall x \in (a,b) : \quad u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$$
$$u(a) = u(b) = 0.$$

¿Qué operador diferencial tiene asociado el problema (P)?

$$L : F \cap C^2([a,b]) \to C^0([a,b])$$
$$u \mapsto -u'' + cu$$

Definamos:

$$V = \{ u \in C^2([a,b]) : u(a) = u(b) = 0 \}$$
$$= \underbrace{\{ u \in C^0([a,b]) : u(a) = u(b) = 0 \}} \cap C^2([a,b])$$

Afirmación: Dados c, f continuas en $[a,b]$ y $u \in \mathrm{Dom}(L)$

$$\begin{cases} Lu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \iff \int_a^b u'v'\,dx + \int_a^b cuv\,dx = \int_a^b fv\,dx \qquad \forall v \in F.$$

$\Rightarrow$] Supongamos que $u \in \mathrm{Dom}(L)$ satisface

$$\begin{cases} Lu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Sea $v \in F$.

$\forall\, x \in (a,b) \quad : \quad -u''(x)v(x) + c(x)u(x)v(x) = f(x)v(x)$

Integrando sobre $[a,b]$: Todos los términos son funciones continuas en $[a,b]$.

$$\int_a^b -u''(x)v(x)\,dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)\,dx + \int_a^b f(x)v(x)\,dx$$

$$\int_a^b u'v'\,dx = -\int_a^b u''v\,dx + u'v\Big|_a^b$$

Gracias a lo cual

$$\int_a^b u'v'\,dx - u'v\Big|_a^b + \int_a^b cuv\,dx = \int_a^b fv\,dx \qquad \forall v \in F$$

$$\therefore \int_a^b u'v'\,dx + \int_a^b cuv\,dx = \int_a^b fv\,dx$$

Miércoles, 5 de junio de 2024.

Recapitulación $\quad u \in \mathrm{Dom}(L) = F \cap C^2([a,b])$

$$\begin{cases} Lu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \iff \forall v \in F,\ \int_a^b u'v'\,dx + \int_a^b cuv\,dx = \int_a^b fv\,dx \qquad \text{[FI]}$$

↑ Valor prescrito (dado, se impone una restricción)

$\Rightarrow$] Probado en la clase anterior.

$\Leftarrow$] Supongamos [FI] cierto.

- Recuperación de la ED (Ecuación diferencial en todo el intervalo (a,b)).

$v \in F \subseteq C^1([a,b])$, $\quad u \in \mathrm{Dom}(L) \subseteq C^2([a,b])$

$$-\int_a^b u''v\,dx + u'v\Big|_a^b + \int_a^b cuv\,dx = \int_a^b fv\,dx$$

$$\int_a^b (-u'' + cu - f)v\,dx = 0 \qquad \forall v \in F$$

$$\Rightarrow \int_a^b (-u'' + cu - f)\varphi\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

En particular, se tiene esto.

Por el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones.

$$Lu = f \quad \text{ctp en } (a,b) \qquad Lu \in C^0([a,b]) \qquad \text{[A]}$$

Supongamos que

$$N = \{x \in (a,b) : Lu(x) \neq f(x)\} \neq \emptyset$$

entonces, por continuidad, se tiene que

$$\exists\, U_{x_0} \subseteq (a,b) \quad \text{tq} \quad \forall x \in U_{x_0} \quad Lu(x_0) - f(x_0) > 0.$$

lo que contradice [A]. así la igualdad obtenida es en todo punto.

Observaciones:

1) Notar que para recuperar la ED, se necesita que u sea regular y f continua.

2) Notar que para que la formulación integral tenga sentido (las integrales sean finitas) basta que

- $u'v' \in L^1(a,b)$, i.e., $u' \in L^p(a,b)$, $v' \in L^q(a,b)$ $\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$
- $cuv \in L^1(a,b)$, i.e, $c \in L^{p_1}(a,b)$, $u \in L^{p_2}(a,b)$, $v \in L^{p_3}(a,b)$ $\quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=1.$
- $fv \in L^1(a,b)$, i.e., $f \in L^r(a,b)$ $v \in L^s(a,b)$ $\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$

Consideremos el siguiente análisis

$$V := \{ u:(a,b) \to \mathbb{R} \ / \ u' \in L^p(a,b) \text{ y } u \in L^{p_2}(a,b) \}$$

$$W := \{ v:(a,b) \to \mathbb{R} \ / \ v' \in L^q \text{ y } v \in L^{p_3}(a,b) \cap L^{s}(a,b) \}$$

Problema: Dado $f \in L^r(a,b)$, $c \in L^{p_1}(a,b)$, «existe» $u \in V$ tal que
$\forall v \in W$:
$$\int_a^b u'v'\,dx + \int_a^b cuv\,dx = \int_a^b fv\,dx$$
donde $p, q, r, s, p_1, p_2, p_3 \in [1,+\infty]$ tales que
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \qquad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1, \qquad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=1.$$

Este problema corresponde a un debilitamiento del problema diferencial

Definamos el operador $T: V \longrightarrow W^*$
$$u \longmapsto F \qquad Tu = F$$
con
$$F(v) = \int_a^b fv\,dx \qquad \langle Tu, v\rangle = \int_a^b u'v'\,dx + \int_a^b cuv\,dx$$

Entonces, si suponemos que $p > p_2$, podemos considerar
$$V = \{ u:(a,b) \to \mathbb{R} \ / \ u \in L^{p_2}(a,b) \wedge u' \in L^{p_2}(a,b) \}$$
análogamente
$$W = \{ u:(a,b) \to \mathbb{R} \ / \ u \in L^{p_3},\ u' \in L^{p_3} \} =: W^{1,p_3}$$ ← Espacio de Sobolev.

Jueves, 6 de junio de 2024.

Espacios de Sovolev.

Pues se requiere para la derivada débil.

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y abierto, $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1,+\infty]$

$$W^{m,p}(\Omega) := \{ u:\Omega \to \mathbb{R} \ / \ u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \}.$$

m: índice de regularidad.

p: índice de integrabilidad.

$u \in W^{m,p}(\Omega)$: funciones de Sovolev. (en Ω).

* $W^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $L^p(\Omega)$.
  ↳ Las funciones en $L^p(\Omega)$ que poseen derivadas débiles en $L^p(\Omega)$.
  • Pues $0 \in W^{m,p}(\Omega)$, ∂^α es lineal.

* $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio normado equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

↑ Pues es el supremo de un número finito de normas.

• Además, se definen los espacios de Sobolev locales.

$$W^{m,p}_{loc}(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ \forall \omega \subset\subset \Omega \text{ abierto } u \in W^{m,p}(\omega) \}$$ [1]

* $W^{m,p}_{loc}(\Omega)$ s.e.v. $L^p_{loc}(\Omega)$.
* $W^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}_{loc}(\Omega)$.

Observaciones:

1) Las funciones de Sobolev son clases de equivalencia respecto a la relación igualdad ctp en Ω.
2) Los espacios de Sobolev pueden ser dotados de distintas normas equivalentes:

• $1 \leq p < +\infty$: $\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$

• $p = +\infty$ $\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

La equivalencia se deduce de manera similar a lo hecho en espacios normados de dimensión finita.

Además, $W^{m,p}(\Omega)$ puede estar dotado de cualquier otra norma equivalente que surge de la equivalencia de normas en espacios de dimensión finita.

Un caso particular de relevancia es cuando $m = 1$.

• $1 \leq p < +\infty$ $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$

---

1 Compactamente contenido en Ω si

$$\underset{\text{abierto}}{\omega} \subsetneq \underset{\text{compacto}}{\overline{\omega}} \subsetneq \underset{\text{abierto}}{\Omega}$$

$$= \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|^p_{L^p} + \dots + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|^p_{L^p} \right)^{1/p}$$

$$\approx \|u\|_{L^p} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p} + \dots + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^p}$$

- $p = +\infty$.

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max \left\{ \|u\|_{L^\infty}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty}, \dots, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^\infty} \right\}$$

$$\approx \|u\|_{L^\infty} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty} + \dots + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^\infty}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ en Ω tiene un uso, no local o no puntual

Es útil en integrales

> $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in \prod_{i=1}^{N} L^p(\Omega)$$

$$x \in \Omega : \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) \right)}_{Du(x)} \in \mathbb{R}^N$$

No tiene sentido evaluar en puntos las funciones en L^p.

$Du \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$

↳ Funciones p-integrables a valores vectoriales.

↑ Clase de equivalencia. (Gradiente débil)

- $1 \leq p < +\infty$

> $\left(\|u\|^p_{L^p} + \|Du\|^p \right)^{1/p}$ donde $\|Du\| = \left(\int_\Omega |Du(x)|^p \right)^{1/p}$

↑ norma euclideana

> $\|u\|_{L^p} + \|Du\|$

$p = +\infty \qquad \max \{ \|u\|, \|Du\| \}$.

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : Du \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N) \}$$

↑ Gradiente débil.

$$W^{2,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : Du \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N), \underbrace{D^2}_{\text{Hessiana.}} u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \}$$

Planteado de manera recursiva

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : \forall i \in \{1,\dots,N\} \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \}$$

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$$

Otra notación alternativa

$$W^{2,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : Du = \nabla u \in L^p(\Omega) \}.$$

Estructura de espacio prehilbertiano de las espacios de Sobolev.

$p=2$: $W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio prehilbertiano con producto escalar.

$$\langle u, v \rangle_{W^{m,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

- Si $m=1$,

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle Du, Dv \rangle_{L^2(v)}$$
$$= \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle$$

Notación:

$$W^{m,2}(\Omega) =: H^m(\Omega)$$

Espacios de sobolev consideran las funciones tales que al menos posean todas las derivadas de primer orden.

Ejemplos:

1) $u : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \ln|\ln r| & 0 < r < e^{-1} \\ 0 & r \geq e \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

$u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ $\qquad u \in H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

Proposición. $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| \partial^\alpha u \|_{L^p}^p \right)^p & 1 \leq p < +\infty \\ \max_{|\alpha| \leq m} \| \partial^\alpha u \|_{L^\infty} & p = +\infty \end{cases}$$

o con cualquier norma equivalente. Note que

$(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ no es un espacio de Banach,

pues $W^{m,p}(\Omega)$ no es cerrado con $\|\cdot\|_{L^p}$.

Además, $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, pues el producto escalar induce la norma en $W^{m,2}(\Omega)$.

Demostración:

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega)$.

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N})\left(\forall\, l,k\in\mathbb{N} \quad l,k\geq N_\varepsilon \quad \|u_l-u_k\|_{W^{m,p}(\Omega)}<\varepsilon\right)$$

- $1\leq p<+\infty$

$$\|u_l-u_k\|_{L^p}+\sum_{1\leq|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha u_l-\partial^\alpha u_k\|_{L^p}<\varepsilon$$

$\therefore$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$.

$\therefore$ $\forall\, 1\leq|\alpha|\leq m$ $\quad(\partial^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$.

Por completitud de $L^p(\Omega)$, existe $u\in L^p(\Omega)$ y para todo α, $1\leq|\alpha|\leq m$, existen $u_\alpha\in L^p(\Omega)$ tales que

$$u_n\to u \text{ en } L^p(\Omega) \qquad \forall\alpha,\ 1\leq|\alpha|\leq m \quad \partial^\alpha u_n\to u_\alpha \text{ en } L^p(\Omega).$$

Viernes, 7 de junio de 2024.

Observación: 1) Note que la convergencia en $L^p(\Omega)$ implica que $L_{loc}(\Omega)$.

2) Si no hacemos uso de que ∂^α es cerrado, podemos utilizar convergencia débil para mostrar lo requerido.

3) De la demostración de la proposición se infiere lo siguiente: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $W^{m,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n\to u \text{ en } L^p(\Omega) \quad \text{y} \quad \forall\alpha \quad \partial^\alpha u_n\to v \text{ en } L^p(\Omega)$$

$$\Rightarrow u\in W^{m,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad u_n\to u \text{ en } W^{m,p}(\Omega).$$

El recíproco también se cumple:

$$u_n\to u \text{ en } W^{m,p}(\Omega) \Rightarrow \begin{cases} u_n\to u \text{ en } L^p \\ \partial^\alpha u_n\to\partial^\alpha u \text{ en } L^p \quad \forall|\alpha|\leq m.\end{cases}$$

Teorema. $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio separable para $p\in[1,+\infty[$ y es reflexivo para $1<p<+\infty$.

Demostración

$W^{m,p}(\Omega)$ separable:

$$\left\{ f: X\to Y \quad \text{isomorfismo isométrico} \right.$$

X es separable $\Leftrightarrow$ Y es separable

Definamos

$$\Psi : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \prod_{k=1}^{M} L^p(\Omega)$$

$$u \longmapsto (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq m} \} \text{ M-upla}$$

$M = \text{card}\{\alpha : |\alpha| \leq m\}. < +\infty$, Ψ es lineal, Ψ es una isometría

$$\|\Psi(u)\| = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p}\right)^{1/p} = \|u\|_{W^{m,p}}$$

Si ahora, definimos

$$\Psi : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \text{Img}(\Psi) \subseteq \prod_{k=1}^{M} L^p(\Omega)$$

$\therefore \Psi$ es un isomorfismo isométrico.

Además, $\text{Img}(\Psi)$ es separable pues es un s.e.v. de $\prod_{k=1}^{M} L^p(\Omega)$ que es separable.
Así, $W^{m,p}(\Omega)$ es separable.

$W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo aplicando un razonamiento análogo.

Espacios de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$

Motivación

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y no vacío. Sabemos que

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{L^p} = L^p(\Omega) \qquad p \in [1, +\infty[$$

Más adelante probaremos que

$$\Omega = \mathbb{R}^N \qquad \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^N)}^{W^{m,p}} = W^{m,p}(\mathbb{R}^N).$$

Si por otro lado $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$, entonces

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}} \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$$

y en casos muy particulares de Ω cumplen que $\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}} = W^{m,p}(\Omega)$

Consideremos el siguiente problema

$$(P). \begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \qquad g \in C^\infty(\partial\Omega)$$

Si $g = 0$, entonces existe una única solución $u = 0$. Si $g \neq 0$, entonces existe $u \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$ tal que es solución de (P) [$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ dominio regular acotado]

Definamos

$$L : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto L\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega u \varphi \, dx$$

$C_c^\infty(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$ $\qquad$ $L \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ $\qquad$ Consideramos la extensión por H-B.

$$L : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx}_{\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}} + \int_\Omega u \varphi \, dx$$

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right| dx \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L^p} \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right\|_{L^p}$$

$$|L\varphi| \leq \int_\Omega |\nabla u| |\nabla \varphi| \, dx + \int_\Omega |u| |\varphi| \, dx$$

$$\leq \max_{x \in \Omega} \{|\nabla u|, |u|\} \, C_p \, \|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Consideremos $\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$

$$L(\varphi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega u \varphi \, dx$$

$$= -\int_\Omega \nabla u \, \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \hat{n} \, \cancelto{0}{\varphi} \, dS + \int_\Omega u \varphi \, dx$$

$$= \int_\Omega (-\nabla u + u) \, \varphi \, dx = 0$$

$$\therefore \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ / \ L(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow L = 0 \ \text{ en } \ W^{1,p}(\Omega) \qquad \Rightarrow \Leftarrow$$

$$L(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 > 0$$

Por tanto, no es posible que

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}} = W^{1,p}(\Omega)$$

Definición Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}}$$

Martes, 11 de junio de 2024.

Las funciones en $C_c^\infty(\Omega)$ aproximan funciones de Sobolev.

Continuación... $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío y $p \in [1,+\infty[$:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}}$$

* $C_c^\infty(\Omega) \subsetneq W_0^{m,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$

Propiedades.

1) $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un s.e.v. cerrado de $W^{m,p}(\Omega)$ y, por tanto, es un espacio de Banach.

En el caso $p=2$, $H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert

2) $W_0^{m,p}(\Omega)$ es separable para $p \in [1,+\infty[$ y reflexivo para $p \in]1,+\infty[$.

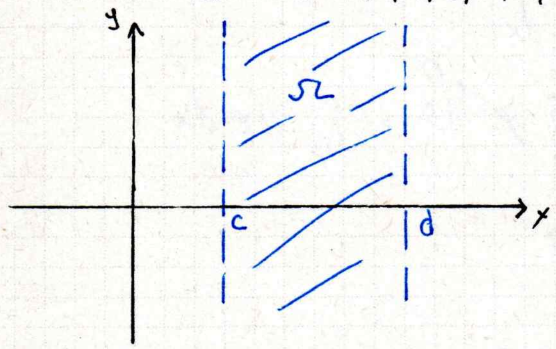
Teorema: (Desigualdad de Poincaré)

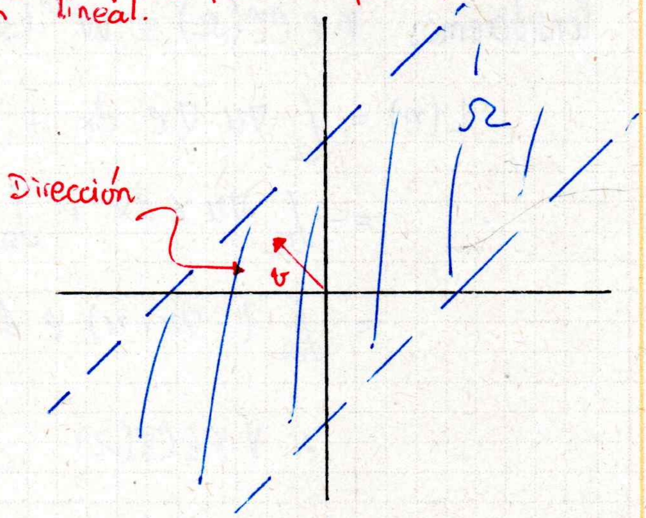
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado en al menos una dirección entonces existe $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad \|u\|_{L^p} \leq C\, \|Du\|_{L^p}.$$

* Una dirección es un vector en el espacio por lo que puede ser la canónica o una combinación lineal.

$\mathbb{R}^N$ $\quad B = \{e_i\}_{i=1}^N \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$





$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c < x < d\}$

Sí es acotado en una dirección

$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$

Sí es acotada en una dirección.

Demostración:

Como $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}}$, mostremos el resultado para funciones $C_c^\infty(\Omega)$.

Sea $u \in C_c^\infty(\Omega)$ cualquiera. Sin pérdida de generalidad, supongamos que Ω está acotado en la dirección e_N, es decir,

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega \qquad c < x_N < d.$$

Utilicemos la siguiente notación:

$$x = (x', x_N), \quad \text{con } x' \in \mathbb{R}^{N-1},$$

con esto, por el primer teorema fundamental del cálculo

$$u(x', x_N) = \int_c^{x_N} \frac{\partial u}{\partial e_N}(x', t)\, dt$$

Consideramos la extensión natural por cero de u a $\mathbb{R}^N$ por $\tilde{u}$.

Entonces, aplicando la desigualdad de Hölder.

$$|\tilde{u}(x',x_N)| \leq \int_c^{x_N} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}(x',t)\right| dt$$

$$\leq \left(\int_c^{x_N} 1^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_c^{x_N} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial e_N}\right|^p dt\right)^{1/p} \quad \text{con } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Integremos sobre $\mathbb{R}^{N-1}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\tilde{u}(x',x_N)|^p\, dx' \leq (x_N-c)^{p/q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_c^{x_N} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial e_N}\right|^p dt\, dx'$$

$$\leq (x_N-c)^{p/q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial e_N}\right|^p dt\, dx'$$

$$= (x_N-c)^{p/q} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial e_N}\right|^p dx$$

Integrando sobre (c,d), respecto a x_N,

$$\int_c^d \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\tilde{u}(x',x_N)|^p\, dx'\, dx_N \leq \int_c^d (x_N-c)^{p/q}\, x_N \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial e_N}\right|^p dx$$

$$\|$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}(x)|^p\, dx \leq \left\|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial e_N}\right\|_{L^p}^p \frac{(x_N-c)^p}{p}\Bigg|_c^d$$

$$= \left\|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial e_N}\right\|_{L^p}^p \frac{(d-c)^p}{p}$$

$$\therefore \|u\|_{L^p} \leq C\left\|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right\|_{L^p} \quad \text{con} \quad C(\Omega,p) = \frac{(d-c)}{p^{1/p}}$$

$$\leq C\|Du\|_{L^p}$$

Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$

$$\forall n\in\mathbb{N}: \ \|u_n\|_{L^p} \leq C\|Du_n\|_{L^p}$$

$$\downarrow$$

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|Du\|_{L^p} \quad \text{gracias a la convergencia en } L^p.$$

Miércoles, 12 de junio de 2024.

Observación: 1) Note que la demostración de la desigualdad de Poincaré realizada, considera el caso $p\in\,]1,+\infty[$. Por lo que el caso $p=1$, se debe tratar por separado.

2) La constante que aparece en la desigualdad de Poincaré, depende de Ω y p. Note que una vez hallada una constante que verifique la desigualdad de Poincaré cualquier otra constante mayor también lo verifica.

Encontrar la constante óptima (la más pequeña de las constantes que verifican la desigualdad de Poincaré) es una tarea difícil)

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\} \ : \quad \frac{\|u\|_{L^p}}{\|Du\|_{L^p}} \leq C$$

entonces

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|_{L^p}}{\|Du\|_{L^p}} =: C(\Omega,p) = C_p \quad \text{(Constante de Poincaré)}$$

La parte desafiante está en la geometría de Ω. (Problema de optimización)

- Algoritmos, que se involucran en procesos probabilísticos tienen a la cte. de Poincaré como una referencia para el análisis de estos.

3) Gracias a la desigualdad de Poincaré, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \varphi(u) = \|Du\|_{L^p} \end{aligned}$$

es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a la norma dada por $W^{1,p}(\Omega)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \varphi(u) \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \left(\|u\|_{L^p}^p + \|Du\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(C_p^p \|Du\|_{L^p}^p + \|Du\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(C_p^p + 1 \right)^{1/p} \varphi(u) \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

De esto se concluye que si Ω satisface la hipótesis de la desigualdad de Poincaré entonces es posible considerar a φ como la norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ (para estimaciones)

$$\left(W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \right) \qquad \left(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}} \right)$$

Son espacios de Banach para $p \in [1,+\infty[$

$p=2$: $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$

$$\langle u,v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega Du\cdot Dv \, dx$$

Es un producto escalar que induce la norma φ.

Así, $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con este producto escalar.

4) La desigualdad de Poincaré no es cierta si $\Omega = \mathbb{R}^N$. (Encontrar contraejemplo)

5) Si Ω es acotado, la desigualdad de Poincaré no se cumple para funciones en $W^{1,p}(\Omega)$, recuerde que $W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq W^{1,p}(\Omega)$, considere las funciones constantes.

6) Es posible considerar Ω cuya medida de Lebesgue N-dimensional sea finita $\lambda_N(\Omega) < +\infty$ para que se siga satisfaciendo la desigualdad de Poincaré.

Proposición: $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^N)}^{W^{1,p}} = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para $p \in [1, +\infty[$

Demostración

Recordemos que

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{L^p} = L^p(\Omega)$$

1) Proceso de truncamiento: soportes compactos

2) Proceso de regularización

Jueves, 13 de junio de 2024.

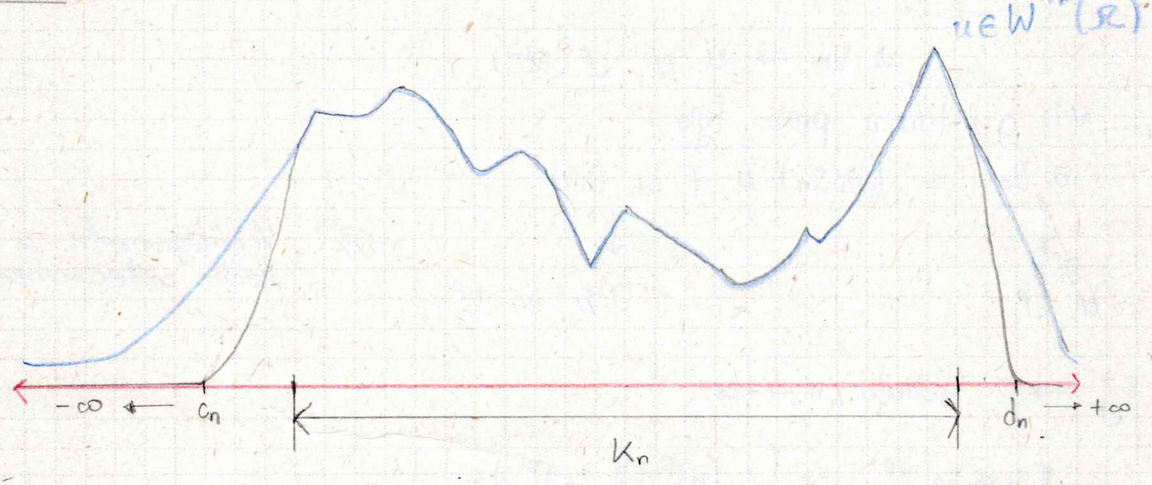
1) Sucesión de funciones en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con soporte compacto tal que converja a $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

2) Construir una sucesión de funciones $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ que converje a una función $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con soporte compacto

3) Por 1) y 2), concluimos el resultado.

Ideas

1)



$[c_n, d_n] = \text{supp}(u_n)$

$$u_n = \begin{cases} u & \text{si } x \in K_n \\ u\varphi_n & \text{con } \varphi_n \text{ a precisar.} \\ 0 & \text{si } x \notin K_n \end{cases}$$

1) P.D. $\left(\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión en } W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \right)$

* $\forall n \in \mathbb{N}$: $\text{supp}(u_n)$ es compacto

* $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

Gracias a la convolución, dados cualesquier abierto $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^N$ y $K \subseteq \mathcal{O}$ compacto, existe una $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\varphi = 1 \text{ en } K, \quad 0 \le \varphi \le 1 \text{ en } \mathcal{O}.$$

Así, existe $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$0 \leq \zeta \leq 1$ en $\mathbb{R}^N$ $\quad \zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| > 2 \end{cases}$

Funciones de corte (cut-off functions). Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^N$ definamos

$$\zeta_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right), \quad \zeta_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{supp}(\zeta_n) \subseteq \overline{B}(0,2n).$$

$$\zeta = 1 \text{ en } \overline{B}(0,n)$$

Definamos $u_n = \zeta_n u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

$$\text{supp}(u_n) \subseteq \text{supp}(\zeta_n) \cap \text{supp}(u) \subseteq \overline{B}(0,2n)$$

P.D.) $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

P.D.) $u_n \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ y $\forall i \in \{1,\dots,N\}$ $\partial_i u_n \to \partial_i u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

TCDL: $u_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \to u$ ctp en $\mathbb{R}^N$.

Sea $x \in \mathbb{R}^N$ arbitrario pero fijo. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\| < n_0$ (por la propiedad arquimediana) y $\zeta_n(x) = 1$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\zeta_n(x) \to 1$.

$$|u_n(x)| \leq \underbrace{|u|}_{\in L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\therefore u_n \to u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Sea $i \in \{1,\dots,N\}$ arbitrario pero fijo.

$$\underbrace{\partial_i u_n}_{\downarrow \, \partial_i u \text{ en } L^p} = (\partial_i \zeta_n) \cdot u + \underbrace{\zeta_n \partial_i u}_{\downarrow \, \partial_i u \text{ en } L^p}$$

OK! Análogamente a lo hecho anteriormente.

P.D. $\|u \partial_i \zeta_n\|_{L^p} \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

$$\|u \partial_i \zeta_n\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |\partial_i \zeta_n|^p \, dx$$

$$\zeta_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right) \qquad \partial_i \zeta_n(x) = \frac{1}{n} \partial_i \zeta\left(\frac{x}{n}\right)$$

con lo cual,

$$\|u \partial_i \zeta_n\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \frac{1}{n^p} \left|\partial_i \zeta\left(\frac{x}{n}\right)\right| dx$$

$$\leq \|\partial_i \zeta\| \, \|u\|_{L^p}^p \frac{1}{n^p} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to +\infty.$$

2) De lo hecho previamente, dado $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con soporte compacto tales que

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| u_{m_0} - u \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $u_{m_0} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, definamos $v_n := \rho_n * u_{m_0}$, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$v_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{y} \quad v_n \longrightarrow u_{m_0} \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N) \qquad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Además,

$$\partial_i v_n = \rho_n * \partial_i u_{m_0} \longrightarrow \partial_i u_{m_0} \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N)$$

Así, $v_n \longrightarrow u_{m_0}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, con lo cual existe $p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| v_{p_0} - u_{m_0} \|_{W^{1,p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, tomando $N(\varepsilon) = N_2(p_0)$

$$\| v_N - u \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \| v_N - u_{m_0} \|_{W^{1,p}} + \| u_{m_0} - u \|_{W^{1,p}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Observaciones:

1) $\forall m \in \mathbb{N}$: $\quad \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^N)}^{W^{m,p}} = W^{m,p}(\Omega) \qquad \forall p \in [1, +\infty[$

Espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y no vacío, $p \in [1, +\infty[$.

El espacio dual (topológico) de $W_0^{1,p}(\Omega)$ denotado por $W^{-1,p'}(\Omega)$, con p' exponente conjugado de p, se define por

$$W^{-1,p'}(\Omega) := \left(W_0^{1,p}(\Omega) \right)^*$$

Observaciones: 1) $W^{-1,p'}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\| \varphi \|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)}} \frac{| \langle \varphi, u \rangle_{W^{-1,p'} \times W^{1,p}} |}{\| u \|_{W_0^{1,p}}}$$

2) Caso $p = 2$: $\quad H^{-1}(\Omega) := W^{-1,2}(\Omega)$, es un espacio de Hilbert con cierto producto escalar.

Caracterización del espacio $W^{-1,p'}(\Omega)$

Sea $\varphi \in W^{-1,p'}(\Omega) \implies$

$(\exists u_0, u_1, \dots, u_N \in L^{p'}(\Omega))$ no necesariamente únicos

$$(\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \langle \varphi, v \rangle_{W^{-1,p'} \times W_0^{1,p}} = \int_\Omega u_0 v \, dx + \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega u_k \partial_k v \, dx$$

$$\varphi = u_0 - \sum \partial_k u_k$$ En el sentido de las distribuciones.

Más aún

$$\|\varphi\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \max_{k\in\{0,\dots,N\}} \|u_k\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

además, si Ω es acotado, entonces $u_0 = 0$, se puede considerar.

Viernes, 14 de junio de 2024.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, abierto no vacío.

$$\varphi \in W^{-1,p'}(\Omega) \Rightarrow \left(\exists \{u_k\}_{k=0}^{N} \text{ en } L^{p'}(\Omega)\right)$$

$$\left(\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)\right) \quad \langle \varphi, v\rangle = \int_\Omega u_0 v\, dx + \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega u_k \partial_k v\, dx$$

$\Rightarrow$) Sea $1 < p < +\infty$.

Supongamos que $\varphi \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

$$L^{p'}(\Omega) \cong (L^p(\Omega))^*$$

Consideremos,

$$T: W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)^{N+1} = \prod_{k=0}^{N} L^p(\Omega)$$

$$u \longmapsto Tu = (u, \partial_1 u, \dots, \partial_N u)$$

T es lineal, isometría; en particular, redefinamos como

$$T: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow T(W_0^{1,p}(\Omega)) \subseteq L^p(\Omega)^{N+1}.$$

es un isomorfismo isométrico. Por lo tanto, admite inversa

$$T^{-1}: T(W_0^{1,p}(\Omega)) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega).$$

Definamos

$$\phi: T(W_0^{1,p}(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h \longmapsto \varphi(h) := \langle \varphi, T^{-1}h\rangle_{W^{-1,p'} \times W_0^{1,p}}$$

Notemos que $\phi \in (T(W_0^{1,p}(\Omega)))^*$ pues ϕ es lineal

$$|\phi(h)| \leq \|\varphi\|_{W^{-1,p'}} \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(T(W_0^{1,p}), W_0^{1,p})} \|h\|_{W^{1,p}}$$

Por Teorema de Hanh-Banach, existe $\Psi \in (L^p(\Omega)^{N+1})^*$ tal que

$$\Psi\big|_{T(W_0^{1,p})} = \phi \qquad \|\Psi\|_{(L^p(\Omega)^{N+1})^*} = \|\phi\|_{(T(W_0^{1,p}(\Omega)))^*}$$

Como $\Psi \in (L^p(\Omega)^{N+1})^* \cong L^{p'}(\Omega)^{N+1}$ Teorema de representación de Riesz versión L^p.

por lo tanto, existen únicos $\{u_k\}_{k=0}^{N}$ en $L^{p'}(\Omega)$ tal que

$$\forall h \in L^p(\Omega)^{N+1} \; : \; \langle \Psi, h \rangle = \sum_{k=0}^{N} \int_\Omega u_k h_k \, dx$$

$$\overset{\|}{(h_0, h_1, \dots, h_N)}$$

En particular, para

$$\forall y \in T(W_0^{1,p}(\Omega)) \; : \; \langle \Psi, y \rangle = \phi(y) = \langle \varphi, T^{-1}(y) \rangle$$

$$\therefore \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \; : \; \langle \Psi, v \rangle = \phi(y) = \langle \varphi, y \rangle$$

$$= \int_\Omega u_0 v \, dx + \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega u_k \partial_k v \, dx.$$

Aunque $\{u_k\}_{k=0}^{N}$ son únicos, como la extensión Ψ no es única, no se tiene unicidad en la representación.

Ahora, notemos que

$$\|\varphi\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} := \sup_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|\langle \varphi, v \rangle|}{\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$$

Sea $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no nulo.

$$|\langle \varphi, v \rangle| \leq \int_\Omega |u_0||v| dx + \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega |u_k| |\partial_k v| \, dx$$

$$\leq \|u_0\|_{L^{p'}} \|v\|_{L^p} + \sum_{j=1}^{N} \|v_k\|_{L^{p'}} \|\partial_k v\|_{L^p}$$

$$\leq \max_{0 \leq k \leq N} \{ \|u_k\|_{L^{p'}} \} \underbrace{\left(\|v\|_{L^p} + \sum_{k=1}^{N} \|v_k\| \right)}_{\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$$

En consecuencia,

$$\|\varphi\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \max_{0 \leq k \leq N} \|u_k\|_{L^{p'}}$$

Ahora, como

$$\|\Psi\|_{(L^p(\Omega)^{N+1})^*} = \|\varphi\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}$$

$$\forall h \in L^p(\Omega)^{N+1} \; : \; \langle \Psi, (h_0, \dots, h_N) \rangle = \sum_{k=0}^{N} \int_\Omega u_k h_k$$

Definamos $\quad h_k := \mathrm{sgn}(u_k) |u|^{p'-1} \in L^p(\Omega)$

$$\int_\Omega u_k h_k \, dx = \left(\int_\Omega |u_k|^{p'} \right)^{1/p'}$$

$$\int_\Omega |h_k|^p \, dx = \int_\Omega |u|^{\underbrace{(p'-1)p}_{p'}} dx \quad < +\infty$$

Con lo cual,

$$\langle \Psi, (h_0, \ldots, h_N) \rangle = \sum_{k=0}^{N} \| u_k \|_{L^{p'}} \geq \max_{k \in \{0, \ldots, N\}} \| u_k \|_{L^{p'}}$$

$$\| \varphi \|_{W^{-1,p'}} = \| \Psi \| = \max \| u_k \|_{L^{p'}}$$

Caso: Acotado

$$T : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)^N$$
$$u \longmapsto Tu = (\partial_1 u, \ldots, \partial_N u)$$

Análogo a lo hecho previamente, existen $\{u_k\}_{k=1}$ tales que

$$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \ : \ \langle \varphi, v \rangle = \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega u_k \partial_k v \, dx$$

Si Ω es acotado, se tienen las siguientes representaciones

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega v_0 v \, dx + \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega u_k \partial_k v \qquad \{v_k\}_{k=0}^{N} \text{ en } L^{p'}(\Omega)$$

$$\langle \varphi, v \rangle = \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega w_k \partial_k v \qquad \{w_k\}_{k=1}^{N} \text{ en } L^{p'}(\Omega)$$

Miércoles, 19 de junio de 2024.

Al teorema anterior se lo puede denominar como teorema de representación en $W_0^{1,p}(\Omega)$ (para $W^{-1,p}(\Omega)$).

Recordemos que para la demostración utilizamos el operador

$$T : \left(W_0^{1,p}(\Omega), \| \cdot \|_{W^{1,p}} \right) \to \left(L^p(\Omega)^{N+1}, \| \cdot \|_{L^p(\Omega)^{N+1}} \right)$$

donde

$$\| \cdot \|_{W^{1,p}(\Omega)} := \| u \|_{L^p} + \sum_{k=1}^{N} \| \partial_k u \|_{L^p}$$

$$\| (h_0, \ldots, h_N) \| := \sum_{k=0}^{N} \| h_k \|_{L^p}$$

Especificamos las normas.

Se debe hacer la siguiente precisión sobre h_k

$$h_k = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sgn}(u_k) \, |u_k|^{p'-1}}{\| u_k \|} & u_k \neq 0, \\ 0 & u_k = 0. \end{cases}$$

Aún no, revise los apuntes del cuaderno de Borrador 3 para los cálculos respectivos

Se procede análogamente para rectificar los cálculos.

- Si $f = 0$, entonces $u_k = 0 \in L^{p'}(\Omega)$ para todo $k \in \{1, \ldots, N\}$ satisface lo requerido.
- Así, supongamos que $f \neq 0$. En consecuencia, tomando

$$h = \left(0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{\operatorname{sgn}(u_{k^*})\, |u_{k^*}|^{p'-1}}{\|u_{k^*}\|_{L^{p'}}^{p'-1}}}_{k^*}, 0, \ldots, 0 \right) \quad \text{donde}$$

$k^* \in \{0, \ldots, N\}$ es tal que $u_k \neq 0$ pues si no $\Psi = 0$.

Observación: Si Ω es acotado en al menos una dirección, $u_0 = 0$ (se puede considerar)

Analicemos la segunda implicación

$\Leftarrow$ | Motivación:

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que sea solución «en cierto sentido» de (P).

$\Delta u \to$ Derivadas débiles de 2^{do} orden.

Intuitivamente:

$$u = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \qquad \begin{aligned} & u \in H_0^1(\Omega) \\ & \partial_k u \in L^2(\Omega) = W^{1-1,2}(\Omega) = W^{0,2}(\Omega) \\ & \partial_k^2 u \in W^{-1,2}(\Omega) = H^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

Espacio dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y abierto. El espacio dual (topológico) de $W_0^{m,p}(\Omega)$ será denotado por $W^{-m,p'}(\Omega)$ donde $p \in [1, +\infty[$.

En el caso $p = 2$, $W^{-m,2}(\Omega) = H^{-m}(\Omega)$.

Proposición. $W^{-m,p'}(\Omega)$ es un espacio de Banach para la norma dual.

Proposición (Teorema de representación para $W^{-m,p}(\Omega)$)

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y abierto, $m \in \mathbb{N}$ y $p \in [1, +\infty[$.
Si $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$, entonces existe $\{u_\alpha\}_{0 \le |\alpha| \le m} \subseteq L^{p'}(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in W_0^{m,p}(\Omega) \; : \; \langle f, v \rangle = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \int_\Omega u_\alpha \, \partial^\alpha v \, dx$$

con $\partial^0 v = v$.

Además, $\|f\|_{W^{-m,p'}(\Omega)} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|u_\alpha\|_{L^{p'}(\Omega)}$

Demostración: Análogo a lo hecho previamente

Propiedades de los espacios duales

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío, $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < +\infty$.

1) $1 < p < +\infty$: $W^{-m,p}(\Omega)$ es separable y reflexivo.

2) En el caso $p=2$, $H^{-m}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, equipado con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{H^{-m}(\Omega)} := \langle u_f, u_g \rangle_{H^m(\Omega)}$$

donde u_f, u_g son los representantes de Riesz de f y g, respectivamente.

Notar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-m}(\Omega)}$ induce la norma dual; pues

$$\forall f \in H^{-m}(\Omega) \qquad \langle f, f \rangle_{H^{-m}(\Omega)} = \langle u_f, u_f \rangle_{H^m(\Omega)} = \|u_f\|^2_{H^m} = \|f\|^2_{H^{-m}(\Omega)}.$$

3) Inyecciones (Inmersiones) continuas de los espacios duales $W^{-m,p}(\Omega)$ en $D'(\Omega)$ e identificación de $W^{-m,p'}(\Omega)$ con un s.e.v. de distribuciones sobre Ω.

$D'(\Omega) :=$ Espacio de distribuciones

$$T : D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{lineal y continua.}$$

$$\varphi_n \to \varphi \text{ en } C_c^\infty(\Omega) \quad (\text{topología natural})$$

$$\langle T, \varphi_n \rangle_{D' \times D} \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle_{D' \times D} \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

Jueves, 20 de junio de 2024.

Sean V, W espacios vectoriales topológicos.

Se dice que V está inmerso (o sumergido) continuamente en W

(embedding o imbedding)

si existe a) $\varnothing : V \to W$ lineal e inyectiva

b) $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$ en $V \Rightarrow \varphi(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(v)$ en W

Observación

a) En este caso, V se identifica con un s.e.v. de W ($\mathrm{Img}(\varnothing)$) y se suele denotar $V \hookrightarrow W$ [$V \subseteq W$ algebráicamente]

existencia de un operador lineal

De esta manera, se suele expresar las convergencias de la siguiente forma:

$$v_n \to v \text{ en } V \Rightarrow v_n \to v \text{ en } W$$

Por ejemplo: $L^1_{loc}(\Omega)$ está inmerso continuamente en $D'(\Omega)$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ en } L^1_{loc}(\Omega), \quad u \in L^1_{loc}(\Omega)$$

$$u_n \to u \text{ en } L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow u_n \to u \text{ en } D'(\Omega)$$

$$T_{u_n} \to T_u \text{ en } D'(\Omega)$$

Distribuciones regulares.

b) En el caso en que W y V sean espacios normados, las convergencias son en las normas respectivas.

Además, si $\emptyset$ es secuencialmente continua, entonces $\emptyset$ es continua, y por lo tanto $\emptyset$ es acotada.

Proposición. Sea W un espacio normado y V un s.e.v. de W. Si $V \hookrightarrow W$ y V es denso en W, entonces

$W^* \hookrightarrow V^*$ y se tiene la siguiente identificación

$$(\forall f \in W^*)(\forall v \in V)$$

$$\langle f, v \rangle_{W^*, W} = \langle f|_V, v \rangle_{V^*, V}.$$

Esto nos quiere decir que f se identifica con $f|_V$

Demostración

P.D. 1) Existe $\emptyset : W^* \to V^*$ lineal e inyectiva tal que

$$f_n \to f \text{ en } W^* \Rightarrow \emptyset(f_n) \to \emptyset(f) \text{ en } V^*$$

Definamos

$$\begin{aligned} \emptyset : W^* &\to V^* \\ f &\mapsto \emptyset(f) \end{aligned}$$

$\forall x \in V$: $\langle \emptyset(f), x \rangle_{V^* \times V} = \langle f, id|_V(x) \rangle_{W^* \times W}$

donde $\begin{aligned} id : W &\to W \\ x &\mapsto x \end{aligned}$ lineal y acotado

- $\emptyset$ es lineal

$f \in ker(\emptyset) \Rightarrow \emptyset(f) = 0$ en V^*

$\forall x \in V$: $\langle \emptyset(f), x \rangle_{V^*, V} = 0 = \langle f, id|_V(x) \rangle_{W^*, W}$

$\therefore f = 0$ en V $\Rightarrow$ $f = 0$ en W por T-HB

Viernes, 21 de junio de 2024.

Continuación de la demostración.

Observación: Recordemos el siguiente resultado:

$$(\forall f \in E^* \quad f = 0 \text{ en } F \Rightarrow f = 0 \text{ en } E) \overset{HB.}{\Rightarrow} \overline{F} = E.$$

$\Leftarrow$ No requiere HB.

Continuidad

Supongamos que $f_n \to f$ en W^*. P.D. $\Psi(f_n) - \Psi(f)$ en V^*

Sea $v \in V$, cualquiera:

$$|\langle \Psi(f_n) - \Psi(f), v\rangle_{V^* \times V}| = |\langle f_n - f, id|_V(v)\rangle_{V^* \times V}|$$

$$\leq \|f_n - f\|_{V^*} \|v\|_V$$

$$\therefore \|\langle \Psi(f_n) - \Psi(f)\|_{V^*} \leq \|f_n - f\|_{W^*}$$

Por teorema de estricción

$$\Psi(f_n) \to \Psi(f) \quad \text{en} \quad V^*$$

Observación: Recuerde, que si V es denso en W, entonces existe una única extensión de funcionales en V^* a W^*

Teorema de extensión

De esta manera, es posible identificar V^* y W^*:

- W espacio normado, V s.e.v. de W

  $f: V \to \mathbb{R}$ lineal y acotado

  $\underset{\text{THB.}}{\Rightarrow} \exists \tilde{f} \in W^*$ tal que $\tilde{f}|_V = f$

Por la unicidad,

$$f \in V^* \cong \tilde{f} \in W^*$$

Ejemplo fundamental: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y abierto con $1 \leq p < +\infty$.

$$L^p(\Omega)^* \hookrightarrow D'(\Omega).$$

$$D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) \text{ es denso en } L^p(\Omega)$$

$$C_c^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \Rightarrow L^p(\Omega)^* \hookrightarrow D'(\Omega)$$

$f \in L^p(\Omega)^*$: $\quad f: L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineal y acotado.

$\Psi: L^p(\Omega)^* \to D'(\Omega)$ lineal e inyectiva y secuencialmente continua.

$$f \in L^p(\Omega)^* \Rightarrow \Psi(f) \in D'(\Omega)$$

$$\Psi(f): D(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \tilde{\Psi}(f): L^p(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

Observación: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y abierto, y W un espacio de Banach.

$D(\Omega)$ s.e.v. no denso en W, entonces W^* no se identifica con un s.e.v. de distribuciones.

Consideremos:

$D(\Omega)$ es un s.e.v. de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ (más aún en $L^p(\Omega)$)

$D(\Omega)$ es un s.e.v. de $L^\infty(\Omega)$, pero $D(\Omega)$ no es denso en $L^\infty(\Omega)$ por tanto, $L^\infty(\Omega)^*$ no se identifica con un s.e.v. de distribuciones.

Desde el punto de vista de las distribuciones, si una distribución $T \in D'(\Omega)$ satisface que

$$T = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \underbrace{\partial^\alpha w_\alpha}_{\text{Derivada distribucional}} \quad \text{en } D'(\Omega),$$

para algún $\{w_\alpha\}_{0\le|\alpha|\le m}$ en $L^{p'}(\Omega)$, entonces

$$T \in W^{-m,p'}(\Omega).$$

$$T : D(\Omega) \to \mathbb{R} \qquad \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}} = W_0^{m,p}(\Omega)$$

$$\Rightarrow \exists!\ \tilde{T} \in W^{-m,p'}(\Omega) = \left(W_0^{m,p}(\Omega)\right)^*$$

Note que $W^{-m,p'}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$. En efecto, como $D(\Omega)$ es denso en $W_0^{m,p}(\Omega)$. Gracias al teorema anterior

$$W^{-m,p'}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$$

- Observación: Si tomamos $f \in L^2(\Omega)$, entonces

$$\forall i \in \{1,\dots,N\} \ : \ \underbrace{\partial_i f}_{\text{derivada distribucional.}} \in H^{-1}(\Omega)$$

Si consideramos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = 0 \end{cases} \qquad u \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow u \in L^2(\Omega) \quad \partial_i u \in L^2(\Omega)$$

$$\partial_{ij} u = \partial_j(\partial_i u) \to \text{derivada distribucional}$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \ : \ \langle -\Delta u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}$$

Más aún, si ahora $f \in L^2(\Omega)$, entonces $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Tripleta de Gelfand

Sean V y H espacios normados, cada uno con su propia norma: $(V, \|\cdot\|_V)$ $(H, \|\cdot\|_H)$.

Supongamos que V es s.e.v. de H, y además $V \hookrightarrow H$. denso.

Esto implica que $H^* \hookrightarrow V^*$

En el caso en el que H y V sean espacios de Hilbert, sabemos que
$$V \cong V^* \quad \text{y} \quad H \cong H^*$$

Si $V \hookrightarrow H$ se entiende la continuidad con la norma de cada espacio

Por lo tanto,
$$V \hookrightarrow \underset{\text{Espacio pivote.}}{H} \cong H^* \hookrightarrow V^*$$

Cuando $\overline{V}^H = H$; $V \hookrightarrow H$: inyección continua y densa.

Martes, 25 de junio de 2024.

Estudiemos los siguientes espacios con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, no vacío.

$$H_0^1(\Omega) \qquad L^2(\Omega) \qquad H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)^*$$

- $H_0^1(\Omega)$ es un s.e.v. de $L^2(\Omega)$
- $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar
$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_\Omega u v \, dx$$

$H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilber con el producto escalar
$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \langle u, v \rangle_{H^1}$$

Ahora, notemos que:
$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$
$$id\big|_{H_0^1} : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \qquad \text{es lineal y acotado.}$$

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \qquad \|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}.$$

Más aun, es densa, pues
$$C_c^\infty(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$$
$$\Rightarrow \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{L^2} \subseteq \overline{H_0^1(\Omega)}^{L^2} \subseteq L^2(\Omega)$$
$$\therefore \overline{H_0^1(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$$

Una notación no estándar para la inyección densa
$$H_0^1(\Omega) \overset{d}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

Por lo tanto, $H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$, se entiende como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$

De lo anterior, teorema anterior, sabemos que
$$(L^2(\Omega))^* \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Es decir, existe

$$T : L^2(\Omega)^* \to H^{-1}(\Omega)$$
$$f \mapsto Tf$$

lineal y acotado, tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad : \quad \langle Tf, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} = \langle f, v\rangle_{(L^2)^*\times L^2}$$

En efecto, notemos que es acotado:

$$\begin{aligned}
|\langle Tf, v\rangle| &= |\langle f, v\rangle| \\
&\leq \|f\|_{(L^2)^*} \|v\|_{L^2} \\
&\leq \|f\|_{(L^2)^*} \|v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{|\langle Tf, v\rangle|}{\|v\|_{H^1}} \leq \|f\|_{(L^2)^*}$$

$$\therefore \|Tf\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f\|_{(L^2)^*}.$$

Como $H_0^1(\Omega)$ es reflexivo, entonces $T(L^2(\Omega)^*)$ es denso en $H^{-1}(\Omega)$.

$$L^2(\Omega)^* \subseteq H^{-1}(\Omega),$$

es una inyección continua y densa.

$$\begin{cases} H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) & \text{densamente} \\ L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) & \text{densamente} \end{cases}$$

y considerando $L^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)^*$ como espacio pivote,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))^* \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

De lo hecho previamente, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Luego, nos hacemos la siguiente pregunta:

$$¿\, W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\,?$$

Si $q = p$, entonces

$$p \in [1, +\infty] \quad : \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

$$¿\, \exists\, q \neq p \quad \text{tal que} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\,?$$

Sección: Inmersiones de Sobolev.

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

¿ $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$?

En particular, si Ω fuera acotado, sabemos que
$$L^2(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{con} \quad p < 2.$$

Motivación

Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, cualquiera.

¿Es posible obtener información de la integrabilidad de u a partir de la integrabilidad de sus derivadas?

Así, buscamos brindar condiciones necesarias para que
$$(\exists C > 0)\left(\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)$$

Técnica de escalamiento.

Sea $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ no nula. Para cualquier $\lambda > 0$, se define
$$u_\lambda(x) = u\left(\frac{x}{\lambda}\right) \qquad \text{(técnica de escalamiento)}$$

$$\|u_\lambda\|_{L^q}^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda(x)|^q \, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left|u\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^q dx \qquad z = \frac{x}{\lambda}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} |u(z)|^q \lambda^N \, dz$$

Así, se sigue que
$$\|u_\lambda\|_{L^q}^q = \lambda^N \|u\|_{L^q}^q$$
$$\therefore \|u_\lambda\|_{L^q} = \lambda^{\frac{N}{q}} \|u\|_{L^q}$$

Por otro lado,
$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda(x)|^p \, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \lambda^{-p} \left|\nabla u\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^p dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \lambda^{N-p} |\nabla u(z)| \, dz$$
$$\therefore \|\nabla u_\lambda\|_{L^p}^p = \lambda^{N-p} \|\nabla u\|_{L^p}^p$$
$$\Rightarrow \|\nabla u_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{\frac{N-p}{p}} \|\nabla u\|_{L^p}$$

En consecuencia, gracias a la hipótesis

$$\|u_\lambda\|_{L^q} \leq C \|\nabla u_\lambda\|_{L^p}$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\lambda^{\frac{N}{q}} \|u\|_{L^q} \leq C \lambda^{\frac{N-p}{p}} \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\|u\|_{L^q} \leq C \lambda^{\frac{N-p}{p} - \frac{N}{q}} \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$= C \lambda^{\frac{N}{p} - \frac{N}{q} - 1} \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall \lambda > 0.$$

Supongamos que $\frac{N}{p} - \frac{N}{q} - 1 \neq 0$.

1) $\frac{N}{p} - \frac{N}{q} - 1 > 0$, entonces si $\lambda \to 0$: $\|u\|_{L^q} = 0$

$\therefore u = 0$. $\Rightarrow \Leftarrow$.

2) $\frac{N}{p} - \frac{N}{q} - 1 < 0$, entonces si $\lambda \to +\infty$, $\|u\|_{L^q} = 0$ $\Rightarrow \Leftarrow$.

En consecuencia, la única posibilidad es que

$$\frac{N}{p} - \frac{N}{q} - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Una condición necesaria para que exista $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$$

es que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} > 0$, i.e., $p < N$.

En consecuencia,

para $p < N$: $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q$, con $q = \frac{Np}{N-p}$.

Teorema: (Desigualdad de Gagliardo - Nirenberg - Sobolev)

Sea $1 \leq p < N$, entonces $(N \geq 2)$

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

donde $p^* = \frac{Np}{N-p}$ (exponente crítico de Sobolev asociado a p)

En forma de desigualdad:

Existe $C > 0$ tal que, para todo

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \qquad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Las formas presentadas no son equivalentes (la desigualdad implica la inmersión)

Corolario. Si $1 \leq p < N$, $N \geq 2$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración

P.D. $(\exists C>0)(\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N))\left(\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \right)$

Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Por densidad existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u \quad \text{en} \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Por la desigualdad G-N-S, existe $K>0$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \|u_n\|_{L^{p^*}} \leq K \|\nabla u\|_{L^p} \leq K \|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

P.D $u_n \to u$ en L^{p^*}

P.D. $u \in L^{p^*}$ (Idea: Vamos a definir puntualmente $f(x) := \liminf f_n(x)$ ctp. en X.

Miércoles, 26 de junio de 2024.

P.D $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow |u|^{p^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$

Por hipótesis, tenemos que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad |u_n|^{p^*} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Por otro lado, como $(|u_n|^{p^*})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\mathbb{R}^N)$, entonces es acotada y así

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx < +\infty.$$

Ahora, como $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, más aún converge en $L^p(\mathbb{R}^N)$ y en consecuencia existe $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \qquad \text{ctp } x \in \mathbb{R}^N.$$

Con lo cual, definamos

$$|u(x)|^p = \liminf_{k\to+\infty} |u_{n_k}|^{p^*}(x) = \lim_{k\to+\infty} |u_{n_k}|^{p^*}.$$

Por el lema de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} \leq \liminf_{k\to+\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_k}(x)|^{p^*} dx}_{= \|u_{n_k}\|_{L^{p^*}}^{p^*}}$$

$$\leq C^{p^*} \liminf_{k\to+\infty} \|u_{n_k}\|_{L^p}^{p^*} = C^* \|\nabla u\|_{L^p}^{p^*}$$

$$\therefore \|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$$

$$\therefore W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

Corolario. Si $1 \leq p < N$ y $N \geq 2$, entonces
$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \qquad \forall q \in [p, p^*]$$

Demostración.
$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$$
$$\hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$
$$\Rightarrow \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow [\, L^p(\mathbb{R}^N), L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \,]$$

Desigualdad de interpolación

Sean $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tales que $p \leq q \leq r$ y $\theta \in [0,1]$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}$, i.e., $\frac{1}{q} \in \left[\frac{1}{r}, \frac{1}{q}\right]$.

Si $u \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$, entonces $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ y
$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\theta}_{L^r(\mathbb{R}^N)}$$

$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

$\Rightarrow \frac{1}{p^*} < \frac{1}{p}$

$\therefore \underline{p^* > p}$

P.D. $(\exists C > 0)(\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)) \quad \|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$

Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, cualquiera.

Casos $q = p$ y $q = p^*$, evidentes.

Ahora, sea q tal que $p < q < p^*$, entonces existe θ tal que
$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$$
y entonces, gracias a la desigualdad de interpolación
$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q} &\leq \|u\|^{\theta}_{L^p} \|u\|^{1-\theta}_{L^{p^*}} \\
&\leq \|u\|^{\theta}_{W^{1,p}} \|u\|^{1-\theta}_{L^{p^*}} \\
&\leq \|u\|^{\theta}_{W^{1,p}} \left(C \|\nabla u\|_{L^p} \right)^{1-\theta} \\
&= \hat{C}^{1-\theta} \|u\|^{\theta}_{W^{1,p}} \|u\|^{1-\theta}_{W^{1,p}} \\
&= \hat{C}^{1-\theta} \|u\|_{W^{1,p}}
\end{aligned}$$

Tomando $C = \hat{C}^{1-\theta}$, se sigue el resultado.

Observación: $\forall\, 1 \leq p < N$, se tiene que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$

Así, si consideramos una sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que
$$p_n \to N \Rightarrow p_n^* \to +\infty.$$
Por lo tanto, nos hacemos la siguiente pregunta:
$$¿\, W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)\ ?$$

Recordemos el ejemplo:

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto u(x,y) = \begin{cases} \ln|\ln r| & 0<r<\frac{1}{e}, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2) = H^1(\mathbb{R}^2)$, pero $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Teorema. Si $p=N$, entonces

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \qquad \forall\, q \in [p,+\infty[$$

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \qquad \forall\, q \in [p,+\infty[.$$

Demostración:

Para $q \in [N,+\infty[$

P.D. $(\exists C>0)\,(\forall u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N))\ \left(\|u\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{1,N}}\right)$

Recordemos que

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^N)}^{W^{1,N}}$$

Sea $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, cualquiera.

De la demostración de la Desigualdad de G-N-S,

$$\forall t \geq 1: \quad \|u\|^t_{L^{t\frac{N}{N-1}}} \leq t\,\|u\|^{t-1}_{L^{\frac{N}{N-1}(t-1)}} \prod_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{\frac{1}{N}}_{L^N}.$$

$$\prod_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{\frac{1}{N}}_{L^N} \leq \prod_{i=1}^{N}\|\nabla u\|^{\frac{1}{N}}_{L^N} = \|\nabla u\|_{L^N}$$

$$\forall t\geq 1 \quad \|u\|^t_{L^{t\frac{N}{N-1}}} \leq t\,\|u\|^{t-1}_{L^{\left(\frac{N}{N-1}\right)(t-1)}}\|\nabla u\|_{L^N}$$

$t=N$:

$$\begin{aligned}\|u\|^N_{L^{\frac{N^2}{N-1}}} &\leq N\,\|u\|^{N-1}_{L^N}\,\|\nabla u\|_{L^N} \\ &\leq N\,\|u\|^{N-1}_{W^{1,N}}\,\|u\|_{W^{1,N}} \\ &= N\,\|u\|^N_{W^{1,N}}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \|u\|_{L^{\frac{N^2}{N-1}}} \leq N^{\frac{1}{N}}\,\|u\|_{W^{1,N}}$$

Así, hemos probado que

$$\|u\|_{L^{\frac{N^2}{N-1}}} \leq C(N)\,\|u\|_{W^{1,N}}$$

utilizando la desigualdad de interpolación, dado que $u \in L^N \cap L^{\frac{N^2}{N-1}}$, entonces

$$u \in L^q \qquad \forall\, q \in \left[N, \tfrac{N^2}{N-1}\right]$$

$$\|u\|_{L^q} \le \|u\|^{\theta}_{L^N} \|u\|^{1-\theta}_{L^{\frac{N^2}{N-1}}}$$
$$\le \|u\|^{\theta}_{W^{1,N}} C(N)^{1-\theta} \|u\|^{1-\theta}_{W^{1,N}}$$
$$= C(N)^{1-\theta} \|u\|_{W^{1,N}}$$

$t = N \;:\; \forall q \in [N, N^2/N-1]$

$t = N+1 \;:\; \forall q \in [N^2/N-1, \frac{N(N+1)}{N-1}]$

$t = N+2 \;:\; \forall q \in \left[\frac{N(N+1)}{N-1}, \frac{N(N+2)}{N-1}\right]$

Ahora, consideremos:

$t = N+1$

Entonces, notando

$$M_N = \frac{(N+1)N}{N-1} > \frac{N^2}{N-1}$$

$$\|u\|^{N+1}_{L^{M_N}} \le (N+1) \|u\|^N_{L^{\frac{N^2}{N-1}}} \|\nabla u\|_{L^N} \le (N+1) C(N)^N \|u\|^N_{W^{1,N}} \|u\|_{W^{1,N}}$$
$$\le (N+1) C(N)^N \|u\|^{N+1}_{W^{1,N}}$$

$$\therefore \|u\|_{L^{M_N}} \le (N+1)^{(N-1)^{-1}} C(N)^N \|u\|_{W^{1,N}}$$

Jueves, 27 de junio de 2024.

Recapitulación

Para $N \geq 2$, tenemos que $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty)$

Hasta este punto, hemos probado que existe $C = C(N) > 0$ tal que
$$\forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \|u\|_{L^q} \le C \|u\|_{W^{1,N}}.$$

Luego, por densidad, se tiene que
$$(\exists C > 0)\ (\forall u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N))\ \ (\|u\|_{L^q} \le C \|u\|_{W^{1,N}})$$

Teorema (Morrey)

Brezis, 9.12 Sea $N < p < +\infty$, entonces
$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Más aún, existe $C > 0$, tal que
$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \qquad |u(x) - u(y)| \le C \|x - y\|^{1-\frac{N}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \text{ctp } x, y \in \mathbb{R}^N$$

Lo anterior nos dice que $u \in C^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N)$ (Espacio de Hölder) con $\lambda = 1 - N/p$.

Espacio de Hölder. Sea $f : U \subseteq X \to Y$, entonces f es λ-Hölder en U si existe $C > 0$ y existe $\lambda \in (0,1]$ tal que
$$\forall x, y \in U \qquad \|f(x) - f(y)\|_Y \le C \|x - y\|^\lambda_X$$

Más aún, aquí se puede definir la semi-norma

$$[f]_{0,\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{\| f(x) - f(y) \|_Y}{\|x-y\|^{\alpha}_X}$$

La constante de Hölder depende de la función $C = C(u)$.

y el espacio de Hölder está dotado de la norma

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} = \underbrace{\|f\|_{C^0}}_{\text{No siempre es finito, depende del conjunto.}} + [f]$$

El término es acotado cuando:

1) U es acotado
2) f es una función acotada cuando U no es acotado.

A partir de la desigualdad dada por el teorema de Morrey, se tiene que existe $A \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\lambda(A) = 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|x-y\|^{1-\frac{N}{p}}_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^N \setminus A.$$

Luego, como $\overline{\mathbb{R}^N \setminus A} = \mathbb{R}^N$, existe $\tilde{u} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, con $\tilde{u} \in [u]$.

Demostración

P.D. $(\exists C > 0)(\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N))\ (\|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{1,p}})$

Por densidad, basta probar que existe $C > 0$ tal que

$$\forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Sea $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, si lo anterior es cierto, entonces se tendría que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \qquad |u(x)| \leq C \left(\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right) + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

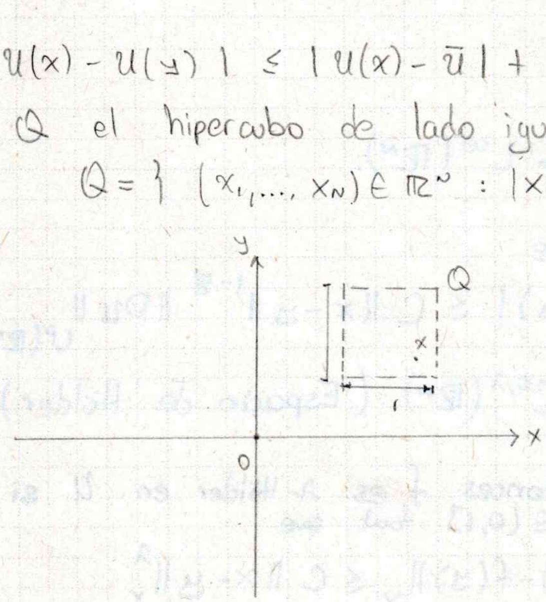
Idea: $$\int_Q |u(x)|\, dy \leq \int_Q |u(x) - u(y)|\, dy + \int_Q |u(y)|\, dy$$

Notando $\bar{u}$ por el promedio, $\bar{u} = (\lambda(Q))^{-1} \int_Q u\, dx$, se tiene que

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - \bar{u}| + |\bar{u} - u(y)|$$

con Q el hipercubo de lado igual a r.

$$Q = \{ (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : |x_i| < \tfrac{r}{2} \} \qquad \lambda_N(Q) = r^N$$



Primero, por traslación, vamos a analizar el caso $x = 0$, i.e.

$$|u(0) - \bar{u}|$$

Donde Q es un hipercubo abierto que contiene al origen cuya medida N-dimensional de Lebesgue es r^N.

$$\bar{u} = \frac{1}{\lambda_N(Q)} \int_Q u(z)\, dz$$

$$|u(0)-\bar{u}| = \left| u(0) - \frac{1}{\lambda_N(Q)} \int_Q u(z)\,dz \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\lambda_N(Q)} \int_Q u(0)\,dz - \frac{1}{\lambda_N(Q)} \int_Q u(z)\,dz \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\lambda_N(Q)} \int_Q (u(0)-u(z))\,dz \right|$$

Para estimar el término del lado derecho, basta analizar el término
$$u(0)-u(z) \quad \text{para } z \in \mathbb{R}^N.$$

Por el Teorema Fundamental del cálculo (Idea: Relacionar la función con su derivada)

$$u(z)-u(0) = (u\circ\varphi)(1) - (u\circ\varphi)(0)$$
$$= \int_0^1 (u\circ\varphi)'(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_k}(tz)\, z_k .$$

> $u: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
> $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$
> $t \mapsto tz$

De esta manera,
$$|u(z)-u(0)| \le \sum_{k=1}^N |z_k| \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(tz) \right| dt$$

Integrando sobre Q (z está en Q)

$$\left| \int_Q u(z)-u(0)\,dz \right| \le \int_Q |u(z)-u(0)|\,dz \le \int_Q \sum_{k=1}^N |z_k| \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(tz) \right| dt\,dz$$

$$\left| \int_Q u(z)\,dz - \lambda_N(Q)\,u(0) \right| \le \int_Q \sum_{k=1}^N |z_k| \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(tz) \right| dt\,dz$$

$$\Rightarrow |\bar{u}-u(0)| \le \frac{1}{\lambda_N(Q)} \int_Q \sum_{k=1}^N |z_k| \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(tz) \right| dt\,dz$$

$$\Rightarrow |\bar{u}-u(0)| \le \frac{r}{r^N} \int_Q \sum_{k=1}^N \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(tz) \right| dt\,dz$$

(Linealidad de las integrales y Tonelli)
$$= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \sum_{k=1}^N \int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(tz) \right| dz\,dt$$

Realizando un cambio de variable $y = tz$,

$$|\bar{u}-u(0)| \le \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \sum_{k=1}^N \int_{tQ} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(y) \right| \frac{1}{t^N}\,dy\,dt$$

por otro lado, como

$$\int_{tQ} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(y) \right| dy \le \left(\int_{tQ} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(y) \right|^p dy \right)^{1/p} \lambda_N(tQ)^{\frac{1}{p'}}$$

Como $tQ \subseteq Q$, $\forall t \in [0,1]$, se sigue que $\qquad \lambda_N(tA) = t^N \lambda_N(A)$

$$|\bar{u} - u(0)| \leq \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \frac{1}{t^N} \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\left(\int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(y) \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}} (t^N r^N)^{\frac{1}{p'}} \, dt$$

$$\therefore \; |\bar{u} - u(0)| \leq r^{\frac{N}{p'} - N + 1} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \int_0^1 t^{\frac{N}{p'} - N} \, dt$$

$$= r^{\frac{N}{p'} - N+1} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \left. \frac{t^{\frac{N}{p'} - N + 1}}{\frac{N}{p'} - N + 1} \right|_0^1$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\frac{N}{p} + \frac{N}{p'} = N$$

$$\frac{N}{p'} - N = \frac{N}{p}$$

$$= \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1 - \frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}$$

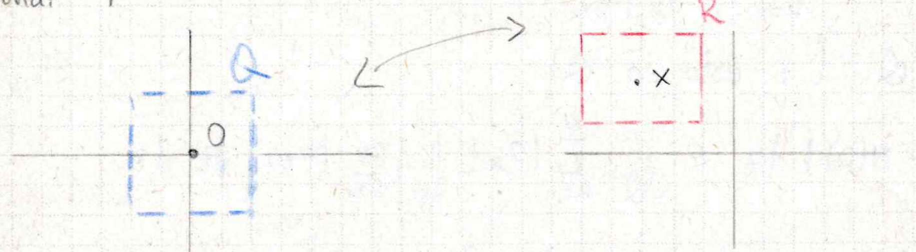
Por lo tanto, hemos probado que

$$|\bar{u} - u(0)| \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1 - \frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Notar que, por traslación,

$$\forall x \in R \; : \; |\bar{u} - u(x)| \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1 - \frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^q(R)}$$

donde R es el hipercubo que contiene a x y de medida de lebesgue N-dimesional r^N



$\int_0^a t^r \, dt$ c+to con $r > -1$ Condición suficiente.

Viernes, 28 de junio de 2024.

Continuando con la demostración

Para la generalización realizada, podemos considerar

$$v(y) = u(y - x)$$

$$|\bar{v} - v(x)| \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1 - \frac{N}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(R)} \qquad \text{con } R := Q - \{x\}. \; (\forall x \in R)$$

$$\lambda_N(R) = r^N, \quad x \in R.$$

Por traslaciones, se deduce que

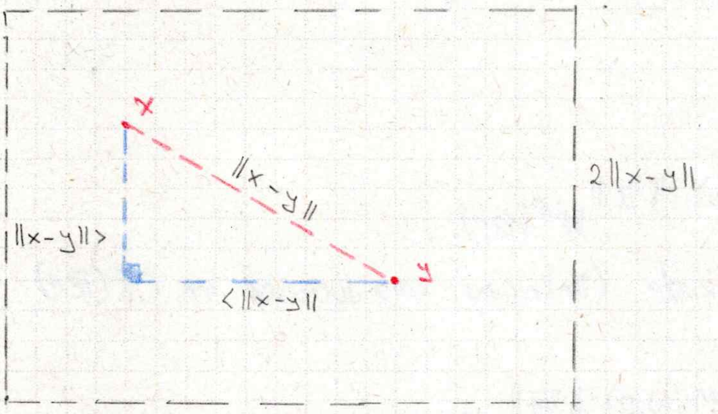
$$\forall x \in R \qquad |\bar{u} - v(x)| \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1 - \frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p}$$

No necesariamente contiene al cero.

Ahora,

$$\forall x,y \in R : \; |u(x) - u(y)| \leq |u(x) - \bar{u}| + |\bar{u} - u(y)|$$
$$\leq 2\, \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p}$$

Sean $x, y \in \mathbb{R}^N$, con $x \neq y$.



Hipercubo de lados paralelos a los ejes.

Considerando

$$r = 2\|x-y\|_{\mathbb{R}^N},$$

$$|u(x) - u(y)|$$
$$\leq \frac{2\, 2^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|x-y\|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(R)}$$
$$\leq \frac{2^{2-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|x-y\|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Tomando, $C = 2^{2-\frac{N}{p}}\left(1-\frac{N}{p}\right)^{-1} > 0$, se tiene el resultado.

Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Por densidad, existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u \text{ en } W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \qquad [*]$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x,y \in \mathbb{R}^N)$$

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq C\|x-y\|_{\mathbb{R}^N}^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

De [*], $\nabla u_n \to \nabla u$ en L^p, i.e. $\|\nabla u_n\|_{L^p} \to \|\nabla u\|_{L^p}$, y como $u_n \to u$ en L^p existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \quad \text{ctp } x \in \mathbb{R}^N.$$

Así,

$$|u_{n_k}(x) - u_{n_k}(y)| \leq C\|x-y\|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u_{n_k}\|_{L^p}$$

Haciendo $k \to +\infty$:

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|x-y\|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p} \quad \text{ctp } x,y \in \mathbb{R}^N.$$

Finalmente, obtengamos la estimación, $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad |u(x)| \leq |u(x) - \bar{u}| + |\bar{u}|$$
$$\leq \left(1-\frac{N}{p}\right)^{-1} \|\nabla u\|_{L^p} + \left|\frac{1}{m(R)}\int_R u(x)\,dx\right|$$

Consideremos R un hipercubo de lado ℓ que contenga a x. Así,

$$|u(x) - \bar{u}| \leq \left(1-\frac{N}{p}\right)^{-1} \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\leq \left(1-\frac{N}{p}\right)^{-1} \|\nabla u\|_{L^p(R)} + \left(\int_R |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\lambda_N(R)\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq \left(1-\frac{N}{p}\right)^{-1} \|\nabla u\|_{L^p(R)} + \|u\|_{L^p(R)}$$

$$\leq \text{máx}\left\{1, \left(\frac{1}{1-\frac{N}{p}}\right)\right\} \left(\|\nabla u\|_{L^p(R)} + \|u\|_{L^p(R)}\right)$$

$$= \text{máx}\left\{1, \left(1-\frac{N}{p}\right)^{-1}\right\} \|u\|_{W^{1,p}}$$

$$\therefore \|u\|_{L^\infty} \leq M(N,p) \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Ahora, si tomamos $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}$, y además

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \qquad |u_{n_k}(x)| \leq \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M(N,p) \|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

Así, utilizando una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge ctp en $\mathbb{R}^N$ a u, se deduce que

$$|u(x)| \leq M(N,p) \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \quad x \text{ ctp } \mathbb{R}^N.$$

gracias a lo cual, se concluye el resultado.

Es distinto:

- u función α-Holderiana
- $u \in C^{0,\alpha}$
  - $\|u\|_{C^{0,\alpha}} < +\infty$
  - u es acotada

Observación: 1) Del teorema de Morrey, podemos considerar una función $\tilde{u}$ continua y acotada en $\mathbb{R}^N$ tal que

$$u = \tilde{u} \quad \text{ctp en } \mathbb{R}^N, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Así, toda función en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, posee un representante, continuo y acotado.

De esta manera, $\tilde{u} \in C^{0,1-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$ (Hölder) y en consecuencia

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N).$$

P.D. $(\exists C>0)(\forall u \in W^{1,p}) \quad \|u\|_{C^{0,1-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$

Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Existe $\tilde{u} = u$ ctp y $\tilde{u} \in C^{0,1-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$

$$\|\tilde{u}\|_{C^{0,1-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)} = \|\tilde{u}\|_{C^0(\mathbb{R}^N)} + \sup_{x\neq y} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|}{\|x-y\|^{1-\frac{N}{p}}}$$

$$\leq \|\tilde{u}\|_{C^0(\mathbb{R}^N)} + C_2 \|\nabla\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

$$= \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + C_2 \|\nabla\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq C_1 \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + C_2 \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq (C_1+C_2) \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

Observación: Una función Hölder continua es una función uniformemente continua, pero no necesariamente Lipschitz continua.

Si ahora consideramos $p=+\infty$,

$$W^{1,\infty} \cong \text{Lipschitz continua} \; / \; \text{Teorema de Rademacher.}$$

Martes, 2 de julio de 2024.

Teoremas de inmersión de Sobolev.

- $1 \leq p < N$ $\quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$
- $p = N$ $\quad W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, +\infty) \quad N \geq 2.$
- $p > N$ $\quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N), \quad \alpha = 1 - \frac{N}{p}$

Recordemos que

$(C^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{C^{0,\lambda}})$ es un espacio de Banach, con

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{C^0(\mathbb{R}^N)} + [u]_{0,\lambda}$$

$$\|u\|_{C^0(\mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u(x)|$$

y u acotada.

Ahora, consideremos índices de regularidad mayores.

$$u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \partial_i u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$
$$\partial_i u \in L^q \quad \forall q \in [p, p^*]$$

$\Rightarrow u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$. Por lo tanto, se tiene que

$$u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N) \quad r \in [q, q^*]$$

Así, si $q = p^*$, entonces $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{r} - \frac{2}{N}$ (Consideremos solo el caso p^*)

$$\therefore \; W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^{**}} \quad \text{cuando } 2p < N.$$

Más aún,

$$1 \leq 2p < N \; : \; W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^{**}} \qquad \frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N}$$

$$W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^{**}].$$

Caso 2: $2p = N$, entonces

$$W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, N]$$

análogamente a lo anterior,

$$W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N) \quad \forall r \in [p, +\infty[$$

$\frac{N^2}{N-p} > \frac{Np}{N-p} > \frac{N^2}{2N-p}$

· **Caso $2p > N$.** $\qquad N^2 > Np > \frac{N^2}{2}$

$Np > p^2 \qquad p^* = \frac{Np}{N-p}$

↳ **Subcaso $N > p > \frac{N}{2}$**

$$u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$$
$$\therefore u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

$N > p > \frac{N}{2}$

$\frac{1}{N} < \frac{1}{p} < \frac{2}{N}$

$0 < \frac{1}{p} - \frac{1}{N} < \frac{1}{N}$

$0 < \frac{1}{p^*} < \frac{1}{N} \Rightarrow p^* > N$

Como $p^* > N$

$$u \in W^{1,p^*} \hookrightarrow C^{0,\beta}(\mathbb{R}^N) \qquad \beta = 1 - \frac{N}{p^*} = 1 - \frac{N}{p} + 1 = 2 - \frac{N}{p}$$

$$\therefore W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\mathbb{R}^N) \qquad \beta = 2 - \frac{N}{p} \left(\beta = 2 - \frac{N}{p}\right) \Leftrightarrow \underbrace{2 > N > p}$$

↳ **Subcaso $p > N$.**

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad \partial_i u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \qquad \alpha = 1 - \frac{N}{p}$$
$$\therefore W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \qquad \alpha = 1 - \frac{N}{p}$$

Si una función tiene todas sus derivadas parciales y estas son continuas entonces la función es de clase C^1.

$$\left(C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{C^{1,\alpha}}\right) \qquad \|u\|_{C^{1,\alpha}} = \|u\|_{C^1} + [u]_{1,\alpha}$$

$$[u]_{1,\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|Du(x) - Du(y)|}{\|x-y\|^\alpha}$$

↳ **Subcaso $p = N$.**

$$u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N) = W^{2,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty)$$

En particular, $\qquad \partial_i u \in W^{1,N} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{N+1}(\mathbb{R}^N)$$
$$\therefore \partial_i u \in W^{1,N+1}(\mathbb{R}^N).$$

Gracias a las inmersiones anteriores $\quad \partial_i u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$

$$\Rightarrow u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \qquad \alpha = 1 - \frac{N}{p}$$

Miércoles, 3 de junio de 2024.

Recapitulación:

① $\frac{N}{2} < p < N$

$$W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \qquad \alpha = 2 - \frac{N}{p}$$

$$\boxed{W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\mathbb{R}^N)}$$

$\frac{N}{p} \notin \mathbb{Z} \qquad \frac{1}{2} < \frac{p}{N} < 1 \qquad \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor = 1$

$1 < \frac{N}{p} < 2 \qquad l = 2 - \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor - 1 \in \mathbb{N}$

$$\beta = \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor - \frac{N}{p} + 1$$

② $p > N$

$$W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{1,\lambda}(\mathbb{R}^N) \qquad \lambda = 1 - \frac{N}{p}$$

$$\frac{N}{p} \notin \mathbb{Z} \qquad 0 < \frac{N}{p} < 1 \qquad \left[\frac{N}{p}\right]$$

③ $p = N$

$$1 = \frac{N}{p} \in \mathbb{Z} \qquad W^{2,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty)$$

$$\partial_i u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty)$$

$$\therefore u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty)$$

$$\therefore W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\alpha} \quad \forall 0 < \alpha < 1.$$

Resumen:

$$W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \begin{cases} C^{l,\beta}(\mathbb{R}^N) & \frac{N}{p} \notin \mathbb{Z} \\ C^{l,\alpha}(\mathbb{R}^N) & \frac{N}{p} \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in (0,1) \end{cases}$$

Corolario.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < +\infty$. Tenemos los siguientes casos:

① $mp < N$ $\qquad W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in \left[p, \frac{Np}{N-mp}\right]$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N} \qquad \forall q \in [p, r]$$

② $mp = N$ $\qquad W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, +\infty)$

③ $mp > N$

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \begin{cases} ① \; C^{l,\beta}(\mathbb{R}^N) & \frac{N}{p} \notin \mathbb{Z} & l = m - \left[\frac{N}{p}\right] - 1, \quad \beta = \left[\frac{N}{p}\right] - \frac{N}{p} + 1 \\ ② \; C^{l,\alpha}(\mathbb{R}^N) & \frac{N}{p} \in \mathbb{Z} & \alpha \in (0,1). \end{cases}$$

Las inmersiones nos dicen que si $u \in W^{m,p}$ existe $\tilde{u}$ en $C^{m-[\frac{N}{p}]-1,\beta}$ considerando $mp > N$ y $N/p \notin \mathbb{Z}$ tal que $u = \tilde{u}$ ctp.

Teorema. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado con frontera Lipschitz continua, $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < +\infty$.

Se tienen las mismas inmersiones que el caso $\mathbb{R}^N$.

① $mp < N$: $\quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in \left[p, \frac{Np}{N-mp}\right]$

② $mp = N$: $\quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty)$

③ $mp > N$: $\quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\beta}(\Omega)$ con $\beta = \begin{cases} \left[\frac{N}{p}\right] - \frac{N}{p} + 1 & \frac{N}{p} \notin \mathbb{Z} \\ r \quad r \in (0,1) & \frac{N}{p} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- También se cumple el resultado para

$$\mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}. \quad \text{Semiespacio.}$$

- Además, si Ω es acotado se tienen más propiedades de integrabilidad.

① $mp < N$: $\quad \forall q \in \left[1, \frac{Np}{N-mp}\right]$

② $mp = N$: $\quad \forall q \in [1, +\infty)$

Gracias a las contenencias de los espacios $L^p(\Omega)$ cuando Ω es acotado.

- Para el caso ③ gracias a la regularidas las funciones admiten un representante con extensión continua a la frontera.

Para abordar la demostración es necesario considerar los operadores de extensión o prolongación:

$$E : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$$

el cual es lineal y continuo.

- Se pueden relajar las hipótesis del acotamiento pero necesariamente el conjunto debe tener frontera Lipschitz.

- Se tienen las mismas inmersiones para el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$, considerando

En efecto, como

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow F \quad (\text{Espacio respectivo})$$

Ω no vacío y abierto.

Teorema (Inmersiones de Sobolev compactas) (Rellich-Kondrachov)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado, (No se puede relajar el acotamiento) con frontera Lipschitz continua.

① Si $mp < N$; $\quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in \left[1, \frac{Np}{N-mp}\right)$

② Si $mp = N$ $\quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$.

③ $mp > N$: $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\lambda}(\Omega)$ $\quad 0<\lambda<\left[\frac{N}{p}\right]-\frac{N}{p}-1$

Nota: Si X, Y son espacios normados, X se inyecta compactamente en Y, denotado por $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ si

$$id|_X : X \to Y \text{ es un operador lineal compacto.}$$

Observación: Se tienen las mismas inyecciones compactas para $W_0^{m,p}(\Omega)$ con Ω abierto no vacío y acotado (sin la frontera regular)

Jueves, 4 de julio de 2024.

Capítulo 2: Análisis de ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden.

Ecuación de convección - difusión - reacción (Ecuación de transporte)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\vec{v}\cdot u) - \operatorname{div}(\Gamma \nabla u) + f(u) + S$$

donde
$u : \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}.$
$v : \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N.$
$\Gamma : \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N\times N}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s\in\mathbb{R}\quad f(u(s)),\quad f(u) = f\circ u$
$S : \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N \to$

Términos:

$\frac{\partial u}{\partial t}$: término no estacionario o evolutivo.

$-\operatorname{div}(\Gamma\nabla u)$: término difusivo

$\operatorname{div}(\vec{v}u)$: término convectivo.

$f(u)$: término de reacción o reactivo.

S : término externo (fuente externa)

Caso particular

Si $\Gamma(x) = Id \in \mathbb{R}^{N\times N}$, entonces

$$-\operatorname{div}(\Gamma\nabla u) = -\operatorname{div}(\nabla u) = -\Delta u.$$

* $\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + S$ modelo difusivo evolutivo. (Ecuación del calor)

Propagación del calor a través de una región del espacio.

Ω.

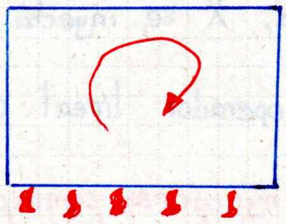
$T = 20°C$

u: temperatura.

Fenómeno convectivo: Transferencia de energía mediante movimiento.

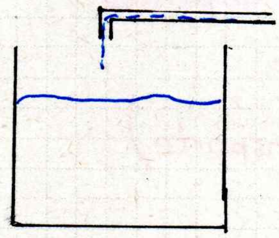
$\vec{v}$: campo de velocidades.

Horno.



Término de reacción.

S



$f(u)$: reacción de sustancias que afectan el campo escalar.

Como vamos a estudiar el modelo estacionario, consideremos:

$$-\operatorname{div}(\Gamma \nabla \omega) = \operatorname{div}(\vec{v}\,\omega) + f(\omega) + S.$$

Este término puede ser no lineal. Para nuestro estudio siempre lo vamos a considerar lineal.

En su forma exaustiva, se tiene la siguiente expresión.

$$-\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \Gamma_{kj} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \frac{\partial}{\partial x_k}(v_k \omega) + p\omega + S.$$

Expandiendo la forma anterior

$$-\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \Gamma_{kj} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_k \partial x_j} - \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \frac{\partial \Gamma_{kj}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\omega + \sum_{k=1}^{\tilde{N}} v_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} + p\omega + S$$

Agrupando,

$$\underbrace{-\sum \sum \Gamma_{kj} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_k}}_{\text{Derivadas de segundo orden}} \underbrace{- \sum \sum \frac{\partial \Gamma_{kj}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \sum v_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k}}_{\text{Derivadas de primer orden}}$$

Forma no divergencia.

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + p\right)}_{\text{término lineal.}} \omega + S.$$

Las formas divergencia y no divergencia no son equivalentes. La forma de no divergencia requiere más propiedades para regresar a la forma divergencia.

En forma de operador, se puede definir como

$$L := -\operatorname{div}(\Gamma \nabla) + \operatorname{div}(\vec{v}) + id. \qquad \text{(Forma divergencia)}$$

$$L := -\sum\sum \Gamma_{kj} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \sum a_k \frac{\partial}{\partial x_k} + id. \qquad \text{(Forma no divergencia)}$$

Definición (Uniformemente elíptico)

Se dice que L es uniformemente elíptico si existe $\alpha > 0$ tal que

$$\forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad \sum_{k,j=1}^{N} \Gamma_{kj}\, \xi_k \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2_{\mathbb{R}^N}$$

$$\xi^T \Gamma \xi \geq \alpha \|\xi\|^2_{\mathbb{R}^N}$$

$$\langle \Gamma \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \geq \alpha \|\xi\|^2_{\mathbb{R}^N}$$

Si las funciones son definidas ctp, la igualdad es ctp.

Analizar el modelo estacionario con condiciones de frontera.

Condiciones Dirichlet:

Definimos los valores en la frontera $w = g$ sobre $\partial\Omega$.

- $g = 0 \Rightarrow$ CD homogéneas
- $g \neq 0 \Rightarrow$ CD No homogéneas.

Condiciones de Neumann

$\Gamma \nabla w \cdot \hat{n} = g$ sobre $\partial\Omega$.

$g = 0 \Rightarrow$ CN homogéneas

$g \neq 0 \Rightarrow$ CN no homogéneas.

Condiciones de Robin

$h \cdot w + \Gamma \nabla w \cdot \hat{n} = g$ sobre $\partial\Omega$

$g = 0 \Rightarrow$ CR homogéneas

$g \neq 0 \Rightarrow$ CR no homogéneas.

Problema a valores en la frontera con condiciones de Dirichlet homogéneas.

$$(D_H) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado.

Se dice que $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una solución clásica de (D_H) si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que satisface (D_H) en todo punto de $\bar{\Omega}$

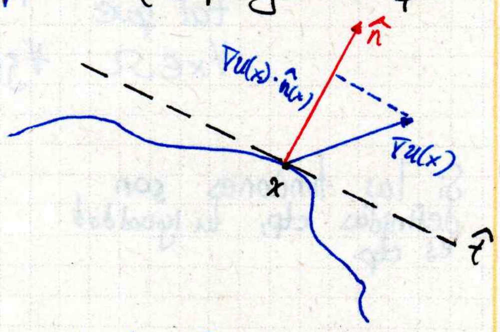
Método: Formulación variacional.

Hallar la formulación variacional y enunciar el problema variacional.

Sea $v \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ (Función suave, que tiene, junto a todas sus derivadas, extensión a la frontera)

$$-\Delta u(x) v(x) + u(x) v(x) = f(x) v(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

Supongamos que se puede aplicar la integración por partes: (Supongamos que Ω es suficientemente regular)



$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \hat{n}) \cdot v \, ds(x) + \int_{\Omega} uv \, dx$$
$$= \int_{\Omega} fv \, dx.$$

Como no poseemos información sobre los valores en la frontera, consideramos $v \in C_c^{\infty}(\Omega)$, con lo cual obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx \qquad \forall v \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

Existencia de soluciones en espacios de Hilbert.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx \qquad \forall v \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

- Si $\nabla u \in L^2(\Omega)$ y $u \in L^2(\Omega)$, entonces $u \in H^1(\Omega)$
- Si $\nabla v \in L^2(\Omega)$ y $v \in L^2(\Omega)$, entonces $v \in H_0^1(\Omega)$ Pues originalmente $v \in C_c^{\infty}(\Omega)$ y es denso en $H_0^1(\Omega)$

si $f \in H^{-1}(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces el producto en dualidad está bien definido

$$\langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Problema. Dado $f \in H^{-1}(\Omega)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dado que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, el espacio que absorbe o define esta condición de frontera es $H_0^1(\Omega)$.

Problema variacional. Dado $f \in H^{-1}(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Viernes, 5 de julio de 2024.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado.

$$(D_H) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Omega. \end{cases}$$

Dado $f \in H^{-1}(\Omega)$, queremos mostrar la existencia de $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega u v \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$u \in H_0^1(\Omega)$ pues el espacio $H_0^1(\Omega)$ absorbe la condición de frontera de u.

Analicemos:

- Si $N=1$, entonces $H^1(I) \hookrightarrow C^0(\overline{I})$ donde I es un intervalo acotado o no.
  si tomamos $I=(a,b)$, $u \in H^1(I)$, $u(a)$ y $u(b)$ considerando el representante continuo de u, los valores $u(a)$ y $u(b)$ están bien definidos.

  Consideremos el problema
  $$\begin{cases} -u'' + u & \text{en } (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

  Entonces, si dado $f \in H^{-1}(I)$ existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que
  $$\int_a^b u'v' \, dx + \int_a^b uv \, dx = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H_0^1(I)$$

  el cual cumple que $u(a) = u(b) = 0$.

- Si $N \geq 2$: $H^1(\Omega) \not\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ en general.

Teorema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado con frontera Lipschitz o $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

Existe un único $\gamma \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\partial\Omega))$

Donde

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

tal que

$$\gamma(u) = u\big|_\Omega \qquad \forall u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

$\gamma(u)$ representa la traza de u sobre $\partial\Omega$. (Huella que deja u en la frontera)

A γ se lo conoce como operador de traza.

Propiedades. • γ no es sobreyectivo. [Contraejemplos]

- $\operatorname{Img}(\gamma) = \gamma(H^1(\Omega))$: espacio de trazas de $H^1(\Omega)$. Más aun, es usual denotar de la siguiente forma el espacio de trazas

$$H^{\frac{1}{2}}(\Omega) = \gamma(H^1(\Omega)).$$

$$u \in H^1(\Omega) \qquad u \in H^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) = H^{\frac{1}{2}}(\Omega).$$

Se pierde regularidad al definir la traza.

Consideremos la norma en el espacio de trazas:

$$\|u\|^2_{H^{1/2}(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\|x-y\|^{\frac{1}{2}(n+1)}}\right)^2 ds_x\, ds_y$$

entonces $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ es un espacio de Banach.

- Como no es invertible podemos únicamente de los inversos laterales.

<u>Inversa por derecha.</u>

Existe $G \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega), H^1(\Omega))$ tal que $\gamma \circ G = id_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$.

$$g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \Rightarrow \exists\, u_g \in H^1(\Omega) \text{ tal que } \gamma(u_g) = g.$$

Al operado G se lo conoce como operador Lifting o de elevación.

Teorema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto y acotado con frontera Lipschitz o $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Entonces

$$H^1_0(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \;:\; \gamma u = 0 \text{ en } L^2(\partial\Omega) \}$$

Definición. Se dice que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una solución débil de (D_H) si $u \in H^1_0(\Omega)$ y verifica la formulación variacional, es decir que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \;:\; \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega uv\, dx = \langle f, v\rangle_{H^{-1}\times H^1_0}$$

En otras palabras, una solución débil de (D_H) es una solución del problema variacional de (D_H).

Teorema (Lema de Lax-Milgram)

Sean H un espacio de Hilbert y $a : H\times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal si a es continua [es decir existe $C>0$ tal que $\forall (x,y) \in H\times H$

$$|a(x,y)| \leq C\|x\|_H \|y\|_H]$$

y a es coercisiva [es decir, existe $\alpha > 0$ tal que $\forall x \in H$

$$a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2_H]$$

entonces, para todo $\ell \in H^*$ existe único $u_\ell \in H$ tal que

$$a(x, u_\varphi) = \langle \varphi, x \rangle_{H^* \times H} \quad \forall x \in H$$

y más aún $\frac{1}{\alpha}\|\varphi\|_{H^*} \geq \|u_\varphi\|_H$ (Estimación)

Teorema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado. Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}$$

Más aún, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Demostración

Definamos

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$(u, v) \mapsto a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx$$

$$\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \varphi(v) := \langle f, v \rangle$$

- a es bilineal
- a es continua: sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$|a(u,v)| = |\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)}| \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

- a es coerciva

$$a(u,u) = \langle u, u \rangle_{H^1} = \|u\|_{H^1}^2$$

- φ es lineal
- φ es acotada $v \in H_0^1$ $|\varphi(v)| = |\langle f, v \rangle| \leq \|f\|_{H^{-1}} \|v\|_{H^1}$

Por el lema de Lax-Milgram existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad a(u,v) = \varphi(v).$$

Y más aún, si consideramos $u = v \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\|u\|_{H^1}^2 = a(u,u) = \varphi(u) \leq \|f\|_{H^{-1}} \|u\|_{H^1}$$
$$\therefore \|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{H^{-1}}.$$

Observaciones: 1) $f = 0 \Rightarrow u = 0$ es la única solución débil de (D_H)

2) El problema (D_H) es un problema bien planteado en el sentido de Hadamar.

Es decir, el problema (D_H) cumple con las siguientes propiedades.

1) Existe solución (débil)
2) Es única dicha solución (débi)
3) La solución (débil) depende continuamente del dato f.

Podemos considerar el siguiente operador

$$T : H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$
$$f \longmapsto Tf = u.$$

T es continua, T es lineal (remitiéndose a la formulación variacional asociada a cada elemento del dual)

P.D. $(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall f_1, f_2 \in H^{-1}(\Omega)) \quad T(\lambda f_1 + f_2) = \lambda T(f_1) + T(f_2)$

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f_1, f_2 \in H^{-1}(\Omega)$.

- $f_1 \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow \exists!\, u_1 \in H_0^1(\Omega) \quad Tf_1 = u_1$
$$\langle u_1, v\rangle_{H^1} = \langle f_1, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$
- $f_2 \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow \exists!\, u_2 \in H_0^1(\Omega) \quad Tf_2 = u_2$
$$\langle u_2, v\rangle_{H^1} = \langle f_1, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$
- $\lambda f_1 \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow \exists!\, u_3 \in H_0^1(\Omega) \quad T(\lambda f_1) = u_3$
$$\langle u_3, v\rangle_{H^1} = \langle \lambda f_1, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$
- $\lambda f_1 + f_2 \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow \exists!\, \omega \in H_0^1(\Omega) \quad T(\lambda f_1 + f_2) = \omega.$
$$\langle \omega, v\rangle_{H_1} = \langle \lambda f_1 + f_2, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

P.D. $\omega = \lambda_1 u_1 + u_2$.

$$\langle \lambda u_1, v\rangle_{H^1} = \langle \lambda f_1, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1$$

$$\langle \lambda u_1 + u_2, v\rangle_{H^1} = \langle \lambda f_1 + f_2, v\rangle_{H} \quad \forall v \in H_0^1$$

$$\langle \lambda u_1 + u_2, v\rangle_{H^1} = \langle \omega, v\rangle_{H^1} \quad \forall v \in H_0^1$$

$$\langle \lambda u_1 + u_2 - \omega, v\rangle_{H^1} = 0 \quad \forall v \in H_0^1$$

$$\therefore \lambda u_1 + u_2 = \omega.$$

Martes, 9 de julio de 2024.

(Recapitulación)

Consideremos el problema (D_H), con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, no vacío y acotado y $f \in H^{-1}(\Omega)$

dado por

$$(D_H) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces, (D_H) posee una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$. Más aún, existe $C>0$ tal que

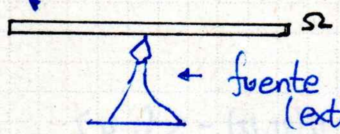
$$\|u\|_{H^1} \leq C \|f\|_{H^{-1}}$$

(D_H) es un problema bien planteado en el sentido de Hadamar.

1) Existe una solución débil. (Lax-Milgram)
2) Unicidad de la solución
3) Estabilidad de la solución [Dependencia continua de la solución respecto a los datos externos]

Si existe una perturbación en el dato externo, f. ¿la solución perturbada se aleja de f de forma continua?

(Material que conforma a Ω) (internos)



← fuente de calor f (externo)

- f ← original $\quad f \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow \exists!\, u_f \in H_0^1(\Omega)$
- $\tilde{f}$ ← perturbación $\quad \tilde{f} = f + \varepsilon g \in H^{-1}(\Omega)$

$\Rightarrow \exists!\, u_{\tilde{f}} \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u_f - u_{\tilde{f}}\|_{H^1} \leq C \|f - \tilde{f}\|_{H^{-1}}$$

(Estabilidad de la solución).

Para obtener la desigualdad, notemos que

$$a(u_f, v) = \langle f, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} \quad \forall v \in H_0^1$$
$$a(u_{\tilde{f}}, v) = \langle \tilde{f}, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} \quad \forall v \in H_0^1$$

$$\Rightarrow a(u_f - u_{\tilde{f}}, v) = \langle f - \tilde{f}, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1$$

$$\Rightarrow a(u_f - u_{\tilde{f}}, u_f - u_{\tilde{f}}) = \langle f - \tilde{f}, u_f - u_{\tilde{f}}\rangle$$

$$\Rightarrow \|u_f - u_{\tilde{f}}\|_{H^1}^2 \leq \|f - \tilde{f}\|_{H^{-1}} \|u_f - u_{\tilde{f}}\|_{H^1}$$

$$\therefore \|u_f - u_{\tilde{f}}\|_{H^1}^2 \leq \|f - \tilde{f}\|_{H^{-1}}$$

La utilidad de Lax-Milgram es obtener la existencia de la solución.

Supongamos que existen $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ soluciones débiles de (D_H).

$$a(u_1, v) = \langle f, v\rangle_{H^{-1}\times H} \quad \text{y} \quad a(u_2, v) = \langle f, v\rangle_{H^{-1}\times H} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$$

$$\Rightarrow \|u_1 - u_2\|_{H^1}^2 = 0$$

$$\therefore u_1 = u_2 \quad \text{en } H^1$$

$$\therefore u_1 = u_2 \quad \text{ctp en } \Omega.$$

Observación (Tripleta de Gelfand)

Recordemos que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$$
$$V \qquad\qquad H^* \cong H \qquad\qquad V^*$$

$$\langle \varphi, v\rangle_{H^* \times H} = \langle \varphi|_V, v\rangle_{V^* \times V}$$

Si $\varphi \in L^2(\Omega)$ $\quad \langle \varphi, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} = \langle \varphi, v\rangle_{L^2(\Omega)^* \times L^2(\Omega)} = \langle \varphi, v\rangle_{L^2}$

Para el problema (D_H) no identificamos $H_0^1(\Omega) \cong H^{-1}(\Omega)$

note que la norma en el dual no coincide.

El producto en dualidad coincide con el producto escalar si $\varphi \in L^2(\Omega)$.

Proposición.

$u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de (D_H)

$$\Leftrightarrow \quad u \in H_0^1(\Omega),\ J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$$

donde

$$J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle f, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$$

Demostración.

($\Leftarrow$) Notar que $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ pues

$$J = \frac{1}{2} a \circ \xi + F$$

$$\xi : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \qquad F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto (v, v) \qquad\qquad v \mapsto \langle f, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$$

ξ es diferenciable pues cada función componente es diferenciable en $H_0^1(\Omega)$

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$

$$J'(u) = \frac{1}{2} a'(\xi(u)) \circ \xi(u) + F'(u).$$

Sea $h \in H_0^1(\Omega)$,

$$J'(u)h = \frac{1}{2} a'(u,u)(h,h) - \langle f, h\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$$
$$= \frac{1}{2}\left[a(u,h) + a(h,u)\right] - \langle f, h\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$$
$$= a(u,h) - \langle f, h\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$$

Como u minimiza J, entonces $J'(u)h = 0 \quad \forall h \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u,h) = \langle f, h\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} \qquad \forall h \in H_0^1(\Omega)$$

Así, u es solución débil de (D_H)

$\Rightarrow)$ Sea $v \in H_0^1(\Omega)$

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} - \frac{1}{2}a(u,u) + \langle f, u\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$$

$$= \frac{1}{2}a(v,v) - \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, v-u\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$$

Ahora, como

$$a(v-u, v-u) = a(v, v-u) - a(u, v-u)$$
$$= a(v,v) - a(v,u) - a(u,v) + a(u,u)$$
$$= a(v,v) + a(u,u) - 2a(u,v)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a(v-u, v-u) = \frac{1}{2}a(v,v) + \frac{1}{2}a(u,u) - a(u,v)$$

$$= \frac{1}{2}a(v,v) - \frac{1}{2}a(u,u) - a(u, v-u)$$

$$= \frac{1}{2}a(v,v) + \frac{1}{2}a(u,u) - a(u,v)$$

$$= \frac{1}{2}a(v-u, v-u) = \frac{1}{2}\|v-u\|_{H^1}^2 \geq 0$$

Observación: Note que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado con frontera Lipschitz, $f \in C^0(\overline{\Omega})$ y $u_f \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, entonces la solución débil del problema (D_H) u, es la solución clásica de (D_H).

Como $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de (D_H), entonces

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \langle f, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$$

Viernes, 12 de julio de 2024.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado con frontera Lipschitz, $f \in C^0(\overline{\Omega})$ $u_f \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ solución débil de

$$(D_H) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

- ¿$f \in C^0(\Omega) \Rightarrow f \in H^{-1}(\Omega)$? No, por esto $f \in C^0(\overline{\Omega})$.

  Si ahora $f \in C^0(\overline{\Omega}) \Rightarrow \varphi_f \in H^{-1}(\Omega)$

Y, por el Lema de Lax-Milgram, existe único $u_f \in H_0^1(\Omega)$ solución débil de (D_H)

Recuperar la solución clásica de (D_H).

Si $u_f \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$, entonces u_f es una solución clásica de (D_H)

Note que $C^2(\overline{\Omega})$ garantiza la integrabilidad de las derivadas.

P.D. $\begin{cases} \forall x\in\Omega & -\Delta u_f(x) + u_f(x) = f(x), \\ \forall x\in\partial\Omega & u_f(x)=0. \end{cases}$

Pues por caracterización
$\ell_f : H_0^1 \to \mathbb{R}$
$v \mapsto \int_\Omega f v\, dx$

$$\forall v\in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u_f \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega u_f v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$$

En particular,

$$\forall v\in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega \nabla u_f \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega u_f v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$$

Aplicando integración por partes de manera exaustiva

$$\int_\Omega \nabla u_f \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega u_f v\, dx$$

$$= -\sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega \frac{\partial^2 u_f}{\partial x_i} v\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_f}{\partial x_i} v n_i\, d\sigma \right)$$

$$= -\int_\Omega \Delta u_f\, v\, dx$$

Por lo tanto,

$$\forall v\in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega \big(-\underbrace{\Delta u_f}_{\in C^0(\bar\Omega)} + \underbrace{u_f}_{\in C^0(\bar\Omega)} - f\big) v\, dx = 0$$

Por el Lema fundamental del cálculo de variaciones,

$$-\Delta u_f + u_f = f \quad \text{ctp en } \Omega$$

$$\Rightarrow -\Delta u_f + u_f = f \quad \text{en } \Omega \quad \left(\text{Hecho previamente, argumentando por contradicción}\right)$$

$u\in H_0^1(\Omega)\cap C^2(\bar\Omega) \Rightarrow \gamma u = u|_{\partial\Omega}$ y además $\gamma u = 0$ en $L^2(\partial\Omega)$ pues $u\in H_0^1(\Omega)$.

$$\Rightarrow u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{ctp en } \partial\Omega$$

$$\Rightarrow u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad \left(\text{De manera similar a lo hecho anteriormente}\right)$$

Problema de Dirichlet no homogéneo.

Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado.

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde f y g son funciones dadas.

Problema variacional: Supongamos que $u\in C^2(\bar\Omega)$, $f\in C^0(\bar\Omega)$ y $g\in C^0(\partial\Omega)$.

Sean $v\in C^\infty(\bar\Omega)$ y $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ con frontera Lipschitz

Entonces

$$-\Delta u v + uv = fv \quad \text{en } \Omega$$

Integrando sobre Ω

$$-\int_\Omega \Delta u \, v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx$$

integración por partes

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v \, dx = \int_\Omega fv \, dx$$

Recordando la notación $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \hat{n}$ (derivada normal de u)

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla v \, dx \underbrace{- \int_{\partial\Omega} \cancel{\frac{\partial u}{\partial n} v \, dS(x)}}_{\text{No tenemos valores prescritos en la frontera.}} + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx$$

$\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$: $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx$

Derivación del problema variacional

Si $u \in H^1(\Omega)$, entonces

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}$$

donde $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Problema variacional: Dado $f \in H^{-1}(\Omega)$, existe $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad : \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

$\gamma u \in L^2(\partial\Omega)$. Esto no nos dice que $\gamma u = g$.

Consideremos

$$V = \{ u \in H^{-1}(\Omega) : \gamma u = g \}$$

¿Qué estructura tiene V?

<u>Es convexo</u>

Sean $u_1, u_2 \in V$ y $\alpha \in [0,1]$, entonces

$$(1-\alpha) u_1 + \alpha u_2 \Rightarrow (1-\alpha)\gamma(u_1) + \alpha \gamma(u_2) = (1-\alpha) g + \alpha g = g.$$

V es cerrado

$$V = \gamma^{-1}(\{g\}) \qquad * \, g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

$V = \gamma^{-1}(\{g\})$ es cerrado en $H^1(\Omega)$.

$* \; V \neq \emptyset$. P.D. $\exists u \in H^1(\Omega)$ tq $\gamma(u) = g$.

Como $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \Rightarrow \exists u_g \in H^1(\Omega)$ tq $\gamma u_g = g \quad \therefore u_g \in V$.

con frontera Lipschitz.

Problema variacional. Dados $f \in H^{-1}(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, existe $u \in V$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \ : \ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

Note que en principio no podemos aplicar el Lema de Lax-Milgram pues

$u, v \in V$ $\qquad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx$

$$a(\cdot,\cdot) : H \times V \to \mathbb{R}$$

Teorema: Stampachia: Sean H un espacio de Hilbert, $K \subseteq H$ no vacío, convexo y cerrado, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ forma bilineal, continua y coerciva

$\forall \varphi \in H^*$, $\exists u! \in K$ $\quad a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \quad \forall v \in K$

$\overline{C_c^\infty(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$

$\overline{C_c^\infty(\overline{\Omega})} = H^1(\Omega)$

$\overline{C^\infty(\overline{\Omega})} = H^1(\Omega)$

Notemos que $u \in V$, $v \in V$, ¿$v-u$ en dónde está?

$u \in V \Rightarrow \gamma u = g$

$v \in V \Rightarrow \gamma v = g$ $\qquad \Rightarrow \gamma(u-v) = 0$

$\qquad \therefore u - v \in H_0^1(\Omega)$

Martes, 17 de julio de 2024.

Recapitulación:

Para que V sea no vacío, Ω debe tener frontera Lipschitz.

Problema variacional: (Al escribir este conjunto ya requerimos que Ω tenga frontera Lipschitz)

Dados $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, existe $u \in V$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \ : \ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}$$

Teorema de Stampacchia. Sea H un espacio de Hilbert, $K \subseteq H$, abierto, no vacío y convexo cerrado

$a : H \times H \to \mathbb{R}$ forma bilineal, continua y coerciva (H-elíptica)

$(\forall \varphi \in H^*) \, (\exists! \, u \in K)$

$(\forall v \in K) \, (a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle_{H^*, H})$

Teorema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto, acotado con frontera Lipschitz

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, entonces existe un único $u \in V$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \ : \ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}$$

donde $V = \{ u \in H^1(\Omega) : u - Rg \in H_0^1(\Omega) \}$.

Además, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right)$$

Demostración

$$a: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \mapsto a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx$$

Extensión de funcionales en espacios de Hilbert

- a es bilineal
- a es continua pues es acotada.

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq 2\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

- a es coerciva pues si $u \in H^1(\Omega)$

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \int_\Omega u^2 dx = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

- $\varphi: H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$
  $v \longmapsto \varphi(v) = \langle \tilde{f}, v\rangle_{(H^1)^* \times H^1}$

$f \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow f: H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

Existe un único $\tilde{f} \in H^1(\Omega)^*$ tal que tal que

$$\tilde{f}\big|_{H_0^1} = f, \quad \|\tilde{f}\|_{(H^1)^*} = \|f\|_{H^{-1}}$$

Note que $\varphi = \tilde{f} \in H^1(\Omega)^*$

Por teorema de Stampacchia, existe un único $u \in V$ tal que

$$\forall w \in V: \quad a(u, w-u) \geq \langle \tilde{f}, w-u\rangle$$

En particular, consideremos $v \in H_0^1(\Omega)$ y definamos

$$w := u + \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$w \in H^1(\Omega) \quad w - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Operador de elevación}}}{Rg} = u + \lambda v - Rg = \overbrace{u - Rg}^{\in H_0^1(\Omega)} + \overbrace{\lambda v}^{\in H_0^1(\Omega)} \in H_0^1(\Omega)$$

$$\therefore w \in V.$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad a(u, \lambda v) \geq \langle \tilde{f}, \lambda v\rangle = \langle f, \lambda v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} \quad (\text{Pues } \lambda v \in H_0^1(\Omega))$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\ \forall \lambda \neq 0, \quad \lambda a(u,v) \geq \lambda \langle f, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$$

Así, eligiendo $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ se tiene que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad a(u,v) = \langle f, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$$

$$a(u, u - Rg) = \langle f, u - Rg\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$$
$$\Rightarrow a(u,u) = \langle f, u - Rg\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} + a(u, Rg)$$
$$\leq \|f\| \, \|u - Rg\|_{H_0^1} + c\|u\|_{H^1} \|Rg\|_{H^1}$$
$$\Rightarrow \|u\|^2_{H^1} \leq \|f\| \, \|u - Rg\|_{H_0^1} + \tilde{C}\|u\|_{H^1} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

$\|u\|^2$

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1} &\leq \|f\|_{H^{-1}}\|u\|_{H^1} + C_1\|f\|_{H^{-1}}\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \tilde{C}\|u\|_{H^1}\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{H^{-1}}\|u\|_{H^1} + C_1\|f\|_{H^1}\|\gamma u\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \tilde{C}\|u\|_{H^1}\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}} \\
&= \|u\|_{H^1}\left(\|f\|_{H^{-1}} + C_1\|f\|_{H^1} + \tilde{C}\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&\leq \|u\|_{H^1}\left(C_3\|f\|_{H^{-1}} + \tilde{C}\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&\leq C_4\|u\|_{H^1}\left(\|f\|_{H^{-1}} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}\right)
\end{aligned}
$$

Así, se concluye lo requerido.

Jueves, 18 de julio de 2024.

Note que si ahora consideramos $u^2 = g$ sobre $\partial\Omega$, entonces el operador lineal.

Observación: Note que los problemas que estamos abordando están orientados a un trabajo con espacios de Hilbert.

A partir del problema homogéneo, note que

$$
\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}
\quad \xRightarrow{\text{Trabajar un problema auxiliar}} \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \Rightarrow \exists\, u_g \in H^1(\Omega) \text{ tq } \gamma(u_g) = g
$$

Digamos existe $u \in H^1(\Omega)$ solución débil de (P)

$$
\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \langle f, v\rangle & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \gamma(u) = g \end{cases}
$$

Así, definamos $z : u - u_g \in H_0^1(\Omega)$, entonces $u = z + u_g$ y entonces

$$\int_\Omega \nabla(z+u_g)\cdot\nabla v \, dx + \int_\Omega (z+u_g) v \, dx = \langle f, v\rangle$$

$$\int_\Omega \nabla z\cdot\nabla v \, dx + \int_\Omega \nabla u_g \cdot \nabla v + \int_\Omega zv \, dx + \int_\Omega u_g v \, dx = \langle f, v\rangle$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla z\cdot\nabla v \, dx + \int_\Omega zv \, dx = \langle f, v\rangle - \int_\Omega \nabla u_g \nabla v \, dx - \int_\Omega u_g v \, dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta z + z = F & \text{en } \Omega, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Viernes, 19 de julio de 2024.

Consideremos el siguiente problema.

$$(P)\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ Bu = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$u:\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es solución clásica de (P) si $u \in C^k(\overline{\Omega})$ donde k es el orden del operador diferencial L tal que verifica (P) en todo punto.

Formulación variacional de (P)

$$a(u,v) = F(v)$$

Dependiendo de donde se encuentren u y v

- ↳ Lax-Milgram
- ↳ Stampacchia

↳ Buscar problemas auxiliares que permitan las técnicas desarrolladas

$a(\cdot,\cdot)$ simétrica

- ↳ Teoría de puntos críticos
- ↳ Riesz

Buen planteamiento en el sentido de Hadamar.

- Existencia (Lax-Milgram, Stampachia, Teorema de Riesz)
- Unicidad (Independiente del teorema)
- Estabilidad (Dependencia continua de la solución respecto a los datos externos al dominio)

~~Si $(u_n)_n$ es una sucesión de soluciones de problemas (P_n)~~

(Continuidad.)

(soluciones)	u_n	u
	$\downarrow$	$\downarrow$
(Problemas)	P_n	P
	$\Uparrow$	$\Uparrow$
(Datos)	$d_n \longrightarrow$	d en F

Entonces $d_n \to d$ en F

$\Rightarrow u_n \to u$ en V

Sección: Problema de Neumann homogéneo.

$$(N_H)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

$f \in C^0(\Omega)$, $u:\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es solución clásica. Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y verifica en todo punto (N_H).

(Condiciones necesarias)

Supongamo que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, acotado, no vacío, con frontera regular.

Sea $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, entonces

$$-\Delta u \cdot v = fv \quad \text{en } \Omega$$

Integrando sobre Ω

$$\int_\Omega -\Delta u \, v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS(x) = \int_\Omega f v \, dx$$

Como $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces

$$\int_\Omega \underbrace{\nabla u}_{\in L^2} \cdot \underbrace{\nabla v}_{\in L^2} \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

$\nabla u \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^1(\Omega)$

$\nabla v \in L^2(\Omega) \Rightarrow v \in H^1(\Omega)$

¿Dónde está f?

$f \in (H^1(\Omega))^*$ al ser restringidas a $C_c^\infty(\Omega)$ se comportan como la función nula

$$f\Big|_{C_c^\infty(\Omega)} = 0$$

Problemas en la recuperación de la solución clásica si $f \in (H^1)^*$

Hasta ahora hemos llegado a:

Problema variacional: Dado $f \in L^2(\Omega)$, existe $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

Proposición: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto y acotado con frontera Lipschitz ($\partial\Omega$ de clase C^2). Además, suponga que $f \in C^0(\overline{\Omega})$ y $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

u es solución del PV $\Leftrightarrow$ u es solución clásica de (N_H)

Demostración.

$\Leftarrow$ Supongamos que u es solución clásica de (N_H)

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Multiplicando por $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, integrando sobre Ω (integral por partes),

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

Conociendo que $\overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{H^1} = H^1(\Omega)$, se tiene que si $v \in H^1(\Omega)$, existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $v_n \to v$ en $H^1(\Omega)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Pues $\langle \nabla u, \nabla v_n \rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{\text{continuidad}} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}$

$\nabla v_n \to \nabla v$ en $L^2(\Omega)$

Además, $u \in C^2(\overline{\Omega}) \subseteq H^1(\Omega)$ y por lo tanto $u \in H^1(\Omega)$

$\Rightarrow$ Supongamos que u es solución del PV, es decir, $u \in H^1(\Omega)$ y

$$\forall v\in H^1(\Omega): \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx$$

$\overline{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^{L^2(\partial\Omega)} = L^2(\partial\Omega)$

Aplicando integración por partes, para $v\in C^\infty(\overline{\Omega})$, se tiene que

$$\int_\Omega -\Delta u\, v\,dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n} v\,dS(x) = \int_\Omega f v\,dx$$

En particular, para $v\in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega -\Delta u v\,dx = \int_\Omega f v\,dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (-\Delta u - f)v\,dx = 0 \quad \forall v\in C_c^\infty(\Omega)$$

Por el LFCV, $-\Delta u = f$ en ctp en Ω y como f y Δu son continuas, entonces

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega.$$

Note que para que $\frac{\partial u}{\partial x_i} n_i \in C^1(\overline{\Omega})\subseteq H^1(\Omega)$, para cada $i\in\{1,\dots,N\}$, se requiere que la frontera sea de clase C^2.

Ahora, como $-\Delta u = f$ en Ω y por [*] (Formulación variacional)

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n} v\,dS(x)$$

$$\Rightarrow \left\langle \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right), \gamma(v)\right\rangle_{L^2(\partial\Omega)} = 0 \quad \forall v\in C^\infty(\overline{\Omega})$$

$\left(v_n \xrightarrow[C^\infty(\overline{\Omega})\ \ H^1(\Omega)]{} v\right)$

Por densidad, gracias a la continuidad del producto escalar y el operador traza

$$\left\langle \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right), \gamma(v)\right\rangle_{L^2(\partial\Omega)} = 0 \quad \forall v\in H^1(\Omega)$$

$$\left\langle \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right), w\right\rangle = 0 \quad \forall w\in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$$

Por densidad ($\underset{\in H^{1/2}(\partial\Omega)}{w_n} \to \underset{\in L^2(\partial\Omega)}{w}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ es continuo)

$$\left\langle \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right), w\right\rangle = 0 \quad \forall w\in L^2(\partial\Omega)$$

$$\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\in C^1(\overline{\Omega})$$

Martes, 24 de julio de 2024.

Estamos analizando el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Problema variacional

Dado $f \in L^2(\Omega)$, existe $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado con frontera de clase C^2
$f \in C^0(\bar{\Omega})$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$

Definimos que u es solución débil de $(N_\#)$ si u es solución del problema variacional.

u es solución clásica de $(N_\#)$ $\Leftrightarrow$ u es solución débil de $(N_\#)$

Observación

1) Si existe $u \in H^1(\Omega)$, solución débil de $(N_\#)$, entonces

$$\int_\Omega f \, dx = 0.$$

A esta condición se la conoce como condición de compatibilidad de los datos.

Si $\int_\Omega f \, dx \neq 0$, entonces no existe solución débil de $(N_\#)$.

2) Supongamos que $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de $(N_\#)$

Definamos $\omega := u + c$, con $c \in \mathbb{R}$, $\omega \in H^1(\Omega)$.

ω también es solución débil de $(N_\#)$. i.e., existen infinitas soluciones débiles.

Esto nos dice también que $(N_\#)$ posee infinitas soluciones clásicas.

Por lo tanto, este problema está mal planteado en el sentido de Hadamard.

Existencia $\longleftrightarrow$ Sobreyectividad.

Unicidad $\Leftrightarrow$ Inyectividad.

Del operador

$$T : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

¿T es sobreyectivo?

T no es inyectivo.

Como necesitamos que el operador sea inyectivo, la idea es considerar el siguiente espacio

$$H^1(\Omega) / \underbrace{\mathrm{span}(c)}_{=\mathbb{R}}$$

$$H^1(\Omega) / \mathbb{R}.$$

Identificamos a $\mathbb{R}$ con un espacio de funciones

Así, consideramos

$$[u] = \{ v \in H^1(\Omega) : u - v \in \mathbb{R} \}$$

Definamos el espacio

$$V(\Omega) := H^1(\Omega) / \mathbb{R}$$

$V(\Omega)$ es un espacio vectorial real

$V(\Omega)$ es un espacio normado pues $\mathbb{R}$ es cerrado.

Note que identificamos a $\mathbb{R}$ con el espacio

$F = \mathbb{R}$. $\quad F : \{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ es cte en $\}$ s.e.v. de $H^1(\Omega)$

Entonces, consideremos: $\exists \dot u \in V(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla \dot u \cdot \nabla \dot v \, dx = \int_\Omega f \dot v \, dx \qquad \forall \dot v \in V$$

Entonces

$$\int_\Omega \nabla(u+c)\cdot\nabla(v+c)\,dx = \int_\Omega f(v+c)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx + \int_\Omega \cancel{fc}^{\,\to 0}\,dx$$

$$= \int_\Omega f v\,dx.$$

Nota: Buscamos que sea independiente el valor de la integral.

En efecto, para la definición de la forma bilineal

$$a : V(\Omega)\times V(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\dot u, \dot v) \longmapsto a(\dot u, \dot v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

es independiente de la elección de u y v.

Martes, 30 de julio de 2024.

Consideremos el problema (continuación)

$$(N_H) \quad \begin{cases} -\Delta u = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Cuya formulación variacional está dada por

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

u solución débil de (N_H) $\Rightarrow$ $u+c$ es solución débil de (N_H)

$$V(\Omega) := H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

$$\dot u = [u] = \{ v \in H^1(\Omega) : u - v \in \mathbb{R} \}$$ Notación para clase de equivalencia.

Definamos

$$B : V(\Omega)\times V(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\dot u, \dot v) \longmapsto \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx \qquad \text{con } u \in \dot u,\ v \in \dot v$$

y además un candidato a norma

$$p : V(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\dot u \longmapsto p(\dot u) = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac12} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

con $u \in \dot u$.

En efecto, notemos que es una norma

- $p(\dot{u}) \geq 0 \qquad \forall \dot{u} \in V(\Omega)$
- $p(\dot{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0$

$$\Rightarrow \nabla u = 0 \text{ ctp}$$

$$\Rightarrow u \text{ es cte ctp en } \Omega \qquad (\text{Si } \Omega \text{ es conexo})$$

- $\dot{u} = \dot{0} \iff u \in \dot{0} = \{ v \in H^1(\Omega) : v \in \mathbb{R} \}$ (clase de las funciones constantes)
- $p(\dot{0}) = 0$ (pues el gradiente de las constantes es cero)
- $p(\lambda \dot{u}) = \lambda p(\dot{u}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $p(\dot{u} + \dot{v}) \leq p(\dot{u}) + p(\dot{v})$

Problema: Dado $f \in L^2(\Omega)$, existe $\dot{u} \in V(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall \dot{v} \in V(\Omega).$$

Teorema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, no vacío, conexo con frontera Lipschitz. Si $f \in L^2(\Omega)$ tal que $\int_\Omega f \, dx = 0$, entonces existe un único $\dot{u} \in V(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall \dot{v} \in V(\Omega)$$

Más aún, existe $C > 0$ tal que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración

Definamos

$$B : V(\Omega) \times V(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\dot{u}, \dot{v}) \longmapsto B(\dot{u}, \dot{v}) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

$$F : V(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\dot{v} \longmapsto F(\dot{v}) = \int_\Omega f v \, dx.$$

V es un espacio de Hilbert.

Sea $(\dot{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $V(\Omega)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\dot{u}_n - \dot{u}_m\|_{V(\Omega)} < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq N(\varepsilon).$$

Con esto y gracias a la definición de la norma en $V(\Omega)$, se sigue que

$$\|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq N(\varepsilon)$$

$(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ define una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)^N$.
Por completitud de $L^2(\Omega)^N$, existe $v \in L^2(\Omega)^N$ tal que
$$\nabla u_n \to v \quad \text{en } L^2(\Omega)^N.$$
Para continuar con la demostración, consideremos el siguiente resultado.

Proposición. (Desigualdad de Poincaré - Wirtinger)

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, acotado, conexo con frontera Lipschitz, existe $K = K(\Omega) > 0$ tal que
$$\| u - \bar{u} \| \leq K \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1(\Omega)$$
donde $\bar{u} = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega u \, dx.$

Demostración. (Por contradicción)
Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in H^1(\Omega)$ tal que
$$\| u_n - \bar{u}_n \|_{L^2(\Omega)} > n \| \nabla u_n \|_{L^2(\Omega)}. \qquad [*]$$
Con esto, definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$
$$w_n := \frac{u_n - u_n}{\| u_n - \bar{u}_n \|_{L^2(\Omega)}} \in H^1(\Omega) \qquad (\text{pues } H^1(\Omega) \text{ es espacio vectorial})$$
$$\| \nabla w_n \|_{L^2(\Omega)} = \frac{\| \nabla u_n \|_{L^2(\Omega)}}{\| u_n - \bar{u}_n \|_{L^2(\Omega)}} < \frac{1}{n} \qquad \text{por } [*]$$
y además, $\| w_n \|_{L^2(\Omega)} = 1$. Entonces, como $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $H^1(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ es reflexivo, entonces existe $(w_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y existe $w \in H^1(\Omega)$ tal que
$$w_{n_k} \rightharpoonup w \quad \text{en } H^1(\Omega)$$
Por teorema de Reillich, sabemos que $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ con lo cual, $w_{n_k} \to w$ en $L^2(\Omega)$. A partir de esto, sabemos que

* $\| u \|_{L^2(\Omega)} = 1$

* $\overline{w} = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \overline{w_n} = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega \frac{u_n - \bar{u}_n}{\| u_n - \bar{u}_n \|_{L^2}} \, dx = 0.$$

Aplicando Hölder junto con $\overline{w_n} = 0$, se deduce lo requerido.

* $\nabla w = 0$ ctp. (Usando la definición)

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$:
$$\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega w_{n_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \qquad w_{n_k} \to w \text{ en } L^2(\Omega) \Rightarrow w_{n_k} \rightharpoonup \text{ en } L^2(\Omega) \text{ y se define un funcional con la integral.}$$
$$= - \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \frac{\partial w_{n_k}}{\partial x_i} \varphi \, dx$$

Pues $\|\nabla w_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} \to 0 \Rightarrow \nabla w_n \to 0$ en $L^2(\Omega)$, se tiene que

$$0 = -\int_\Omega -g\, \varphi\, dx \Rightarrow g = 0 \text{ ctp}$$

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

De donde, w es cte en Ω pues Ω es conexo y así como

$$\int w\, dx = 0$$

entonces $w = 0$ ctp pues $\|w\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Retornando a la completitud de $V(\Omega)$

- Recapitulando, $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$.

Podemos deducir,

$$\|u_n - \bar{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq K \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{(No nos ayuda).}$$

Definamos $v_n = u_n - \bar{u}_n$, notar que $v_n \in \dot{u}_n$ y $\bar{v}_n = 0$.
Además,

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} = \|\dot{u}_n\|_{V(\Omega)}$$

Así, $(\nabla v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$ y por la desigualdad de Cauchy - Wirtinger,

$$\|v_n - \bar{v}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq K \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \qquad (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una sucesión de Cauchy en } L^2(\Omega).$$

Por lo tanto, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. Por completitud de $H^1(\Omega)$ existe $v \in H^1(\Omega)$ tal que $v_n \to v$ en $H^1(\Omega)$. Notar que $\dot{u}_n \to \dot{v}$ en $V(\Omega)$

$$\|\dot{u}_n - \dot{v}\|_{V(\Omega)} = \|\nabla u_n - \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

Por tanto, $V(\Omega)$ es un espacio de Banach para la norma $\|\cdot\|_{V(\Omega)}$.
Notar que el producto escalar sobre $V(\Omega)$ induce la norma $V(\Omega)$.

$$\therefore V(\Omega) \text{ es un espacio de Hilbert}$$

B es una aplicación lineal

$$|B(\dot{u},\dot{v})| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\dot{u}\|_{V(\Omega)} \|\dot{v}\|_{V(\Omega)}$$

$$|F(\dot{v})| = \left|\int_\Omega f v\, dx\right|$$

$$= \left|\int_\Omega f(v - \bar{v})\, dx\right| \quad \text{Por condición de compatibilidad}$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v - \bar{v}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq K \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = K \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\dot{v}\|_{K(\Omega)}$$

Por el T-LM, existe una única $\dot{u} \in V(\Omega)$ tal que

$$\forall \dot{v} \in V(\Omega) \qquad B(\dot{u}, \dot{v}) = F(\dot{v})$$

Además,

$$\|\dot{u}\|_{V(\Omega)} \leq \|F\|_{(V(\Omega))^*} \leq K \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Miércoles, 31 de julio de 2024.

Teorema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, conexo con frontera Lipschitz. Dado $f \in L^2(\Omega)$, existe una única solución débil $u \in H^1(\Omega)$ tal que $f_\Omega u \, dx = 0$ y $f_\Omega f \, dx = 0$

$$(\hat{N}_H) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Además, existe $c > 0$ tal que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración.

Existencia (Problema auxiliar)

Dado $f \in L^2(\Omega)$ tal que $f_\Omega f \, dx = 0$, existe $\dot{u} \in V(\Omega)$ tal que

$$\forall \dot{v} \in V(\Omega) \quad : \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

Por el teorema anterior, existe una única solución $\dot{u} \in V(\Omega)$ para el problema $(\dot{P}\dot{V})$. Como $\dot{u} \in V(\Omega)$, entonces $w \in H^1(\Omega)$ donde definimos

$$u = w - f_\Omega w \, dx \quad \Rightarrow \quad f_\Omega u \, dx = 0.$$

P.D. $\forall v \in H^1(\Omega)$.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Sea $v \in H^1(\Omega)$, entonces $v \in \dot{v}$, además notar que $u \in \dot{u}$ y por lo tanto,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Unicidad.

Supongamos que existen $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ tales que $f_\Omega u_1 \, dx = 0$, $f_\Omega u_2 \, dx = 0$ soluciones débiles de $(\hat{N}_H)$

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad : \quad \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot v \, dx = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Tomando $v = u_1 - u_2 \in H^1(\Omega)$, se tiene que

$$\|\nabla(u_1-u_2)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow \nabla(u_1-u_2) = 0.$$

$$\Rightarrow u_1 - u_2 = cte \quad \text{(Pues } \Omega \text{ es conexo)}$$

y como $\overline{u_1 - u_2} = 0$ y además $u_1 - u_2$ es constante, entonces $u_1 - u_2$.

Estabilidad

P.D. $f_n \to f$ en $L^2(\Omega)$ P.D. $u_n \to u$ en $H^1(\Omega)$, donde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^2(\Omega)$ tal que $\overline{f_n} = 0$ y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de soluciones débiles de $(\hat{N}_H)$ tal que $\overline{u_n} = 0$

Además, u es solución débil de $(\hat{N}_H)$ para $f \in L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(u_n-u)\|^2_{L^2(\Omega)^N} \\
&= \left\| u_n - u - \overline{(u_n-u)} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(u_n-u)\|^2_{L^2(\Omega)^N} \\
&\leq (C^2+1)\, \|\nabla(u_n-u)\|^2_{L^2(\Omega)^N} \\
&\leq (C^2+1)\, \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)^N}
\end{aligned}$$

Por otro lado

① $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_n \nabla v \, dx = \int_\Omega f_n v \, dx$

② $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla(u_n - u)\cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega (f_n - f) v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

$$\therefore \|\nabla(u_n-u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)}$$

Note que $u_n - u$ es la única solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta(u_n-u) = f_n - f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial n}(u_n - u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Con lo cual satisface la estimación anterior, i.e.,

$$\|\nabla(u_n-u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)}$$

en consecuencia,

$$\|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{cuando } n \to +\infty.$$

Para la elección de la constante sobre la cual

$$\min_{c\in\mathbb{R}} \|u + c\|_{H^1(\Omega)}.$$

No colocamos $c=0$ pues requerimos una dependencia entre u y c.
Entonces,

$$\min_{c\in\mathbb{R}} \|u+c\|_{H^1(\Omega)} \iff \min_{c\in\mathbb{R}} \|u+c\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Pues la norma es positiva y la raíz cuadrada es creciente). Entonces, definiendo

$$g(c) = \|u+c\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$= \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + 2\langle u,c\rangle_{H^1(\Omega)} + c^2\lambda(\Omega)$$

$$= \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + 2c\int_\Omega u\,dx + c^2\lambda(\Omega).$$

$$\Rightarrow g'(c) = 2\int_\Omega u\,dx + 2c\lambda(\Omega)$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{\lambda(\Omega)}\int_\Omega u\,dx$$

Así, se impone que

$$⨍_\Omega u\,dx = 0$$

para obtener un marco funcional adecuado para el trabajo.

$$g''(c) = 2\lambda(\Omega) > 0$$

Tomando $c^* = -⨍_\Omega u\,dx$ (depende de u)

$$g(c^*) = \|u - ⨍_\Omega u\,dx\|^2_{H^1}$$

Jueves, 1 de agosto de 2024.

Problema de Neumann No Homogéneo.

Consideremos el problema: Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, no vacío, acotado, con frontera Lipschitz.

$$(N_{NH})\begin{cases} -\Delta u = f, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g. \end{cases}$$

De manera análoga a lo hecho previamente, se obtiene la siguiente formulación variacional.

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\cdot v\,dx = \int_\Omega fv\,dx$$

Con lo cual,

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \int_{\partial\Omega} gv\,ds(x) = \int_\Omega fv\,dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,ds(x).$$

De lo anterior, se tiene que

$$u\in H^1(\Omega), \quad v\in H^1(\Omega), \quad f\in L^2(\Omega), \quad g\in L^2(\partial\Omega), \quad v\in L^2(\partial\Omega).$$

Problema variacional.

Dados, $f\in L^2(\Omega)$ y $g\in L^2(\partial\Omega)$, existe $u\in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,ds(x) \qquad \forall v\in H^1(\Omega).$$

¿Es un problema bien planteado? No.

Condición de compatibilidad.

$$\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,ds(x) = 0.$$

Teorema. Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, acotado, conexo con frontera Lipschitz. Si $f\in L^2(\Omega)$ y $g\in L^2(\partial\Omega)$ tal que $\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,ds(x)=0$, entonces existe un único $u\in H^1(\Omega)$ tal que $\bar{u}=0$ y

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx + \int_\Omega gv\,ds(x) \quad \forall v\in H^1(\Omega)$$

Más aún, existe $c>0$ tal que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right\}$$

Demostración.

Definamos un problema auxiliar

Consideremos el espacio $V(\Omega)=H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, $\dot{u}\in V(\Omega)$.

$$\dot{u} = \{w\in H^1(\Omega) : w-u \text{ cte en } \Omega\}$$

Dados $f\in L^2(\Omega)$, $g\in L^2(\partial\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,ds(x) = 0,$$

existe un único $\dot{u}\in V(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,ds(x) \qquad \forall v\in V(\Omega).$$

$V(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle\dot{u},\dot{v}\rangle_{V(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx$$

Luego, definamos

$$B: V(\Omega)\times V(\Omega)\to\mathbb{R} \qquad\qquad F: V(\Omega)\to\mathbb{R}$$

$$(\dot{u},\dot{v})\mapsto\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,dx \qquad\qquad \dot{v}\mapsto\int_\Omega fv\,dx+\int_{\partial\Omega}gv\,ds(x)$$

En ambos casos es independiente del representante.

$$v \in L^2(\partial\Omega) \Rightarrow v - c \in L^2(\partial\Omega).$$

Como B es bilineal, acotado y coercivo y F es lineal y acotado en $V(\Omega)$ por el T-LH, existe un único $\dot{u} \in \dot{V}(\Omega)$ tal que

$$B(\dot{u}, \dot{v}) = F(\dot{v}) \quad \forall\, v \in V(\Omega)$$

Luego

$$\left| \int_\Omega f(v - \bar{v})\, dx + \int_{\partial\Omega} g\,(v - \bar{v})\, ds(x) \right|$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v - \bar{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v - \bar{v}\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v - \bar{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma(v - \bar{v})\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v - \bar{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma\| \|v - \bar{v}\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma\| \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v - \bar{v}\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

$$\leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \max\left\{ C, \|\gamma\| (C^2+1)^{\frac{1}{2}} \right\} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right)$$

En consecuencia,

$$\|\dot{u}\|_{V(\Omega)} \leq \|F\|_{(V(\Omega))^*} \leq K \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right\}.$$

Definamos,

$$u := w - \fint_\Omega w\, dx \qquad \text{con} \quad w \in \dot{u}$$

Así, $u \in H^1(\Omega)$, $\fint_\Omega u\, dx = 0$ y se cumple que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx + \int_{\partial\Omega} g\,\gamma(v)\, ds(x)$$

Unicidad

Sean u_1, u_2 en $H^1(\Omega)$ tales que resuelven el problema

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v\, dx \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

de donde $u_1 = u_2$ ctp en Ω. Luego, como el valor promedio de la resta es cero, entonces $u_1 = u_2$.

Estabilidad

Si $f_n \to f$ en $L^2(\Omega)$ y $g_n \to g$ en $L^2(\partial\Omega)$,

$$\|u_n - u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (C_{PW}^2 + 1) \|\nabla u_n - \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq K(C_W^2 + 1) \left\{ \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} + \|g_n - g\|_{L^2(\Omega)} \right\}.$$

Recapitulación

$$(\hat{N}_{NH})\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \fint_{\Omega} u\,dx = 0 \end{cases}$$

$u \in H^1(\Omega)$ tal que $\bar{u} = 0$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_{\Omega} f v\,dx + \int_{\partial\Omega} g v\,ds(x) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

u solución débil de $(\hat{N}_{NH})$

(Modelo diferencial)

Con lo anterior, se tiene que

$$-\Delta u = f \quad \text{en distribuciones}$$

Por otro lado, $-\Delta u = f$ en $\Omega \iff \forall x \in \Omega \quad -\Delta u(x) = f(x)$ (solución clásica)

$u \in H^1(\Omega) \Rightarrow u \in C^2(\bar{\Omega})$

Para obtener una solución clásica: f y g deben ser regulares.

¿Cuánta regularidad?

Ejercicio: Suponer la regularidad necesaria para recuperar la solución clásica.

Problemas para tarea.

Problema de Robin.

Consideremos

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ hu + \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$h: \partial\Omega \to \mathbb{R}$

$g: \partial\Omega \to \mathbb{R}$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$.

- si $h=0$, se obtiene el problema de Neumann no homogéneo
- $g=0$, $h\neq 0$, : Robin homogéneo
- $g\neq 0$, $h\neq 0$, : Robin no homogéneo.

¿Bien planteado?

Si la respuesta es No, busque condiciones para que sí se encuentre bien planteado.

Recapitulación

- Dirichlet $\Rightarrow$ Espacios funcionales
- Neumann $\Rightarrow$ Formulación Variacional.

Viernes, 2 de agosto de 2024.

Sección: Valores y funciones propias del Laplaciano.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado.

Consideremos el siguiente problema
$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{en } \Omega$$
para el caso general, consideremos
$$Tu = \lambda u.$$
En el contexto de espacios de Hilbert es necesario definir un operador entre espacios de Hilbert
$$T : H \to H,$$
con H un espacio de Hilbert.

Para estudiar el problema de valores propios necesitamos considerar las condiciones de frontera para obtener un operador sobre el cual trabajar.

▸ Problema de Dirichlet-Laplace

$$(D_\lambda) \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son desconocidos.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es conocido, entonces una solución débil de (D_λ) es una función $H_0^1(\Omega)$ tal que
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Problema: ¿Existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que es solución débil de (D_λ)?

: Sí, $u=0$, resuelve el problema

¿Existe $u \in H_0^1(\Omega)$ no nulo tal que es solución débil de (D_λ)?

Consideremos
$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$(u, v) \mapsto a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \lambda \int_\Omega u v \, dx$$

$$F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto F(v) = 0.$$

Considerando la norma del gradiente
$$a(u,u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \lambda \|u\|_{L^2}^2 \geq (1 - \lambda C_p) \|u\|_{H_0^1}^2$$

si $0 \leq \lambda \leq C_p^{-1}$, por el Lema de Lax-Milgram existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que
$$a(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$
y además
$$\|u\|_{H_0^1} \leq \beta \|F\|_{H^{-1}} = 0$$
con lo cual la solución obtenida es la trivial.

Análogamente si $\lambda < 0$, se tiene el mismo razonamiento.
Si probamos analizando los puntos críticos, llegamos al mismo razonamiento.

Hasta ahora, hemos visto que si $\lambda < C_P^{-1}$, entonces la única solución débil de $(D\lambda)$ es la trivial.

Por otro lado, para conocer si existe una solución no trivial, plantearemos un problema de valores y funciones propias.

Problema: Hallar todos los posibles valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que el problema

(VPD) $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

posee una solución no trivial $u \in H_0^1(\Omega)$.

En este problema, λ es un valor propio y la solución no trivial asociada es una función propia.

Este nuevo problema nos permite definir los valores y funciones propias del laplaciano en el sentido débil.

Observaciones.

1) Notar que, $\lambda = 0$ no es un valor propio, pues, en este caso la única solución es la trivial.

2) Además, si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ que es valor propio del problema (VPD), entonces como λ es un valor propio, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ no nulo tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

En particular, para $v = u$,

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \lambda \|u\|_{L^2}^2$$

$$\therefore \lambda > 0.$$

Teorema (Teorema espectral)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto y acotado. Se cumple que

1) El conjunto de valores propios de (VPD) es contable cuyo único punto de acumulación es $+\infty$ ($\overline{\mathbb{R}}$)

Dado un v.p. de (VPD) El correspondiente espacio propio es un subespacio vectorial de $H_0^1(\Omega)$ de dimensión finita.

3) Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de valores propios de VPD, la cual es creciente tal que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \longrightarrow +\infty.$$

entonces existe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones propias que forman una base hilbertiana para $L^2(\Omega)$ y base ortogonal para $H_0^1(\Omega)$.

Demostración

Consideremos

$$T : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$
$$f \longmapsto u_f$$

donde $u_f \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Phi \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$ pues es lineal, gracias a la formulación variacional y acotado, gracias a la estabilidad existe $C>0$ tal que

$$\|u_f\|_{H_0^1} \leq C \|f\|_{L^2}$$

Martes, 6 de agosto de 2024.

(Recapitulación)

Estamos analizando el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Existencia de $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ no nulo tales que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Note que los operadores

$$-\Delta : S : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega) \qquad R : H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$
$$u \longmapsto f \qquad\qquad f \longmapsto u_f$$

no son los adecuados para trabajar el problema de valores propios.

(Continuando con la demostración)

$$T : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$
$$f \longmapsto u_f$$

Para $f \in L^2(\Omega)$, por lo hecho previamente $u_f \in H_0^1(\Omega)$ solución débil de f del problema (D_H)

Sabemos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, i.e.,

$$\Phi : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$u \longmapsto u$$

$$B := \Phi \circ T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$
$$f \longmapsto u_f$$

$B \in K(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$

B es autoadjunto.

P.D. $\forall f, g \in L^2(\Omega) \quad \langle Bf, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, Bg\rangle_{L^2(\Omega)}$

Sean $f, g \in L^2(\Omega)$.

$$Bf = u_f \in L^2(\Omega) \qquad Bg = u_g \in L^2(\Omega)$$

[1] $\int_\Omega \nabla u_f \, \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$ y [2] $\int_\Omega \nabla u_g \cdot \nabla v = \int_\Omega g v \, dx$.

Luego

$$\begin{aligned}
\langle Bf, g\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega u_f \, g \, dx \\
&= \int_\Omega \nabla u_g \cdot \nabla u_f \, dx && v = u_f \text{ en } [2] \\
&= \int_\Omega f u_g \, dx && v = u_g \text{ en } [1] \\
&= \langle B, Bg\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

- B no puede ser el operador nulo.

Si $B=0$, entonces $\lambda\omega = 0$, por lo tanto $\lambda = 0$ o $\omega = 0$ pero como ω es función propia entonces $\lambda = 0$ pero sabemos que en este caso la única solución es la trivial.

P.D. ($\exists f \in L^2(\Omega)$) tal que $Bf \neq 0$.

- $B \neq 0$ pues existe $f \in L^2(\Omega)$ tal que $Bf = 0$. Por contradicción, supongamos que

$$\int_\Omega \nabla Bf \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Considerando $v \in C_c^\infty(\Omega)$, cualquiera:

$$\int_\Omega f v \, dx = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ ctp en } \Omega.$$

Notar que si $f=0$, entonces $u_f = 0$ es única. Pero si $f \neq 0$, esto es una contradicción.

B es definido positivo.

P.D. $\langle Bf, f\rangle > 0 \quad \forall f \in L^2(\Omega)$

Sea $f \in L^2(\Omega)$, $\langle Bf, f\rangle \in \mathbb{R}$ pues B es autoadjunto.

$$\int_\Omega f u_f = \int_\Omega \nabla u_f \cdot \nabla u_f \, dx = \|\nabla u_f\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u_f\|^2_{H_0^1} > 0.$$

$\boxed{f \neq 0 \Rightarrow u_f \neq 0}$ Pues B es inyectivo

$0 \in \sigma(T) \Leftrightarrow$ T no es inyectivo o T no es sobreyectivo.

T es inyectivo $\Rightarrow$ Jamás es un valor propio.

$$\sigma(B) \setminus \{0\} = \sigma_p(B).$$

En resumen, se ha probado que

B es lineal, compacta, autoadjunto, definida positiva, inyectiva y no nula.
Además, 0 no es un valor propio de B. (Pues B es inyectivo)

Por el teorema espectral aplicado a B, se tiene que

1) $\sigma_p(B)$ es contable con 0 su único punto de acumulación.

2) $\forall \mu \in \sigma_p(B)$, $\ker(B-\mu Id)$ tiene nulidad finita. $[\dim(\ker(B-\mu Id)) < +\infty]$

3) $\forall \mu \in \sigma_p(B)$, $\mu > 0$

4) $\sigma_p(B) = \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual la consideramos decreciente tal que

$$\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones propias de B asociadas a $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base hilbertiana de $L^2(\Omega)$.

Como $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones propias asociada a B

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad Bw_n = \mu_n w_n$$

Notar que Bw_n es la única solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u = w_n & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Así, por definición

$$\int_\Omega \nabla Bw_n \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega w_n v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Luego,

$$\int_\Omega \nabla(\mu_n w_n) \nabla v \, dx = \int_\Omega w_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla v \, dx = \frac{1}{\mu_n} \int_\Omega w_n v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

De esta manera, $\left(\frac{1}{\mu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente cuyo único punto de acumulación es $+\infty$. Además, es una sucesión de valores propios del problema VPD.

Además, notar que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto, los espacios propios correspondientes a los valores propios $\frac{1}{\mu_n}$ es un subespacio de $H_0^1(\Omega)$

$\ker(B-\mu Id)$ es el espacio propio asociado a μ (Recuerde que $B = \Phi \circ T$)

Definimos

$$S : Img(B) \to L^2(\Omega)$$
$$u \mapsto f_n$$

$\ker\left(S_{-\Delta} - \frac{1}{\mu} Id\right)$ (Espacio propio buscado)

Note que para analizar el problema de valores propios recurrimos a analizar el operador inverso al operador de interés.

$$S_{(-\Delta)} w_n = \frac{1}{\mu_n} w_n \qquad\qquad B w_n = \mu_n w_n$$

$\ker\left(S(-\Delta) - \frac{1}{\mu_n} Id\right)$

$= \{ w_n \in H_0^1(\Omega) : S(-\Delta) w_n = \frac{1}{\mu_n} w_n \}$

$= \{ w \in H_0^1(\Omega) : B w_n = \mu_n w_n \}$

$= \ker(B - \mu_n Id)$

$B\left(S(-\Delta) w_n \right) = w_n = \frac{1}{\mu_n} B w_n$

Martes, 6 de agosto de 2024 (Clase noche)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto acotado

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \underset{(VPD)}{\Rightarrow} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Entonces, por lo hecho previamente, existen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de valores propios positivos y una sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones propias asociadas a $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $\lambda_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$

$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $L^2(\Omega)$.

Observación: De lo dicho previamente, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$, λ_n es un valor propio de (VPD) con correspondiente función propia w_n si y solo si μ_n es un valor propio de B con correspondiente función propia w_n.

Mostremos que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal para $H_0^1(\Omega)$

Como $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de valores propios de (VPD), entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla v \, dx = \lambda_n \int_\Omega w_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle w_n, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_n \langle w_n, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

En particular,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \quad \langle w_n, w_m \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_n \langle w_n, w_m \rangle_{L^2(\Omega)}$$

Como $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es ortonormal en $L^2(\Omega)$, se sigue que

- si $n \neq m \Rightarrow \langle w_n, w_m \rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0$
- si $n = m \Rightarrow \langle w_n, w_n \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_n \langle w_n, w_n \rangle_{L^2(\Omega)}$

  $\Rightarrow \|w_n\|_{H_0^1(\Omega)} = (\lambda_n)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia ortogonal en $H^1(\Omega)$.

Como $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal en $L^2(\Omega)$, entonces

$$\forall w \in L^2(\Omega) \qquad w = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle w, w_n\rangle_{L^2(\Omega)} w_n$$

en particular, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, se sigue que

$$v = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle v, w_n\rangle_{L^2(\Omega)} w_n$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\langle v, w_n\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\lambda_n} w_n$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\langle v, w_n\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|w_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}} w_n.$$

$\therefore$ $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal en $H_0^1(\Omega)$

Más aún, la familia $\left\{\frac{w_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ define una base ortonormal en $H_0^1(\Omega)$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

s.e.v.g $\{x_n\}_n$

$= \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n : (\alpha_n) \in \ell^2(\mathbb{R})\right\}$

Por la identidad de Parseval

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle v, w_n\rangle|^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\langle v, w_n\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|w_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

es una sucesión en $\ell^2(\mathbb{R})$

Observación: El problema de valores propios para el problema Dirichlet-Laplace se puede formular de la siguiente manera:

$$\forall n\in\mathbb{N} : \int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla v \, dx = \lambda_n \int_\Omega w_n v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -\Delta w_n = \lambda_n w_n \\ w_n \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

¿En qué sentido?

$\langle -\Delta w_n, \varphi\rangle = \langle \lambda_n w_n, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)'$

y, se puede probar que

$$\langle -\Delta w_n, \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla \varphi \, dx$$

$$\langle \lambda_n w_n, \varphi\rangle = \lambda_n \int_\Omega w_n \varphi \, dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda_n \int_\Omega w_n \varphi \, dx$$

$-\Delta w_n = \lambda_n w_n$ en $H^{-1}(\Omega)$

$\langle -\Delta w_n, \varphi\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$

$= \lambda_n \langle w_n, \varphi\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}$

$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

Podemos definir el operador

$$-\Delta|_{H_0^1} : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$u \mapsto -\Delta u$$

¿Por qué en $L^2(\Omega)$?

Regularidad de las soluciones. Se puede deducir que $u \in H^2(\Omega)$

Previamente consideramos

$$B = \Phi \circ T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

donde

$\Phi : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ y $T : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$
$\quad v \mapsto v \qquad\qquad f \mapsto u_f$ solución débil de

$f \in L^2(\Omega) : Bf = u_f \qquad \begin{cases} -\Delta u_f = f \text{ en } \Omega \\ u_f = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$

Notar que B actúa como una inversa por derecha de $-\Delta|_{H_0^1}$

$f \in L^2(\Omega) \qquad \left(-\Delta|_{H_0^1} \circ B\right)(f) = -\Delta|_{H_0^1}(Bf) = -\Delta|_{H_0^1} u_f = f.$

* $\lambda \in \sigma_p(-\Delta|_{H_0^1}) \iff \frac{1}{\lambda} \in \sigma_p(B). \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, w \in L^2(\Omega)$ no nula
$Bw = \frac{1}{\lambda} w.$

$\Updownarrow$

$\exists\, w \in H_0^1(\Omega)$ no nula tal que
$-\Delta|_{H_0^1} w = \lambda w.$

¿0 es un valor propio de $-\Delta|_{H_0^1}$?
Pues si lo fuera, entonces existe $u \neq 0$ en $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

$$\Rightarrow \|u\|_{H_0^1} = 0 \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

Miércoles, 7 de agosto de 2024.

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

inyecciones inyecciones
densas.

$$-\Delta|_{H_0^1} : H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$u \mapsto -\Delta u$$

$$\Rightarrow -\Delta u = f \text{ en } \Omega$$

Supongamos que $f \in H^{-1}(\Omega)$

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

$\Rightarrow \lambda u \in H^{-1}(\Omega)$, $u \in H^{-1}(\Omega)$ (distribución)

$$-\Delta w_n = \lambda_n w_n \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ o } H^{-1}(\Omega)$$

$$w_n \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla v \, dx = \lambda_n \int_\Omega w_n v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$