Contenidos.

1.- Nociones básicas de topología.
2.- Funciones continuas y operadores en espacios topológicos.
3. Axiomas de separación [lema de Uryshon / Teorema de Tietze-Uryshon
4. Compacidad
5. Conexidad.
6.* Filtros - Ultrafiltros. (Teorema de Tychonoff)

Evaluaciones.
→ 2 controles (35% c/u)
→ Deberes (10% c/u)
→ microevaluaciones (10% ~~c/u~~)
1 15 días
→

Bibliografía.
→ Munkres Topology
→ J. L. Kelley General Topology
→ C. Tisseron «Notions de Topologie Introduction aux espaces FONCTONNELS»

Capitulo 1.

Def. 1.1. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{P}(X)$ (partes de X.) Consideramos $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que verifica lo siguiente.

1) $X, \emptyset \in \tau$;
2) Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia arbitraria de elementos de τ; entonces, la unión arbitraria de $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \tau$.
3) Si $\{U_1, \ldots, U_n\} \in \tau$ es una familia finita de elementos de τ, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

A la dupla (X, τ) se la conoce como espacio topológico.

Observación

1) Si τ es una topología sobre X, entonces τ es estable por intersecciones finitas y uniones arbitrarias y además $X, \emptyset \in \tau$.
2) El estudio de este curso de topología, es en gran medida, generalizar las nociones vistas en espacios métricos, y a su vez trabajar en otro tipo de espacios que difieran en algunos conceptos de los espacios métricos.
3) A los elementos de τ se las conoce como conjuntos abiertos.

Ejemplos.

1) Consideremos (X, d) un espacio métrico; entonces X admite una topología que es inducida por la métrica d.
$$\tau_d = \{A \subset X : A \text{ es abierto}\}$$
2) $X \neq \emptyset$ y $\tau_{ind}\{X, \emptyset\}$, entonces (X, τ_{ind}) es un espacio topológico y a τ_{ind} se la conoce como la topología indiscreta o antidiscreta.
3) $X \neq \emptyset$ $\tau_{dis} = \mathcal{P}(X)$, entonces (X, τ_{dis}) es un espacio topológico ~~dis~~ y a τ_{dis} se lo conoce como la topología discreta.
4) $X \neq \emptyset$ $\tau_{cof} = \{A \subset X : A^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. entonces (X, τ_{cof}) es un espacio topológico.

En efecto,

1) $X \in \tau_{cof}$ pues $X^c = \emptyset$ y $\emptyset \in \tau_{cof}$ por definición

Sea $\{U_i\}_{i\in I} \in \tau_{cof}$, tenemos que.
$$\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} U_i^c$$

Si existe $j \in I$ tal que $U_j = \emptyset$, entonces; $U_j^c = X$, por lo tanto.

$$\bigcap_{i\in I} U_i^c = \bigcap_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} U_i^c$$

Así, podemos eliminar todos los $k \in I$, tales que $U_k^c = X$.

Por tanto, si consideramos $J \subseteq I$ tal que

$\forall i \in I \quad U_i^c \neq X$, tenemos que.

$$\bigcap_{i\in I} U_i^c = \bigcap_{i\in J} U_i^c$$

Como para cada $i\in I$ se tiene que $U_i^c \neq X$ y U_i^c es finito, lo que permite tener lo siguiente

$$\bigcap_{i\in I} U_i^c \subset U_j^c \quad \text{con } j\in J$$

Como U_j^c es finito y $\bigcap_{i\in I} U_i^c$ es un subconjunto de U_j^c, tenemos que $\bigcap_{i\in I} U_i^c$ es finita.

3) Si $\{U_1, \dots, U_n\} \in \tau_{cof}$, vamos a probar que $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_{cof}$

Es decir, vamos a probar que

$$\left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^n U_i^c$$

es un conjunto finito.

- Si existe $j \in \{1,\dots,n\}$ tal que $U_j^c = X$ y por lo tanto $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_{cof}$.
- Si $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ se tiene que $U_i^c \neq X$, tenemos que U_i^c es finito.

Como para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ U_i^c es finito, entonces

$$\bigcup_{i=1}^n U_i^c$$

es un conjunto finito y por lo tanto, se concluye que $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_{cof}$.

Por lo tanto, (X, τ_{cof}) es un espacio topológico.

La topología τ_{cof} se conoce como topología cofinita.

4) Sea $X \neq \emptyset$ (ejercicio para entregar)

$$\tau_{con} = \{A \subset X : A^c \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$$

Observaciones.

1. Todo espacio métrico es un espacio topológico pero no se tiene la recíproca.
2. τ_{ind} es la topología es la topología más pequeña que se puede definir sobre X.
3. τ_{dis} es la topología más grande que se puede definir sobre X.
4. $\tau_{cof} \subseteq \tau_{coo}$. En efecto, si $A \in \tau_{cof}$ A^c es un conjunto finito y por tanto numerable. Así, $A \in \tau_{coo}$.

Definición 1.2. Sea $X \neq \emptyset$ y (X, τ_x) un espacio topológico, llamaremos a $F \subseteq X$ un conjunto cerrado, para la topología ~~XXXX~~ τ_x o simplemente cerrado si $F^c \in \tau_x$

Al conjunto de cerrados para la topología τ_x lo notaremos con $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : A^c \in \tau_x\}.$$

Análogamente, tenemos que $\mathcal{F}$ con las propiedades de τ_x, tenemos

i) $X, \emptyset \in \mathcal{F}$; es decir, X y $\emptyset$ son conjuntos cerrados y abiertos

ii) $\mathcal{F}$ es estable por intersecciones arbitrarias. Es decir, $(F_\alpha)_{\alpha\in A}) \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \in \mathcal{F}$$

iii) $\mathcal{F}$ es estable por uniones finitas, es decir que si $\{F_1, \dots, F_n\} \in \mathcal{F}$, entonces
$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$$

Definición 1.3. Sea $X \neq \emptyset$ y (X, τ_X) un espacio topológico, consideramos $x \in X$. Decimos que $V \subseteq X$ es una vecindad del punto x si existe $\omega_x \in \tau_X$ tal que
$$x \in \omega_x \subseteq V.$$
A la familia de vecindades de un punto x para la topología τ_X la notaremos como $\mathcal{V}(x)$
$$\mathcal{V}(x) = \{ V \subseteq X : V \text{ sea vecindad de } x \}$$

Observación
$\mathcal{V}(x)$ es estable por uniones arbitrarias, intersecciones finitas y además $X \in \mathcal{V}(x)$. Por último, notemos que $\mathcal{V}(x)$ es estable por inclusión. Es decir, que si $A \subset X$ tal que $U \in \mathcal{V}(x)$ que verifica $U \subset A$, entonces $A \in \mathcal{V}(x)$.
En efecto como U es una vecindad de x, tenemos que existe $\omega_x \in \tau_X$ tal que $x \in \omega_x$ y
$$x \in \omega_x \subset U \subset A \Rightarrow x \in \omega_x \subset A$$
y así $A \in \mathcal{V}(x)$.

Obs. Si $V \in \mathcal{V}(x)$ y $A \subset X$ verifica que $A \subset U$, entonces no se tiene que $A \in \mathcal{V}(x)$

Ejemplo.
- (X, d) es un espacio métrico y $x \in X$
$$\mathcal{V}(x) \underset{?}{\neq} \{ B(x,r) : r > 0 \}. \quad \text{pues } \overline{B(x,r)} \text{ son vecindades de } x \text{ y no son abiertas}$$
realmente se tiene
$$\{ B(x,r) : r > 0 \} \subseteq \mathcal{V}(x).$$
$$\hat{\mathcal{V}}(x) = \{ A \subseteq X : \exists r_x > 0 \text{ que verifica que } B(x, r_x) \subseteq A \}$$
$$¿\, \hat{\mathcal{V}}(x) = \mathcal{V}(x) \,?$$
Es fácil observar que
$$\hat{\mathcal{V}}(x) \subseteq \mathcal{V}(x).$$
Sea $A \in \mathcal{V}(x)$, probemos que $A \in \hat{\mathcal{V}}(x)$. Como $A \in \mathcal{V}(x)$, existe $\omega_x \in \tau_d$ tal que
$$x \in \omega_x \subseteq A.$$
Como ω_x es abierto en un espacio métrico, entonces existe $r_{\omega_x} > 0$ tal que
$$x \in B(x, r_{\omega_x}) \subseteq \omega_x \subseteq A.$$
Por lo tanto,
$$x \in B(x, r_{\omega_x}) \subseteq A$$
y más aún se concluye que
$$A \in \hat{\mathcal{V}}(x)$$
- (X, τ_{dis}) sea $x \in X$. , $\mathcal{V}(x) = \{ V \subseteq X : x \in V \}$. La caracterización requiere únicamente que el elemento esté en el conjunto.
- (X, τ_{ind}), para $x \in X$ tenemos que $\mathcal{V}(x) = \{X\}$
- (X, τ_{cof}). Si X es un conjunto finito, entonces $\tau_{cof} = \tau_{dis}$; por lo tanto.
$$\mathcal{V}(x) = \{ V \subset X : x \in V \}$$
  - Si X es un conjunto infinito.
$$\mathcal{V}(x) =$$

Jueves, 3 de junio de 2021

Definición 1.4. Sea (X, τ_X) un espacio topológico y $A \subset X$, decimos que $x \in A$ es un punto interior de A si existe W_x una vecindad de x para la topología τ_X tal que

$$x \in W_x \subset A$$

El conjunto de puntos interiores de A se lo conoce como interior de A y es notado $\mathring{A}$ o $int(A)$

Observaciones.

- $\mathring{A} \subseteq A$, por definición.
- $\mathring{A}$ es vecindad de todos sus puntos.

En efecto, si $x \in \mathring{A}$, entonces existe $W_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $x \in W_x \subseteq \mathring{A}$. Por lo visto anteriormente, $\mathring{A}$ es vecindad de x.

- Se puede tomar W_x como una vecindad abierta.

$$\mathring{A} = \bigcup \{U \text{ abiertos tal que } U \subset A\}$$

en efecto. Si $x \in \mathring{A}$, entonces existe $W_x \in \tau_X$ tal que

$$x \in W_x \subset \mathring{A}.$$

Es decir que $x \in \bigcup \{U \text{ abiertos tal que } U \subset A\}$

Si $x \in \bigcup \{U \text{ abiertos tal que } U \subset A\}$, se tiene que existe $\hat{U} \in \tau_X$ tal que $x \in \hat{U} \subset A$.

Por tanto, x es un punto interior de A, es decir, $x \in \mathring{A}$

- Por lo anterior, $\mathring{A}$ es un conjunto abierto

Proposición 1.5. Sea (X, τ_X) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces A es abierto si y solo si $A = \mathring{A}$

$\Leftarrow$ Si $A = \mathring{A}$, por la observación anterior, puesto que $\mathring{A}$ es abierto, A también lo es.

$\Rightarrow$ Supongamos que A es abierto. Claramente, la inclusión $\mathring{A} \subseteq A$. Ahora mostremos que $A \subseteq \mathring{A}$

Sea. $x \in A$, como A es abierto y además $A \subseteq A$, se tiene que

$$x \in \bigcup \{U \text{ abiertos tal que } U \subseteq A\}$$

Es decir, $x \in \mathring{A}$.

Propiedades del interior.

Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ no vacíos, entonces tenemos.

i) $int(X) = X$

ii) $int(int(A)) = int(A)$

iii) $int(A) \subseteq A$.

iv) $A \subset B \Rightarrow int(A) \subseteq int(B)$

v) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$

vi) $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$

Demostración

i) Como $X \in \tau_X$, se tiene que $int(X) = X$

ii) Como $int(A)$ es abierto, por la proposición 1.5 $int(int(A)) = A$.

iii) $int(A) \subseteq A$ por definición

iv) Si $A \subseteq B$, entonces PD $int(A) \subseteq int(B)$.

Si $x \in int(A)$, existe $W_x \in \tau_X$ tal que $x \in W_x \subseteq A \subseteq B$, por lo tanto $x \in int(B)$.

v) $A \cap B \subseteq A \Rightarrow int(A \cap B) \subseteq int(A)$ y $A \cap B \subseteq B \Rightarrow int(A \cap B) \subseteq int(B)$

por lo tanto

$$int(A \cap B) \subseteq int(A) \cap int(B).$$

Si $x \in int(A) \cap int(B)$, existe $W_x \in \tau_X$ tal que. $x \in W_x \subseteq A$ y $x \in W_x \subseteq B$, entonces

$$x \in W_x \subseteq A \cap B \Rightarrow x \in int(A \cap B).$$

$\Rightarrow \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A\cup B)$

$\operatorname{int}(A) \subseteq A$ y $\operatorname{int}(B) \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq A \cup B$

y por lo tanto

$$\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B).$$

Observación.

- En general, no se tiene que $\operatorname{int}(A\cup B) \subset \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$.
- A partir de la definición de interior de un conjunto en la topología τ_X podemos definir un operador de $P(X)$ en $P(X)$

$$\operatorname{Int}: \mathcal{P}(X) = 2^X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$
$$A \subset X \longmapsto \operatorname{Int}(A).$$

$\operatorname{Im}(\operatorname{Int}) = \tau_X$

En efecto si $A \in \operatorname{Im}(\operatorname{Int})$, existe $B \subset X$ tal que

$$A = \operatorname{Int}(B).$$

Por lo tanto, $A \in \tau_X$.

Si $A \in \tau_X$, entonces $A = \operatorname{int}(A)$, así $A \in \operatorname{Im}(\operatorname{Int})$

Por lo anterior, tenemos que verifica la proposición 1.6.

Supongamos que existe $\emptyset : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que

i) $\emptyset(X) = X$ ii) $\emptyset(A) \subset A \quad \forall A \subset X$ iii) $\emptyset(\emptyset(A)) = \emptyset(A)$

iv) $\emptyset(A\cap B) = \emptyset(A) \cap \emptyset(B)$

¿Este operador induce o no una topología sobre X?

Proposición 1.7

Sea $X \neq \emptyset$ tal que se pueda definir $\varphi: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades

i) $\varphi(X) = X$ ii) $\forall A \subset X \quad \varphi(A) \subset A$ iii) $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$

iv) $\varphi(A\cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$.

Entonces φ induce una topología sobre X.

Demostración: Consideremos $\tau_{\hat\varphi} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definido de la siguiente forma.

$$\tau_{\hat\varphi} = \{ A \subset X \text{ tal que } \hat\varphi(A) = A \}.$$

Mostremos que $\tau_{\hat\varphi}$ es una topología.

- $X \in \tau_{\hat\varphi}$ ya que $\varphi(X) = X$
- $\emptyset \in \tau_{\hat\varphi}$ ya que $\varphi(\emptyset) \subseteq \emptyset$, lo que implica que $\varphi(\emptyset) = \emptyset$

Para demostrar que $\tau_{\hat\varphi}$ es estable por intersecciones finitas, es suficiente mostrar que si $A, B \in \tau_{\hat\varphi}$, entonces $A \cap B \in \tau_{\hat\varphi}$.

Como $A \in \tau_{\hat\varphi}$, se tiene que $\hat\varphi(A) = A$ y $B \in \tau_{\hat\varphi}$, implica que $\hat\varphi(B) = B$.

$$\text{PD} \quad \varphi(A\cap B) = A\cap B.$$

Por la propiedad iv) de $\hat\varphi$ tenemos que

$$\hat\varphi(A\cap B) = \hat\varphi(A) \cap \hat\varphi(B) = A \cap B.$$

Así, se sigue que $A\cap B \in \tau_{\hat\varphi}$.

Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in} \in \tau_{\hat\varphi}$,

$$\text{PD} \quad \bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha \in \tau_{\hat\varphi} \Leftrightarrow \hat\varphi\Big(\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$$

Por ii)
$$\hat{\varphi}\left(\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$$
Para demostrar que
$$\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha \subset \hat{\varphi}\left(\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha\right)$$
necesitamos el siguiente resultado.

Si $\hat{\varphi}$ verifica las propiedades anteriores, se tiene que
$$A\subset B \Rightarrow \hat{\varphi}(A)\subseteq\hat{\varphi}(B).$$
En efecto, si $A\subset B$, entonces $A = A\cap B$; por lo tanto
$$\hat{\varphi}(A) = \hat{\varphi}(A\cap B) = \hat{\varphi}(A)\cap\hat{\varphi}(B) \subseteq \hat{\varphi}(B)$$
$$\Rightarrow \hat{\varphi}(A)\subseteq\hat{\varphi}(B)$$
Entonces, con esta nueva propiedad tenemos que:

Si $i\in A$, entonces $A_i \subset \bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$

Por la nueva propiedad tenemos que
$$A_i = \hat{\varphi}(A_i) \subset \hat{\varphi}\left(\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha\right).$$
Tomando la unión, se sigue que
$$\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha \subset \hat{\varphi}\left(\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right)$$
Para terminar, falta mostrar que el interior de un conjunto para la topología $\tau_{\hat{\varphi}}$ es $\hat{\varphi}$ del conjunto.

P.D. $\mathrm{int}(A) = \hat{\varphi}(A)$

$\mathrm{int}(A)\subseteq A \quad\Rightarrow \varphi(\mathrm{int}(A))\subseteq\hat{\varphi}(A) \quad\Rightarrow \mathrm{int}(A)\subseteq\hat{\varphi}(A) \quad (*)$

$\hat{\varphi}(A) = \hat{\varphi}(\hat{\varphi}(A))$ por iii).

Ahora como $\hat{\varphi}(A)\in\tau_{\hat{\varphi}}$, se tiene que $\mathrm{int}(\hat{\varphi}(A)) = \hat{\varphi}(A)$ (proposición 1.6)

$\hat{\varphi}(A) = \hat{\varphi}(\mathrm{int}(\hat{\varphi}(A)))$. Como $\mathrm{int}(\hat{\varphi}(A))\in\tau_{\hat{\varphi}}$, tenemos que $\hat{\varphi}(\mathrm{int}(\hat{\varphi}(A))) = \mathrm{int}(\hat{\varphi}(A))$.

Por lo tanto,
$$\hat{\varphi}(A) = \mathrm{int}(\hat{\varphi}(A))$$
Observación:

Si suponemos que $\hat{\varphi}$ verifica únicamente i), ii), iv) entonces $\hat{\varphi}$ induce una topología sobre X, $\tau_{\hat{\varphi}}$.

Pero no se tiene que $\mathrm{int}(A) = \hat{\varphi}(A)$, únicamente se puede tener $(*)$

Pero si $A\subset X$, tal que $A\in\tau_{\hat{\varphi}}$, entonces.
$$\mathrm{Int}(A) = \hat{\varphi}(A)$$
$$\hat{\varphi}(A) = A = \mathrm{int}(A).$$
Clausura de un conjunto.

Definición. 1.8

Sea (X,τ_X) un espacio topológico y $A\subseteq X$ no vacío. Decimos que $x\in X$ es un punto adherente o de clausura del conjunto A si se tiene que para toda $\mathcal{V}_x\in\mathcal{V}(x)$ se tiene que
$$\mathcal{V}_x\cap A\neq\emptyset$$
Al conjunto de todos los puntos adherentes de A se lo conoce como clausura de A, esta se la nota por $\bar{A}$.

Observación.

La definición 1.8 es equivalente a la siguiente.

~~prop.~~ def. Tenemos que x es un punto de clausura si para toda $V_x \in V(x)$ vecindad abierta de x se tiene que

$$V_x \cap A \neq \emptyset$$

Proposición 1.9
Sea (X, τ_X) un espacio topológico y $A \subset X$ no vacío, se tiene que

$$A \text{ es cerrado para } \tau_X \text{ si y solo si } \overline{A} = A$$

Demostración.
En primer lugar, hace falta demostrar lo siguiente

$$\overline{A} = \bigcap \{ F \subset X : F \text{ es cerrado y } A \subset F \}$$

En efecto, mostremos que $\overline{A}$ es cerrado.
Es decir, que $(\overline{A})^c$ es abierto. Si $x \in (\overline{A})^c$ entonces existe $V_x \in U(x)$ tal que

$$V_x \cap A = \emptyset,$$

es decir, $W_x \subseteq A^c$

Viernes, 4 de junio de 2021
Clausura de un conjunto.
Supongamos que A es cerrado, mostremos que $A = \overline{A}$.
Como siempre se tiene que $A \subset \overline{A}$. Faltaría mostrar $\overline{A} \subset A$.
Por complementos, mostremos que si $x \in A^c$, entonces $x \in (\overline{A})^c$
Como $x \notin A$ y A es cerrado, se tiene que existe U_x abierto vecindad de x tal que $U_x \cap A = \emptyset$.
Así, $x \notin \overline{A}$. (Lo que se quería mostrar)
$\Leftarrow$ Supongamos que $A = \overline{A}$. P.D A es cerrado.
Es decir que A^c es abierto. Como $x \notin A = \overline{A}$, entonces existe U_x una vecindad abierta de x tal que

$$U_x \cap A = \emptyset \Rightarrow U_x \subset A^c$$

Lo que muestra que A^c es abierto al ser vecindad de todos sus puntos.

Obs. Análogamente al interior, podemos definir el operador clausura

$$cl : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

$$A \subset X \mapsto cl(A) = \overline{A}$$

Este operador es cerrado en el siguiente sentido.

Proposición 1.10. Sea $A \subset X$ y $B \subset X$ tal que $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$

Prop. 1.11. - Propiedades de la clausura -

1) $\overline{A} = \bigcap \{ F \subset X : F \text{ es cerrado con } A \subset F \}$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A.
2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
3) $\overline{\emptyset} = \emptyset$
4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Demostración

$$A \subseteq \overline{A} \Rightarrow \bigcap \{ F \subset X : F \text{ cerrado con } A \subset F \} \subset \overline{A}$$

P.D. $\overline{A} \subset \bigcap \{ F \subset X : F \text{ cerrado y } A \subset F \}$

Es decir que $\forall F\subset X$ cerrado y $A\subset F$ se tiene que. $\overline{A}\subset F$.

Sea $F\subset X$ tal que F es cerrado y además $A\subset F$.
Por la (proposición 1.10) se tiene que $\overline{A}\subset\overline{F}$. Como F es cerrado utilizando la (proposición 1.9) se tiene que $\overline{A}\subset\overline{F}=F$. Así, para todo $F\subset X$, tal que F es cerrado y $A\subset F$, se tiene que $\overline{A}\subset F$.
Por tanto, se sigue que $\overline{A}\subset\bigcap\{F\subset X : F \text{ cerrado y } A\subset F\}$

2) Evidente ya que $\overline{A}$ es cerrado y así $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

3) Como X es abierto. $X^c=\emptyset$ es cerrado así, $\overline{\emptyset}=\emptyset$

4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$$A\subset A\cup B \Rightarrow \overline{A}\subseteq\overline{A\cup B}$$
$$B\subset A\cup B \Rightarrow \overline{B}\subseteq\overline{A\cup B} \Rightarrow \overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$$

Ahora, mostremos que $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$; puesto que

$A\subseteq\overline{A}$ y $B\subseteq\overline{B}$, se sigue que

$$A\cup B\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$$

donde $\overline{A}\cup\overline{B}$ es un conjunto cerrado y por lo tanto

$$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

5) $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$

Proposición 1.12 Sea (X,τ_X) un espacio topológico y $A\subset X$, se tiene que.

i) $(\text{Int}(A))^c=\overline{(A^c)}$ ii) $(\overline{A})^c=\text{int}(A^c)$

Demostración
i) Si $x\in\overline{(A^c)}$, entonces para toda $V_x\in V(x)$

$$V_x\cap A^c\neq\emptyset$$

es decir que $x\notin \text{int}(A)$

Si $x\notin\text{int}(A) \Rightarrow \forall V_x\in V(x)$, se tiene que $V_x\cap A^c\neq\emptyset$; así $x\in\overline{(A^c)}$.

ii) $A\subseteq\overline{A}\Rightarrow(\overline{A})^c\subset A^c$. Como $(\overline{A})^c$ es abierto y $(\overline{A})^c\subseteq A^c$, se tiene que $(\overline{A})^c\subseteq\text{int}(A^c)$.

Si $x\in\text{int}(A^c)\Rightarrow$ existe $V_x\in V(x)$ tal que $x\in V_x\subset A^c$. Por tanto,

$$V_x\cap A\neq\emptyset.$$

Lo que muestra que $x\notin\overline{A}$.

Proposición 1.13. Sea X un conjunto no vacío tal que se pueda definir $\varphi:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ que verifica lo siguiente:

1) $\varphi(\emptyset)=\emptyset$
2) $A\subset\varphi(A)$ $\quad\forall A\subset X$
3) $\varphi\varphi(A)=\varphi(A)$ $\quad\forall A\subset X$
4) $\varphi(A\cup B)=\varphi(A)\cup\varphi(B)$

Entonces existe una única topología τ_φ en X tal que el operador clausura de esta topología coincide con φ. Es decir que $\forall A\subset X$ $\varphi(A)=\overline{A}$

Definamos

$$\emptyset: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$
$$A \longmapsto \emptyset(A) = (\Psi(A^c))^c$$

Utilizando la proposición 1.7 tendríamos que mostrar que

i) $\varphi(A) \subset A$

ii) $\emptyset(X) = X$

iii) $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$

iv) $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$

Demostración

ii) $\emptyset(X) = (\Psi(X^c))^c = (\Psi(\emptyset))^c = (\emptyset)^c = X$

i) $A^c \subseteq \Psi(A^c) \Rightarrow \Psi(A^c)^c \subseteq (A^c)^c \Rightarrow \varphi(A) \subseteq A$

iii) $\varphi(A) \subseteq A \Rightarrow \varphi(\varphi(A)) \subset \varphi(A)$

$$\varphi(\varphi(A)) = \left(\Psi\left(((\Psi(A^c))^c)^c\right)\right)^c = \left(\Psi(\Psi(A^c))\right)^c = \left(\Psi(A^c)\right)^c = \varphi(A)$$

iv) $\varphi(A \cap B) = (\Psi((A\cap B)^c))^c = (\Psi(A^c \cup B^c))^c = (\Psi(A^c) \cup \Psi(B^c))^c = (\Psi(A^c))^c \cap (\Psi(B^c))^c$

$$= \varphi(A) \cup \varphi(B)$$

Hemos demostrado que existe una topología T_φ definida sobre X tal que $\forall A \subset X$ $int(A) = \varphi(A)$

Faltaría mostrar que para todo $A \subseteq X$, se tenga que $\overline{A} = \Psi(A)$

$$\varphi(A^c) = int(A^c) = (\overline{A})^c = (\Psi((A^c)^c))^c \Rightarrow \overline{A} = \Psi(A)$$

Defi. 1.14. Sea (X, τ_X) un espacio topológico y $A \subset X$, definimos a la frontera de A como el siguiente conjunto

$$Fr(A) = \overline{A} \setminus int(A)$$
$$Fr(A) = \{x \in X : x \in \overline{A} \text{ y } x \notin int(A)\}$$
$$= \{x \in X : \forall V_x \in \mathcal{U}(x) \ V_x \cap A \neq \emptyset \text{ y } \forall V_x \in \mathcal{U}_x \ V_x \not\subseteq A\}$$
$$= \{x \in X : \forall V_x \in \mathcal{U}(x) \ V_x \cap A \neq \emptyset \text{ y } \forall V_x \cap A^c \neq \emptyset\}$$

Prop. 1.15 Tenemos que.

i) $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

ii) $int(A) = A \cap (Fr(A))^c$

iii) $\{Int(A), Fr(A), Int(A^c)\}$ es una partición del conjunto X.

Defi. Dada una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos no vacíos de X. Decimos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición de X si.

i) $\forall i \neq j \in I \quad A_i \cap A_j = \emptyset$ y

ii) $\bigcup_{i \in I} U_i = X$

Demostración 1.15

i) evidente

ii)
$$\begin{aligned} A\cap (Fr(A))^c &= A\cap(\overline{A}\cap Int(A)^c)^c \\ &= A\cap((\overline{A})^c\cup int(A)) \\ &= (A\cap\overline{A}^c)\cup(A\cap int(A)) \\ &= (A\cap\overline{A}^c)\cup int(A) \\ &= int(A). \end{aligned}$$

puesto que $A\subseteq\overline{A} \Rightarrow A\cap\overline{A}^c=\emptyset$

iii)
$$\left.\begin{aligned} Int(A)\cap Int(A^c) &= \emptyset \\ Int(A)\cap Fr(A) &= \emptyset \\ Int(A^c)\cap Fr(A) &= \emptyset \end{aligned}\right\} \text{ disjuntas 2 a 2.}$$

$$\begin{aligned} &Int(A^c)\cap Fr(A) \\ &(\overline{A})^c\cap(\overline{A}\cap\overline{A^c}) \\ &= (\overline{A}^c\cap\overline{A})\cap(\overline{A^c}) \\ &= \emptyset\cap\overline{A^c}=\emptyset \end{aligned}$$

P.D $X=Int(A)\cup Fr(A)\cup Int(A^c)$

↳ $Int(A)\cup Fr(A)\cup Int(A^c)\subseteq X$.

Sea $x\in X$, notemos que

$$\begin{aligned} Fr(A)\cup int(A)\cup int(A^c) &= (\overline{A}\cap(int(A))^c)\cup int(A)\cup int(A^c) \\ &= (\overline{A}\cup int(A))\cap((int(A))^c\cup int(A))\cup int(A^c) \\ &= (\overline{A}\cup int(A))\cap(X)\cup int(A^c) \\ &= (\overline{A}\cup int(A))\cup int(A^c) \\ &= \overline{A}\cup int(A^c) = \overline{A}\cup(\overline{A})^c = X. \end{aligned}$$

Martes 8 de junio de 2021

Ejemplos: Frontera de un conjunto.

1) Si (X,τ_{dis}) es el espacio topológico con la topología discreta, se tiene que para todo $A\subseteq X$, $Fr(A)=\emptyset$

2) Si (X,τ_{ind}) es el espacio topológico con la topología indiscreta, entonces $\forall A\subseteq X$, $Fr(A)=\emptyset$

3) Si (X,d) es un espacio métrico, entonces
$$Fr(\{B(x,r)\})\subset S(x,r)=\{y\in X: d(x,y)=r\}$$

- Si el espacio es normado entonces se tiene que
$$Fr(B(x,r))=S(x,r).$$

Densidad en espacios topológicos.

Definición 1.16. Sea (X,τ_X) un espacio topológico no vacío. Decimos que $A\subseteq X$ es un conjunto denso para la topología τ_X si $\overline{A}=X$.

Definición 1.17. Decimos que un espacio topológico es separable si existe un subconjunto numerable y denso.

Ejemplos.

- Trivialmente en (X, τ_X), X es denso.
- Si consideramos $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{Q}^n$ es un conjunto denso y numerable, por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es separable.
- Si consideramos $\mathbb{C}^n$, entonces $\mathbb{Q}^n \times i\mathbb{Q}^n$ es un conjunto denso y numerable. Así, $\mathbb{C}^n$ es seperable.
- Consideremos $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, con $p \in [1, +\infty[$ son espacios topológicos separables

$F_N = \langle \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle$ $\qquad e_n = \{0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-ésimo}}}{1}, 0, \dots\}$

$F_N = \{$ combinaciones lineales de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$

F_N es denso en ℓ^p, con $p \in [1, +\infty[$, F_N no es numerable, pero si consideramos

$F_{N_\mathbb{Q}} = \{$ combinaciones lineales racionales de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$

Si $y \in F_{N_\mathbb{Q}}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$y = \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i e_i \qquad \text{donde } \lambda_i \in \mathbb{Q} \quad \forall i \in \{1, \dots, n_0\}$$

$F_{N_\mathbb{Q}}$ es numerable y además es denso en ℓ^p con $p \in [1, +\infty[$.

Así, ℓ^p es separable.

Proposición 1.18. Sea (X, τ_X) un espacio topológico.

Supongamos que existe $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de τ_X que verifique lo siguiente:

① $\forall i \in I \quad \mathcal{O}_i \neq \emptyset$ $\qquad$ ② $\forall i, j \in I \; i \neq j$ se tiene que $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$

③ I no sea numerable.

Entonces, τ_X no es una topología separable.

Obs. La proposición 1.18 nos da una condición suficiente para que un espacio topológico no sea separable.

- Si (X, τ_X) es un espacio topológico no separable, esto no implica que (X, τ_X) verifica la proposición 1.18.

Demostración:

Supongamos por el absurdo, es decir que (X, τ_X) es separable

Como (X, τ_X) es separable, entonces existe $A \subseteq X$ denso y numerable. Así, podemos considerar

$$A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Se tiene que para cada $i \in I$, existe $n(i) \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_{n(i)} \in \mathcal{O}_i \qquad (*)$$

(En efecto, como A es denso, se tiene que para todo $\mathcal{O} \in \tau_X$, $\mathcal{O} \cap A \neq \emptyset$.

En particular, para todo $i \in I$

$$\mathcal{O}_i \cap A \neq \emptyset$$

es decir, existe

$$u_{n(i)} \in \mathcal{O}_i \quad \text{y} \quad u_{n(i)} \in A)$$

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} n : I &\longrightarrow \mathbb{N} \\ i &\longmapsto n(i) \end{aligned}$$

que verifica $(*)$

Mostremos que $n(\cdot)$ es inyectiva

Si consideramos $n(i)=n(j)$ tenemos que

$$U_{n(i)} \in O_i \quad y \quad U_{n(j)} \in O_j$$

$$U_{n(j)} \in O_i \quad y \quad U_{n(i)} \in O_j$$

Como $\forall i\neq j$ se tiene que $O_i \cap O_j = \emptyset$ y además $O_i \cap O_j \neq \emptyset$ se concluye que

$$O_i = O_j \Leftrightarrow i=j$$

Ahora como I no es numerable, se tiene una contradicción $\square$

Con esta última proposición se puede mostrar que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ no es separable

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}} \qquad I = 2^{\mathbb{N}}$$

Consideremos $A\subseteq \mathbb{N}$, $e \in \ell^\infty$, como

$$e_A = (e_A^1, \dots, e_A^n, \dots)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, definamos

$$e_A^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in A \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$A = \{1,3,5\}$.

$e_A = \{1,0,1,0,1,\dots\}$.

Es claro que para todo $A\subseteq\mathbb{N}$ $e_A \in \ell^\infty$.

$B(e_A, 1/2) = \{x\in \ell^\infty : \|e_A - x\|_\infty < 1/2\}$

$\{B(e_A,1/2)\}_{A\subseteq\mathbb{N}}$. Verifiquemos que esta familia de abiertos verifica la proposición 1.18

1) $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ $B(e_A,1/2)\neq\emptyset$ ya que $e_A \in B(e_A,1/2)$

3) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es no numerable

Faltaría mostrar que para todo $A,B\subseteq X$ tal que $A\neq B$, entonces

$$B(e_A,1/2)\cap B(e_A,1/2) = \emptyset$$

Supongamos que $z\in B(e_A,1/2)$ y $z\in B(e_B,1/2)$; entonces

$$z = (z^1,\dots,z^n,\dots)$$

$$\|z-e_A\| = \max_{j\in\mathbb{N}} |z^j - e_A^j| < \frac{1}{2} \quad y \quad \|z-e_B\| = \max_{j\in\mathbb{N}} |z^j - e_B^j| < \frac{1}{2}$$

Además, como $A\neq B$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que

$$e_A^k = 1 \quad y \quad e_B^k = 0$$

$$d(e_A,e_B) \leq d(e_A,z) + d(e_B,z) < 1$$

$$d(e_A,e_B) = \max_{j\in\mathbb{N}} |e_A^j - e_B^j| \qquad \max_{j\in\mathbb{N}} |e_A^j - e_B^j| \geq |e_A^j - e_B^j| = 1$$

$$1 \leq d(e_A,e_B) < 1 \quad \Rightarrow \quad 1<1 \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

Por lo tanto, $\{B(e_A,1/2)\}_{A\subseteq\mathbb{N}}$ verifica la proposición 1.18

Lo que implica que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ no es separable

Proposición 1.19. Sea (X,τ_X) un espacio topológico y $A\subseteq X$ un conjunto denso, se tiene que para todo $\mathcal{U}\in\tau_X$,

$$\overline{U}=\overline{A\cap U}$$

Demostración.
Es evidente que $\overline{A\cap U}\subseteq\overline{U}$.
Sea $x\in\overline{U}$, MQ $x\in\overline{A\cap U}$.
Si $x\in\overline{U}$, entonces para todo $V_x\in V(x)$.

$$V_x\cap U\neq\emptyset$$

existe $U_x\in\tau_X$ tal que $x\in U_x\subseteq V_x$, entonces, como $x\in\overline{U}$, se tiene que

$$U_x\cap U\neq\emptyset$$

Como $U_x\cap U$ es un abierto de τ_X y A es denso tenemos que

$$(U_x\cap U)\cap A\neq\emptyset$$
$$U_x\cap(A\cap U)\neq\emptyset$$

y además, como

$$U_x\cap(U\cap A)\subseteq V_x\cap(U\cap A)$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $x\in\overline{U\cap A}$.

Observación.
Si consideramos (X,τ_X) un es un espacio topológico, entonces se tienen los siguientes enunciados equivalentes

i) $A\subset X$ es denso
ii) $\forall\, \mathcal{U}\in\tau_X$ y $\mathcal{U}\neq\emptyset$ se tiene que $A\cap\mathcal{U}\neq\emptyset$
iii) $\forall x\in X$ $\forall\, \mathcal{U}_x\in\mathcal{V}(x)$, se tiene que

$$\mathcal{U}_x\cap A\neq\emptyset.$$

ii) En efecto, si $A\subseteq X$ denso, entonces $\overline{A}=X$. Es decir, si $x\in X=\overline{A}$, entonces

$\forall\, V_x\in V(x)$ se tiene que $\mathcal{V}_x\cap A\neq\emptyset$.

Ahora, si consideramos $\mathcal{U}\in\tau_X$ no vacío tenemos que $\exists x\in U$. Como $U\in\tau_X$, $\mathcal{U}$ es vecindad de X. Por lo tanterior $(x\in X)$ se tiene que $U\cap A\neq\emptyset$.

Bases de una topología

Definición 1.20. Sea (X,τ_X) un espacio topológico no vacío y β una familia de abiertos de τ_X, decimos que β es una base para la topología τ_X si:

- $\forall\, U\in\tau_X$, $\exists\,(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia de elementos de β tal que

$$U=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha.$$

A los elementos de la base de una topología se los conoce como abiertos básicos.

Proposición 1.21 Sea (X,τ_X) un espacio topológico no vacío y β una familia de abiertos de τ_X, entonces se tiene que β es una base para τ_X si y solamente si

- $\forall\, U\in\tau_X$, y $\forall x\in\mathcal{U}$, existe $V_x\in\beta$ tal que

$$x\in V_x\subseteq\mathcal{U}.$$

Demostración.
$\Rightarrow$ Supongamos que β es una base en τ_X. Sea $\mathcal{U}\in\tau_X$, mostremos que

$$(\forall x\in U)\,(\exists\, V_x\in\beta)\ \text{tal que}\ x\in V_x\subset V$$

Como U es un abierto en τ_X y β es una base, tenemos que existe $(U_\alpha)_{\alpha\in A} \in \beta$ tal que

$$U = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \qquad \text{Se tiene que } x \in \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$$

Es decir que existe $j\in A$ tal que $x\in U_j$. Como $U_j \in \beta$, podemos tomar $V_x = U_j$ para concluir que

$$x \in V_x = U_j \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = U.$$

$\Leftarrow$ Supongamos que β tiene la siguiente propiedad

$\forall U \quad \forall x\in U \quad \exists V_x \in \beta$ tal que $V_x \subset U$

P.D β es una base de τ_X.

Sea $U\in\tau_X$. P.D Existe $(U_\alpha)_{\alpha\in A}\in\beta$ tal que

$$U = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$$

Por hipótesis, tenemos que $\forall x\in U$, $\exists V_x \in\beta$ tal que

$$x\in V_x \subset U \quad (*)$$

Se tiene que $\bigcup_{z\in U} V_z = U$, donde V_z, verifica $(*)$. Como $(V_z)_{z\in U}$ es una familia de elementos de β. Se tiene que β es una base de τ_X.

Jueves 10 de mayo de 2021

Bases de una topología

Prop. 1.12 Sea X un conjunto no vacío y asumamos que exista $\beta \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que verifica
i) $\forall x\in X \ \exists V\in\beta$ tal que $x\in V$ ii) $\forall V_1,V_2\in\beta \ \ \forall x\in V_1\cap V_2 \ \exists \hat{V}\in\beta$ tal que $x\in\hat{V}\subseteq V_1\cap V_2$.
entonces existe una única topología τ sobre X tal que β es una base de τ.

Demostración.

Definimos $\tau = \{$Uniones arbitraria de elementos de $\beta\}$

P.D τ es una topología.

1) $\emptyset \in\tau$ ya que $\emptyset\in\beta$

2) $X\in\tau$ ya que por la propiedad i) de β se tiene que para todo $x\in X$, existe $V_x\in\beta$ tal que $x\in V^x$. Así,

$$X = \bigcup_{x\in X} V_x$$

Por tanto, X es una unión arbitraria de elementos de β.

3) Dado $\{U_i\}_{i=1}^n \in\tau$, entonces mostremos que

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \in\tau.$$

Se tiene que para todo $i\in\{1,\dots,n\}$ existe A_i, una familia de índices tal que

$$U_i = \bigcup_{i\in A_i} \beta_{\psi(i)} \quad \text{donde } \beta_{\psi(i)}\in\beta$$

Por lo tanto,

$$\bigcap_{i=1}^n (U_i) = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcup_{\psi(i)\in A_i} \beta_{\psi(i)}\right) = \bigcup_{\psi(i)\in A_i}\left(\bigcap_{i=1}^n \beta_{\psi(i)}\right).$$

Ahora, utilizando ii) de las propiedades de β $\forall x\in \bigcap_{i=1}^n \beta_{\psi(i)}$, existe $W_x\in\beta$ tal que.

$$x\in W_x \subseteq \bigcap_{i=1}^n \beta_{\psi(i)}$$

Así, tenemos que

$$\bigcup_{x\in\bigcap_{i=1}^n \beta_{\psi(i)}} W_x = \bigcap_{i=1}^n \beta_{\psi(i)}$$

Por tanto, se concluye que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \beta_{\varphi(i)} \in \tau_x .$$

Por lo cual, tenemos que

$$\bigcup_{\varphi(i)\in A_i}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \beta_{\varphi(i)}\right) = \bigcup_{\varphi(i)\in A_i}\left(\bigcup_{w_x \in \beta}\left\{ w_x : x \in \bigcap_{i=1}^{n} \beta_{\varphi(i)}\right\}\right)$$

Así, se sigue que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es la unión arbitraria de elementos de β. Por lo tanto, pertenece a la topología.

4.) Dado $\{U_i\}_{i\in A}$. P.D $\bigcup_{i\in A} U_i \in \tau_x$

Como para todo $i \in A$, existe A_i un conjunto de índices tal que

$$U_i = \bigcup_{\varphi(i)\in A_i} \beta_{\varphi(i)}$$

tenemos que

$$\bigcup_{i\in A} U_i = \bigcup_{i\in A}\left(\bigcup_{\varphi(i)\in A_i} \beta_{\varphi(i)}\right) = \bigcup_{\substack{i\in A\\ \varphi(i)\in A_i}} \beta_{\varphi(i)}.$$

Así, $\bigcup_{i\in I} U_i$ son la unión arbitraria de elementos de β, por lo tanto pertenece a τ.

Por último, mostremos que, τ es la única topología tal que β es una base.

Supongamos que existe otra topología τ_1, tal que β sea una base para τ_1.

P.D. $\tau_1 = \tau$

Si $U \in \tau_1$, entonces $U = \bigcup_{\alpha\in A} \beta_\alpha$ con $\beta_\alpha \in \beta$.

Por definición de la topología τ, tenemos que $U \in \tau$.

Si $V \in \tau$, entonces $V = \bigcup_{\gamma\in A} \beta_\gamma$ con $\beta_\gamma \in \beta$.

Así, en particular, todos los elementos de β son abiertos en τ_1. Por tal motivo concluimos que $V \in \tau_1$.

Por definición de la topología τ_1 tenemos que $V \in \tau$.

Bases de vecindades para una topología.

Consideremos X un conjunto no vacío sobre el cual definimos una topología τ_x

Definición 1.23. Sea $x \in X$, decimos que $\beta_x \subset V(x)$ es una base de $V(x)$ o β_x es un sistema fundamental de vecindades de X si

$$\forall\, V_x \in V(x),\ \exists\, U_x \in \beta_x \text{ tal que } x \in U_x \subseteq V_x$$

Ejemplos

- Si (X,d) es un espacio métrico, sabemos que $\forall x \in X$, $V(x) = \{B(x,r) : r>0\}$

  Consideramos $\beta_x = \{B(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$

  β_x es una base de $V(x)$

  β_x es un sistema fundamental de vecindades para τ_d. En efecto, sea $A_x \in V(x)$, entonces

  $$A_x = B(x,r) \quad \text{para algún } r>0$$

  Como $r>0$, existe $n_r \in \mathbb{N}$ tal que

  $$\frac{1}{n_r} < r.$$

  Por lo tanto, se sigue que

  $$B(x, \tfrac{1}{n_r}) \subseteq B(x,r).$$

  Además, como $B(x, 1/n_r) \in \beta_x$, tenemos que β_x es una base de vecindades de τ_x.

- Si consideramos (X, τ_{dis}), dado $x \in X$

  $$V(x) = \{A \subset X : x \in A\}$$

entonces

$$\beta_x = \{\{x\}\} \text{ es una base de } \mathcal{V}(x) \qquad \beta_x = \mathcal{V}(x)$$

Definición 1.24. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico, no vacío, decimos que $\mathcal{T}_X$ tiene la propiedad T_1 si admite un sistema fundamental, para cada $x \in X$, ~~de~~ numerable.

Decimos que $\mathcal{T}_X$ tiene la propiedad T_2 si admite una base numerable.

Observación 1.

La propiedad $T_2 \Rightarrow$ La propiedad T_1

Supongamos que $\mathcal{T}_X$ verifica T_2, es decir que existe $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ una base numerable de $\mathcal{T}_X$.

P.D. $\forall y \in X$, $\exists \beta_y$ un sistema de vecindades numerable para $\mathcal{T}_X$.

Definimos

$$\beta_y = \{\beta_k \in \beta : y \in \beta_k\}$$

Como $\emptyset = \beta_y \subseteq \beta$ y β es numerable, se tiene que β_y es numerable.

P.D. β_y es un sistema fundamental de vecindades.

Sea $V^y \in \mathcal{V}(y)$, P.D. $\exists W^y \in \beta_y$ tal que $y \in W^y \subset V^y$

Como V^y es una vecindad de y, existe $U \in \mathcal{T}$ tal que

$$y \in U \subseteq V^y$$

Como β es una base de $\mathcal{T}_X$ tenemos que

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i \qquad \text{donde } I \text{ es un conjunto de índices numerable}$$

Así, existe $j \in I$ tal que

$$y \in B_j \subset \bigcup_{i \in I} B_i = U \subset V^y$$

Por tanto,

$$y \in B_j \subset V^y \quad y \quad B_j \in \beta_y$$

Así, hemos probado que β_y es un sistema fundamental de vecindades numerable.

Por tanto, $\mathcal{T}_X$ verifica la propiedad T_1.

Observación 2. T_1 no implica T_2.

Para mostrar esto utilizaremos la siguiente proposición de espacios métricos.

Notemos que si (X, d) es un espacio métrico no vacío, se tiene que $(X, \mathcal{T}_d)$ tiene la propiedad T_1. Ya que, como vimos anteriormente

$$\beta_x = \{B(x, 1/n) : n\}$$

es un sistema fundamental de vecindades de $\mathcal{T}_d$. Además, β_x es numerable. Por tanto $(X, \mathcal{T}_d)$ tiene la propiedad T_1.

Proposición 1.25.

Sea (X, d) un espacio métrico no vacío, se tiene que $\mathcal{T}_d$ tiene la proporición T_2 si y solo si es separable

Supongamos que $\mathcal{T}_d$ tiene la propiedad T_2. Es decir que existe

$$\beta = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$$

β base y además numerable.

Por el «axioma de elección», podemos tomar

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in U_n$$

Tomamos
$$A = \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$$
P.D. A es denso y numerable.

A claramente es numerable. P.D A es denso

Sea $\mathcal{U}$ un abierto no vacío de τ_d. P.D
$$U \cap A \neq \emptyset$$
Como β es una base de τ_d y U un abierto, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que
$$U_j \subset U$$
Por tanto, existe $a_j \in A$ tal que $a_j \in U_j \subset U$. Así, $A \cap U \neq \emptyset$

$\Leftarrow$) Supongamos que τ_d es separable.

P.D. τ_d admite la propiedad T_2.

Como τ_d es separable, existe $A = \{ a_k : k \in \mathbb{N} \}$ denso numerable.

P.D Existe una base numerable de τ_d.

Consideremos
$$\beta : \{ B(a_n, 1/m) : a_n \in A, n \in \mathbb{N} \}$$
β es numerable ya que A es numerable.

P.D β es una base de τ_d.

Sea U un abierto no vacío, existe $x \in X$ tal que

$x \in U$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset U$.

Existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_x < r_x$ y de donde
$$B(x, 1/n_x) \subset B(x, r_x) \subset U.$$
Como A es denso, se tiene que
$$A \cap B(x, 1/n_x) \neq \emptyset$$
Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \in A$ y $a_k \in B(x, 1/n_x)$. Por tanto, $x \in B(a_k, 1/n_x)$.

P.D.
$$B(a_k, 1/n_k) \subset U$$
Sea $z \in B(a_k, 1/n_k)$, tenemos que
$$d(x,z) \leq d(x, a_k) + d(a_k, z)$$
$$< \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_k} < \frac{r_x}{4} + \frac{r_x}{4} < \frac{1}{2} r.$$
Así,
$$B(a_k, 1/n_x) \subset U.$$
Y, como $B(a_n, 1/n_x) \in \beta$, tenemos que β es una base numerable de τ_d.

Por tal motivo, τ_d tiene la propiedad T_2.

Observación

Con esta última proposición, tenemos lo siguiente.

La propiedad T_1 no implica la propiedad T_2.

1) Basta considerar un espacio métrico, (siempre tiene la propiedad T_1) que no sea separable. Ejemplo $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

2) Con respecto a la proposición 1.25 en espacios topológicos; es decir,
$$(X, \tau) \text{ verifica } T_2 \iff \tau \text{ es separable}$$
Este enunciado es falso y únicamente se tiene que
$$(X, \tau) \text{ verifica } T_2 \Rightarrow \tau \text{ es separable}$$

Viernes 11 de junio de 2021.

Observación Sea (X, τ_X) un espacio topológico, entonces si $\mathcal{B}_x$ es una base de vecindades del punto «x» en la topología τ_X, se tiene lo siguiente

1) Si $V \in \beta_x$, entonces $x \in V$

2) Si $y \in U \in \beta_x$, entonces existe $V_y \in \beta_y$ tal que $y \in V \subset U$

3) Si V_1 y $V_2 \in \beta$, entonces $V \in \beta_x$ tal que $V \subset V_1 \cap V_2$

Proposición 1.26 Sea X un conjunto no vacío sobre el cual sabemos que existe lo siguiente para cada x, existe $\beta_x \subset \mathcal{P}(x)$ tal que β_x verifique 1), 2), 3), entonces existe una única topología sobre X tal que β_x sea una base de vecindades de x para esa topología.

Demostración. Consideremos

$$\beta = \{ \bigcup B_x : x \in X \quad y \quad B_x \in \beta_x \}$$

Bastaría mostrar que β verifica las propiedades de una base y utilizando la propiedad 1.22 se tendría que β genera una única topología tal que la base de esta topología es β.

Mostremos que

i) $\forall x \in X \ \exists U \in \beta$ tal que $x \in U$.

ii) $\forall V_1, V_2 \in \beta \quad \forall x \in V_1 \cap V_2, \ \exists V_x \in \beta$ tal que $x \in V_x \subset V_1 \cap V_2$.

a) Como $x \in X$, se tiene que existe β_x con las propiedades (1), (2) y (3). Por lo tanto, para todo $B \in \beta_x$, $x \in \hat{B}$, por definición de β tenemos que

$$x \in \tilde{B} \in \beta$$

b) Sean V_1 y $V_2 \in \beta$, entonces consideramos $x \in V_1$ y $x \in V_2$.

P.D $\exists V^x \in \beta$ tal que $x \in V^x \subset V_1 \cap V_2$.

Como $x \in V_1$ y $x \in V_2$, se tiene que, como $V_1 \in \beta$, entonces existe $y_1 \in X$ tal que

V_1 es una vecindad de y_1 $\qquad V_1 \in \beta_{y_1}$

V_2 es una vecindad de y_2 $\qquad V_2 \in \beta_{y_2}$

Utilizando la propiedad 2. tenemos que existe $U_1 \in \beta_{y_1}$ y $U_2 \in \beta_{y_2}$ tal que

$$x \in U_1 \subset V_1 \quad y \quad x \in U_2 \subset V_2 \Rightarrow x \in U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2.$$

como $U_1 \in \beta_x$ y $U \in \beta_x$ utilizando la propiedad 3, tengo que existe $V^x \in \beta_x$ tal que

$$x \in V^x \subset U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2.$$

Por tanto, hemos demostrado que β es una base. Así, β genera una única topología, faltaría mostrar que esta topología admite a β_x como una base de vecindades para el punto.

Por construcción de β es automático (ejercicio)

Sucesiones en espacios topológicos.

Definición 1.27. Sea (X, τ_X) un espacio topológico no vacío. Consideremos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X y $x \in X$. Decimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x, lo notamos

$$x_n \longrightarrow x \quad o \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x$$

si para toda $V_x \in \mathcal{V}(x)$, existe $\tilde{n}(v_x) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > \tilde{n}$

$$x_n \in V_x$$

Observación.

- En un espacio cualquiera el límite no necesariamente es único.
- En los espacios de Hausdorff (separado) el límite de una sucesión, si existe, es único.

pág 19

Definición 1.28 Sea (X, τ_X) un espacio topológico, decimos que (X,τ_X) es separado o un espacio de Hausdorff si para todo $x \neq y$, existe $U_x \in V(x)$ y $V_y \in V(y)$ tales que $U_x \cap V_y = \emptyset$.

Ejemplos.

- (X, d) es un espacio separado.
- (X, τ_{ind}) no es un espacio separado.

Proposición 1.29. Sea (X, τ_X) un espacio topológico separado, el límite de toda sucesión, si existe es único.

Demostración. Supongamos por el absurdo que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergiente a dos puntos distintos, es decir, existe $x, y \in X$ tales que $x_n \to x$ y $x_n \to y$ con $x \neq y$.
Como $x \neq y$ y (X, τ_X) es separado, existe $V_x \in V(x)$ y $V_y \in V(y)$ tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$
Por otro lado, por definición de convergencia, tenemos que existe $n_x \in \mathbb{N}$ y $n_y \in \mathbb{N}$ tal que
$\forall n_1 \geq n_x \quad x_n \in V_x$ y $\forall n_2 \geq n_y \quad x_n \in V_y$, tomando $N = \max\{n_1, n_2\}$, tenemos que
$\forall n \geq N, \quad x_n \in V_x \cap V_y$ lo cual es absurdo.

Definición 1.30. Sea (X, τ_X) un espacio topológico y $A \subset X$, decimos que un punto a pertenece a la clausura secuencial de A si existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to a$ en (X, τ_X)

Al conjunto de estos puntos se lo llama la clausura secuencial de A y se lo nota por $[A]$

Observación.

i) Se tiene que $A \subset [A] \subset \overline{A}$, siempre.
Si $x \in A$, tomando $x_n = x$, se tiene que $x_n \to x$. Si $x \in [A]$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$
Por tanto, $\forall V_x \in V(x)$, existe $n_{V_x} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_{V_x}$ $\quad x_n \in V_x$, es decir $V_x \cap A \neq \emptyset$
lo que implica que $a \in \overline{A}$

ii) $[A] \subseteq [[A]]$ La otra contenencia, en general, en espacios topológicos no se tiene

iii) $[A \cup B] = [A] \cup [B]$

iv) $[A \cap B] \subseteq [A] \cap [B]$

iv) Sea $x \in [A \cap B]$, existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \cap B$ tal que $a_n \to x$ de donde $x \in [A]$ y $x \in [B]$,
por lo tanto $x \in [A] \cap [B]$

iii) Puesto que $A \subseteq A\cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, se sigue que $[A] \cup [B] \subseteq [A \cup B]$.
Recíprocamente, sea $x \in [A \cup B]$, existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \cup B$ tal que $a_n \to x$.
Consideremos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que tiene un número finito de términos en A, es decir existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq n_0$,
$$a_k \in B,$$
tomando la sucesión $z_n = a_{n_0+n}$, tenemos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ y además $z_n \to x$,
Así, se sigue que $x \in [B] \subseteq [A] \cup [B]$.
Consideremos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \cup B$ tal que existe un número infinito de elementos de la sucesión que caen en A.
$$\mathcal{N}_1 = \{ n \in \mathbb{N} : y_n \in A \} \quad \text{este conjunto es infinito,}$$
definimos $n_1 = \inf\limits_{n\in\mathcal{N}_1} n$, entonces $z_1 = y_{n_1}$ análogamente
$$\mathcal{N}_2 = \{ n \in \mathcal{N}_1 : n \neq n_1 \}$$
y definimos $n_2 = \inf\limits_{n\in\mathcal{N}_2} n$, nuevamente
$$\mathcal{N}_3 = \{ n \in \mathcal{N}_2 : n \neq n_2 \}$$
y $n_3 = \inf\limits_{n\in\mathcal{N}_3} n$, por lo tanto
$$n_1 < n_2 < n_3$$
Así, podemos construir por inducción $(\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ y $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una familia de naturales tal que

para todo $k \in \mathbb{N}$

$$N_k \subseteq N_{k-1} \subset \cdots \subset N_1$$

y $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de enteros, entonces tenemos que $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que para todo $k\in\mathbb{N}$ $z_k = y_{n_k}$ y además sabemos que $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.
Además, se tiene que $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x ya que para todo $V_x \in \mathcal{V}(x)$, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $k>k_0$

$$y_k \in V_x.$$

Además, n_k es estrictamente creciente y se tiene que para todo $k\in\mathbb{N}$, $n_k > k$. En particular, $n_{k_0} > k_0$. Es decir que $y_{n_{k_0}} \in V_x$. Tomando $k>k_0$ tengo que $y_{n_k} \in V_x$. Por lo tanto, y_{n_k} converge a x. Así, hemos demostrado que existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $z_n \to x$.
Por tanto, se sigue que

$$x \in [A] \subseteq [A]\cup[B].$$

Proposición 1.31. Sea (X,τ_X) un espacio topológico con la propiedad T_1, entonces para todo $A\subseteq X$, tenemos

$$[A] = \overline{A}$$

Demostración. Sea $A\subseteq X$, cualquiera.
Por propiedades de la clausura secuencial siempre se tiene que $[A]\subseteq\overline{A}$.
P.D. $\overline{A}\subseteq[A]$.
Sea $x\in\overline{A}$, cualquiera.
P.D. Existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ tal que $x_n \to x$.
Como (X,τ_X) tiene la propiedad T_1, tenemos que existe $\beta_x = \{V_n : n\in\mathbb{N}\}$ una base de vecindades numerable. Además, podemos asumir que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifican que para todo $k\in\mathbb{N}$

$$V_k \subset V_{k-1} \subset \cdots \subset V_1. \quad (1)$$

En efecto, si consideramos $\{V_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades de x, numerable, para la topología τ_X, podemos construir $\{\hat{V}_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades numerable con la propiedad (1), de la siguiente manera

$$\hat{V}_1^x = V_1^x, \qquad \hat{V}_2^x = V_1\cap V_2^x \qquad \text{y} \qquad \hat{V}_n^x = \bigcap_{i=1}^{n} V_i^x.$$

Con esta definición, es fácil ver que $\{\hat{V}_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades numerable de «x» con la propiedad (1).
Regresando a nuestro problema, tenemos lo siguiente:
i) $x\in\overline{A}$ ii) $\{V_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ familia de vecindades numerable de x. decreciente.
Como $x\in\overline{A}$ y V_k^x para $k\in\mathbb{N}$ es una vecindad de x, se tiene que

$$A\cap V_k^x \neq \emptyset.$$

Así, se puede construir una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$

$$a_n \in V_n^x.$$

P.D. $a_n \to x$.
Dado $V^x \in \mathcal{V}(x)$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $x\in V_{n_0}^x \subseteq V^x$, ya que $\{V_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de vecindades, tenemos que $a_{n_0}\in V_{n_0}^x$, como para todo $k>n_0$

$$a_k \in V_k^x \subseteq V_{n_0}^x,$$

tenemos que para todo $k>n_0$

$$a_k \in V_{n_0}^x \subset V^x \Rightarrow a_k \in V^x$$

y por lo tanto $a_k \to x$. Como $x\in\overline{A}$ fue arbitrario $\overline{A}\subseteq[A]$.

Subespacio topológico

Si consideramos (X,τ_X) un espacio topológico no vacío y $Y \subsetneq X$ subconjunto propio de X. Sobre Y podemos construir una topología a partir de τ_X. Así, podemos dar una estructura de topología a todo subconjunto de la siguiente forma.

Proposición 1.32. Sea (X,τ_X) un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Consideramos $\tau_Y \subseteq \mathcal{P}(Y)$ de la siguiente forma

$$\tau_Y = \{ U \cap Y : U \in \tau_X \},$$

entonces τ_Y es una topología sobre Y.

Demostración: Como $\emptyset$ y X son elementos de τ_X, tenemos que

$$\emptyset \cap Y = \emptyset \qquad \text{y} \qquad X \cap Y = Y$$

con lo cual $\emptyset, Y \in \tau_Y$

- Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia arbitraria de elementos τ_Y. P.D. $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha \in \tau_Y$.

Por definición, tenemos que para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, existe $U_\alpha \in \tau_X$ tal que

$$V_\alpha = U_\alpha \cap Y.$$

Se tiene lo siguiente

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha\right) \cap Y$$

Como $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una familia de abiertos de τ_X, tenemos que $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \in \tau_X$. Así, tenemos que

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha\right) \cap Y \in \tau_Y$$

- Sea $\{V_i\}_{i=1}^n \in \tau_Y$. P.D $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \tau_Y$.

Tenemos que para todo $i \in \{1,\dots,n\}$ existe $U_i \in \tau_X$ tal que

$$V_i = U_i \cap Y,$$

de donde se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^n V_i = \bigcap_{i=1}^n (U_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right) \cap Y$$

Como $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_X$, se tiene que $\left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right) \cap Y \in \tau_Y$

Observaciones.

1) Si (X,τ_X) es un espacio topológico y $Y \subseteq X$, entonces la topología τ_Y definida en la proposición 1.32 recibe el nombre de topología inducida por τ_X y sus elementos se los conoce como relativos.
En este caso, diremos que (Y,τ_Y) es un subespacio topológico de (X,τ_X)

2) A partir de la definición de topología inducida sobre un subconjunto, Y, tenemos que Si $\beta \subseteq \tau_X$ es una base de la topología τ_X, entonces

$$\beta_Y = \{ B \cap Y : B \in \beta \}$$

es una base para la topología τ_Y.

3) Si $V \in \tau_X$, entonces $Y \cap V \in \tau_Y$.

Si $\hat{V} \in \tau_Y \not\Rightarrow \hat{V} \in \tau_X$

Proposición 1.33. Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $Y \subseteq X$, se tiene que todo abierto en τ_Y es abierto en τ_X si y solo si $Y \in \tau_X$.

Demostración

$\Rightarrow)$ Como todo abierto en τ_Y es abierto en τ_X tenemos que en particular Y es abierto en τ_X.

$\Leftarrow)$ Si $Y \in \tau_X$, entonces si consideramos $V \in \tau_Y$, se tiene que $V = Y \cap U$ con $U \in \tau_X$. Como V es una intersección finita de elementos de τ_X, tenemos que $V \in \tau_X$. □

Proposición 1.34. B es cerrado en τ_Y si y solo si existe $\hat{B} \in \mathcal{F}_X$ (Conjunto de los conjuntos cerrados en τ_X) tal que $B = Y \cap \hat{B}$

$\Rightarrow)$ Supongamos que B es cerrado en τ_Y, por definición se tiene que $Y \setminus B$ es abierto en τ_Y. Así, existe $U \in \tau_X$ tal que

$$Y \setminus B = Y \cap B^c = Y \cap U$$

De este modo, tenemos que $B = Y \cap (U^c)$, como $U^c \in \mathcal{F}_X$, tenemos que B es la intersección de Y con un cerrado en τ_X.

$\Leftarrow)$ Supongamos que $B = Y \cap \hat{B}$ donde $\hat{B} \in \mathcal{F}_X$. P.D. B es cerrado en (Y, τ_Y), es decir $(Y \setminus B)$ es abierto en τ_Y.

$$Y \setminus B = Y \cap B^c = Y \cap (Y \cap \hat{B})^c = Y \cap (Y^c \cup \hat{B}^c) = (Y \cap Y^c) \cup (Y \cap \hat{B}^c) = Y \cap \hat{B}^c$$

Así, $Y \setminus B \in \tau_Y$, ya que $\hat{B}^c \in \tau_X$

Ejemplos.

Consideremos $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y $Y =]0,1[\cup [6,7]$, mostremos que son abiertos y cerrados en τ_Y.

P.D. $[6,7]$ es abierto en τ_Y.

$$Y \setminus [6,7] =]0,1[= Y \cap]0,1[,$$

con esto, hemos mostrado que $[6,7]$ es cerrado.

P.D. $]0,1[$ es abierto en τ_Y

$$Y \setminus]0,1[= [6,7] = Y \cap [6,7]$$

con esto, hemos mostrado que $]0,1[$ es abierto.

Sea $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño tal que

$$]6-\varepsilon, 7+\varepsilon[\cap]0,1[= \emptyset$$

$$]6-\varepsilon, 7+\varepsilon[\in \tau_{|\cdot|}$$

$$Y \cap]6-\varepsilon, 7+\varepsilon[\in \tau_Y$$

$$= [6,7] \in \tau_Y.$$

Así, $[6,7]$ es abierto en τ_Y. Por tanto,

$Y \setminus [6,7]$ es cerrado en τ_Y $\quad Y \setminus [6,7] =]0,1[\in \mathcal{F}_Y$.

Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $Y \subseteq X$ y $Z \subseteq Y$, entonces sobre Z podemos definir dos topologías inducidas con respecto τ_X y τ_Y

$$\tau_Z = \{ Z \cap U : U \in \tau_X \}$$

$$\hat{\tau}_Z = \{ Z \cap \hat{U} : \hat{U} \in \tau_Y \}$$

P.D. τ_Z coincide con $\hat{\tau}_Z$ en Z.

Sea $V \in \tilde{\tau}_Z$, entonces existe $U \in \tau_X$ tal que

$$V = Z \cap U$$

como $Z \subset Y$, entonces $Z = Y \cap Z$; por lo tanto

$$V = (Y \cap Z) \cap U = Z \cap \hat{B} \quad \text{donde } \hat{B} \in \tau_Y$$

por lo tanto $V \in \hat{\tau}_Z$.

Sea $\hat{V} \in \hat{\tau}_Z$, entonces existe $\hat{U} \in \tau_Y$ tal que

$$\hat{V} = Z \cap \hat{U} \quad \text{como } \hat{U} = Y \cap B \quad \text{con } B \in \tau_X$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{V} &= Z \cap (Y \cap B) \\ &= (Z \cap Y) \cap B \\ &= Z \cap B \qquad \text{con } B \in \tau_X \\ &\Rightarrow \hat{V} \in \tilde{\tau}_Z.\end{aligned}$$

Capítulo 2: Funciones Continuas

Definición 2.1. Sean (X, τ_X) y $(X', \tau_{X'})$ dos espacios topológicos no vacíos. Consideramos $f \in \mathcal{F}(X, X') = \{$ funciones de X en $X'\}$, $A \subset X$ y $x \in \bar{A}$.

Decimos que $l \in X'$ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a.. «quedándose en A» si para toda $\mathcal{V}' \in \mathcal{V}'(l)$ (Vecindades de l en $\tau_{X'}$), existe $(\mathcal{V}_a \in \mathcal{V}(a))$ (vecindades de x en τ_X) tal que

$$f(A \cap \mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}'$$

Esta definición se puede notar de la siguiente forma

$$\lim_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = l.$$

Observación Si (X, τ_X) es un espacio separado (Hausdorff) entonces si existe

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$$

es único.

Demostración. Supongamos que existe l_1 y $l_2 \in X'$ tal que $l_1 \neq l_2$ y

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l_2$$

Como $(X', \tau_{X'})$ es de Hausdorff tenemos que existe $\mathcal{V}_{l_1} \in \mathcal{V}'(l_1)$ y $\mathcal{V}_{l_2} \in \mathcal{V}'(l_2)$ tal que

$$\mathcal{V}_{l_1} \cap \mathcal{V}_{l_2} = \emptyset.$$

Por otro lado, como

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l_2,$$

tenemos que existe

$$\mathcal{V}_1^a \in \mathcal{V}(a) \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_2^a \in \mathcal{V}(a) \text{ tal que.}$$

$$f(\mathcal{V}_1^a \cap A) \subseteq \mathcal{V}_{l_1} \quad \text{y} \quad f(\mathcal{V}_2^a \cap A) \subseteq \mathcal{V}_{l_2}$$

Por lo tanto, se sigue que

$$f(\mathcal{V}_1^a \cap \mathcal{V}_2^a \cap A) \subseteq f(\mathcal{V}_1^a \cap A) \cap f(\mathcal{V}_2^a \cap A) \subseteq \mathcal{V}_{l_1} \cap \mathcal{V}_{l_2}.$$

Como $\mathcal{V}_1^a \cap \mathcal{V}_2^a \in \mathcal{V}(a)$ y $a \in \overline{A}$, tenemos que

$$\mathcal{V}_1^a \cap \mathcal{V}_2^a \cap A \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$f(\mathcal{V}_1^a \cap \mathcal{V}_2^a \cap A) \neq \emptyset.$$

Pero esto es absurdo pues $\mathcal{V}_{\ell_1} \cap \mathcal{V}_{\ell_2} = \emptyset$.

Ejemplo

$$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1[\\ f(1) = 0 \end{cases}$$

• Si $A = [0,1[$, tenemos que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1[\\ 1 \in \overline{A}}} = 1$

• Si $A = [0,1]$, tenemos que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1]}}$ no existe por que al ser $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ de Hausdorff el límite si existe es único.

y como en este caso se tendría que

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1[}} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1]}} f(x) = 0$$

Ejemplo. Si consideramos

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

Si consideramos $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{\alpha \geq 0\} \cup \{+\infty\}$, tenemos que con nuestra definición podemos dar sentido a lo siguiente

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in \mathbb{R}_+}} f(x) = +\infty$$

Aquí, $\mathbb{R}_+$ está provisto de la topología del límite superior $\{]\alpha, +\infty[\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$

Proposición 2.2. Si (X, τ_X) y $(X', \tau_{X'})$ dos espacios topológicos, $A \subset X$ y $a \in \overline{A}$ y $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$, con $f \in \mathcal{F}(X, X')$, entonces $\ell \in \overline{f(A)}$.

Demostración: Sea $\mathcal{V}_\ell \in \mathcal{V}(\ell)$ vecindades de ℓ en $(X', \tau_{X'})$.

P.D.

$$\mathcal{V}_\ell \cap f(A) \neq \emptyset$$

P.D Existe $V_a \in \mathcal{V}(a)$ tal que $f(A \cap V_a) \subseteq \mathcal{V}_\ell$.

Como $A \cap V_a \neq \emptyset$, existe $x \in A$ y $x \in V_a$ tal que $f(x) \in \mathcal{V}_\ell$.

Además, $f(x) \in f(A)$,

$$f(x) \in \mathcal{V}_\ell \cap f(A).$$

Por tanto, $\mathcal{V}_\ell \cap f(A) \neq \emptyset$. Así, $\ell \in \overline{f(A)}$.

Jueves, 17 de junio de 2021.

Proposición 2.3. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos con la propiedad T_1. Se tiene las siguientes afirmaciones equivalentes (Además, $A \subset X$ y $a \in \overline{A}$,

i) Existe $\ell \in Y$ tal que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ que converge a a en (X, τ_X) se tiene que $f(x_n)$ converge a ℓ en (Y, τ_Y)

ii) Existe $\ell \in Y$ tal que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$$

Demostración:

$ii) \Rightarrow i)$ (Siempre en espacios topológicos)

En efecto, supongamos que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$$

Ahora, consideremos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ en (X, τ_X). P.D. $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x_n) = \ell$

Sea $V_\ell \in \mathcal{V}(\ell)$ en (Y, τ_Y). P.D Existe $n_0(V_\ell) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $f(x_n) \in V_\ell$

Como por hipótesis tenemos que $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$, sabemos que existe $V_a \in \mathcal{V}(a)$ en (X, τ_X) tal que

$$f(V_a \cap A) \subseteq V_\ell$$

Por otro lado, como $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in V_a$

Así,

$$\forall n \geq n_0 \qquad f(x_n) \in f(A \cap V_a) \subset V_\ell$$

$$\forall n \geq n_0 \qquad f(x_n) \in V_\ell$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to \infty} f(x_n) = \ell$$

en (Y, τ_Y).

$i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, se tiene que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$

P.D. $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell \qquad \forall V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \ \exists V_a \in \mathcal{V}(a)$ tal que $f(V_a \cap A) \subseteq V_\ell$

Supongamos por el absurdo que $i) \not\Rightarrow ii)$

$$\exists \hat{V}_\ell \in \mathcal{V}(\ell) \qquad \forall V_a \in \mathcal{V}(a) \quad \text{tal que} \quad f(A \cap V_a) \nsubseteq V_\ell$$

Como (X, τ_X) admite la propiedad T_1, tenemos que admite una base de vecindades numerable $(V_n^a)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$V_k^a \subset V_{k-1}^a \subset \cdots \subset V_1^a$$

Tenemos que existe $V_\ell \in \mathcal{V}(\ell)$ tal que

$$f(V_k^a \cap A) \nsubseteq \hat{V}_\ell$$

Sabemos que existe $x_k \in V_k^a \cap A$ tal que $f(x_n) \notin \hat{V}_\ell$. Así podemos construir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en A tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \in V_n^a \quad \text{y} \quad f(x_n) \notin \hat{V}_\ell \qquad (*)$$

Por lo visto anteriormente, se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

Utilizando nuestra hipótesis, tenemos que esto implica que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$. Pero esto contradice $(*)$ Por tanto, hemos demostrado que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$$

Observación:

1) Observando la demostración, podemos eliminar la hipótesis (Y, τ_Y) sea un espacio topológico con la propiedad T_1.

2) Si (X, τ_X) es un espacio topológico con la propiedad T_1 y ~~separado~~, (Y, τ_Y) un espacio topológico separado. Se tiene que

No se usa.

i) Existe $\ell \in Y$ tal que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$

ii) Existe $\ell \in Y$: $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

iii) Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, existe $\ell_{((x_n)_{n\in\mathbb{N}})} \in \ell$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell.$$

Demostración

i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii)

Para demostrar ii) a partir de mi hipótesis iii) únicamenente se tiene que mostrar que

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ y $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \neq \hat{x}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. tal que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = a \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = a.$$

P.D.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(\hat{x}_n)$$

Tomemos

$$\ell_1 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \qquad y \qquad \ell_2 = \lim_{n\to\infty} f(\hat{x}_n).$$

P.D. $\ell_1 = \ell_2$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\ell_1 \neq \ell_2$, como (Y, τ_Y) es separado existe $\hat{V}_{\ell_1} \in \mathcal{V}(\ell_1)$ y $\hat{V}_{\ell_2} \in \mathcal{V}(\ell_2)$ tales que

$$\hat{V}_{\ell_1} \cap \hat{V}_{\ell_2} = \emptyset.$$

Ahora, consideremos la siguiente sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$z_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n \text{ es par} \\ \hat{x}_n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Así, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{\hat{x}_1, x_2, \hat{x}_3, x_4, \dots\}$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ y además $x_n \to a$ y $\hat{x}_n \to a$. Se tiene que $z_n \to a$.

Utilizando la hipótesis iii) tengo que existe $\ell_z \in Y$ tal que $f(z_n) \to \ell_z$. En particular, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f(z_{2n}) = \ell_1 \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} f(z_{2n+1}) = \ell_2.$$

Ahora, como (Y, τ_Y) es separado, si el límite existe es único; por lo tanto como $\ell_1 \neq \ell_2$ se concluye que $f((z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, lo que contradice nuestra hipótesis iii)

Observación 2 Sean (X, d) y (Y, d) dos espacios métricos. Con las mismas notaciones anteriores, tenemos las siguientes afirmaciones equivalentes.

i) Existe $\ell \in Y$ tal que $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$

ii) Existe $\ell \in Y$, para todo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to a$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

iii) Para toda sucesión $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ con $x_n \to a$, existe $\ell_x \in Y$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell.$$

iv) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ tal que $(\forall x \in A)$ $(d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon)$

En efecto, es fácil mostrar que $i) \Leftrightarrow iv)$ (Ejercicio)

Continuidad de una función en un punto.

Consideremos (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$

Definición 2.4. Decimos que f es continua en el punto $a \in X$ si para toda vecindad $\mathcal{V}(f(a)) \in \mathcal{V}(f(a))$,

$$f^{-1}(\mathcal{V}_{(f(a))}) \in \mathcal{V}(a).$$

Observación. Si $f(a)$ «no está definida», entonces f no es continua.

Proposición 2.5. Se tiene que f es continua en a si y solo si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$

Supongamos que f es continua en a. P.D. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$

Sea $\mathcal{V}_{(f(a))} \in \mathcal{V}(f(a))$. P.D. Existe $\mathcal{V}_a \in \mathcal{V}(a)$ tal que

$$f(\mathcal{V}_a \cap X) = f(\mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}_{f(a)}$$

Como f es continua, tenemos que $f^{-1}(\mathcal{V}_{f(a)})$ es una vecindad del punto a en la topología τ. Así, existe $\mathcal{V}_a \in \mathcal{V}(a)$ tal que

$$a \in \mathcal{V}_a \subset f^{-1}(\mathcal{V}_{f(a)})$$

$$f(\mathcal{V}_a) \subseteq f(f^{-1}(\mathcal{V}_{f(a)})) \subseteq \mathcal{V}_{f(a)}$$

$$f(\mathcal{V}_a) \subseteq \mathcal{V}_{f(a)}$$

$\Leftarrow$ Supongamos que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$. P.D. f es continua en «a»

Sea $\mathcal{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a))$. P.D $f^{-1}(\mathcal{V}_{f(a)}) \in \mathcal{V}(a)$ en τ.

P.D. Existe $U_a \in \tau$ tal que $a \in U_a \subseteq f^{-1}(\mathcal{V}_{f(a)})$

Como $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x) = f(a)$, existe $\mathcal{V}_a \in \mathcal{V}(a)$ tal que.

$$f(\mathcal{V}_a) \subseteq \mathcal{V}_{f(a)}$$

$$\mathcal{V}_a \subset f^{-1}(f(\mathcal{V}_a)) \subset f^{-1}(\mathcal{V}_{f(a)})$$

Como $\mathcal{V}_a \in \mathcal{V}(a)$, existe $U_a \in \tau$ tal que $U_a \subseteq \mathcal{V}_a$. Por lo tanto, $a \in U_a \subseteq f^{-1}(\mathcal{V}_{f(a)})$.

Así, se concluye que

$$f^{-1}(\mathcal{V}_{f(a)}) \in \mathcal{V}(a)$$

Definición 2.6. Con las mismas notaciones anteriores, decimos que $f: (X, \tau_X) \to (X', \tau_X')$ es secuencialmente continua en $a \in X$ si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \to a$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

Observación Si $f(a)$ no está definida. entonces f no es secuencialmente continua en «a».

Viernes 18 de junio de 2020

Continuidad Global

Definición 2.7. Sean (X, τ_X) y $(\tilde{X}, \tau_{\tilde{X}})$ dos espacios topológicos y $f: (X, \tau_X) \to (\tilde{X}, \tau_{\tilde{X}})$

Decimos que f es globalmente continua de X en $\tilde{X}$ si f es continua en cada punto de X

Al conjunto de funciones continuas globales entre (X, τ_X) y $(\hat{X}, \tau_{\hat{X}})$ se lo nota como $\mathring{C}((X,\tau_X),(\hat{X},\tau_{\hat{X}}))$

Observación.
Note que la continuidad en espacios topológicos depende de la topología que escogemos. Es decir que si por ejemplo sobre X definimos dos topologías τ_1 y τ_2, entonces si

$$f:(X,\tau_X) \longrightarrow (\hat{X},\tau_{\hat{X}}) \quad \text{es continua}$$

no implica que

$$f:(\hat{X},\tau_{\hat{X}}) \longrightarrow (X,\tau_X) \quad \text{sea continua}$$

Teorema 2.8 Sea $f:(X,\tau_X) \longrightarrow (\hat{X},\tau_{\hat{X}})$ los siguientes enunciados son equivalentes

i) f es continua globalmente

ii) $\forall B \subset \hat{X}$ $\quad f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) \subset \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$

iii) $\forall U \in \tau_{\hat{X}}$ $\quad f^{-1}(U) \in \tau_X$ (la imágen inversa de un abierto es abierta)

i) $\Rightarrow$ ii) Supongamos que f es globalmente continua.
Sea $B \neq \emptyset \subseteq \hat{X}$. P.D. $f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) \subseteq \operatorname{int}(f^{-1}(B))$
Si $\operatorname{int}(B) = \emptyset$, se tiene trivialmente la conclusión
Sea $x \in f^{-1}(\operatorname{Int}(B))$.
P.D. Existe $U_x \in \tau_X$ tal que $x \in U_x \subset f^{-1}(B)$
Como $x \in f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) \Rightarrow f(x) \in \operatorname{Int}(B)$ Así, $\exists\, U_{f(x)} \in \tau_{\hat{X}}$ tal que

$$f(x) \in U_{f(x)} \subset B$$

Como f es globalmente continua, se tiene que en particular f es continua en X.
Así, existe $\mathcal{V}_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$f(\mathcal{V}_x) \subset \mathcal{V}_{f(x)} \subset B$$

$$f^{-1}(f(\mathcal{V}_x)) \subset f^{-1}(B)$$

$$x \in \mathcal{V}_x \subset f^{-1}(f(\mathcal{V}_x)) \subset f^{-1}(B)$$

Por tanto, $x \in \operatorname{Int}(f^{-1}(B))$

ii) $\Rightarrow$ iii)
Sea U un abierto en $\tau_{\hat{X}}$. P.D. $f^{-1}(U) \in \tau_X$
Para ello necesitamos mostrar que

$$\operatorname{Int}(f^{-1}(\mathcal{U})) = f^{-1}(\mathcal{U})$$

$\operatorname{Int}(f^{-1}(\mathcal{U})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$ $\quad$ P.D. $f^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(\mathcal{U}))$

Como $U \in \tau_{\hat{X}}$, entonces $\operatorname{Int}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$

Por ii)

$$f^{-1}(\operatorname{Int}(\mathcal{U})) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(\mathcal{U})) \iff f^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq \operatorname{Int}(f^{-1}(\mathcal{U}))$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_X.$$

iii) $\Rightarrow$ i)
Supongamos que para todo $\mathcal{U} \in \tau_{\hat{X}}$ $\quad f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_X$
P.D. f es globalmente continua. Es decir, mostremos que f es continua en todo punto de X
Sea $x \in X$. P.D f es continua en X

$\forall \mathcal{V}_{f(x)} \subseteq \mathcal{V}(f(x)) \quad \exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{U}(x) \quad$ tal que $\quad f^{-1}(\mathcal{U}_x) \subseteq \mathcal{V}_{f(x)}$

Como $\mathcal{V}_{f(x)}$ es una vecindad de $f(x)$ en $\tau_{\hat{x}}$, tenemos que existe $U_{f(x)} \in \tau_{\hat{x}}$ tal que

$$f(x) \in U_{f(x)} \subset \mathcal{V}_{f(x)}$$

Como $U_{f(x)}$ es un abierto en $\tau_{\hat{x}}$ y utilizando nuestra hipótesis iii) tenemos que

$$f^{-1}(U_{f(x)})$$

es un abierto en τ_x. Como $x \in f^{-1}(U_{f(x)})$ se tiene que $\exists U_x \in \tau_x$ tal que

$$x \in U_x \subset f^{-1}(U_{f(x)})$$

Se tiene que

$$f(\mathcal{U}_x) \subset f f^{-1}(U_{f(x)}) \subset U_{f(x)} \subset \mathcal{V}_{f(x)}$$

$$f(\mathcal{U}_x) \subset \mathcal{V}_{f(x)}$$

Por lo tanto, f es continua en X.

Proposición 2.9. Con las mismas hipótesis anteriores, (teorema 2.8) $f:(X,\tau_x) \to (\hat{X},\tau_{\hat{x}})$
Tenemos los siguientes resultados equivalentes

i) f es globalmente continua

ii) $\forall A \subseteq X \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

iii) $\forall B \subseteq \hat{X}$: B sea cerrado entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado en τ_x.

Demostración

En primer lugar, vamos a demostrar que i) $\Rightarrow$ iii)

Supongamos que f es globalmente continua.

P.D. $\forall B \subseteq \hat{X}$ cerrado, $f^{-1}(B)$ es cerrado en τ_x. Es decir, P.D. $(f^{-1}(B))^c$ es un abierto en τ_x.

Como B es cerrado en $\tau_{\hat{x}}$, tenemos que $B^c \in \tau_{\hat{x}}$ abierto. Utilizando el teorema 2.8, tenemos que

$$f^{-1}(B^c) \in \tau_x.$$

Además, como

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$$

tenemos que $(f^{-1}(B))^c$ es abierto en τ_x. Por lo que concluimos que $f^{-1}(B)$ es cerrado en τ_x.

iii) $\Rightarrow$ ii)

P.D. $\quad \forall A \subset X \qquad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

Martes, 22 de junio de 2021.

Supongamos que para todo $A \subseteq X$ $\quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

P.D $\forall B \subseteq \hat{X}$ cerrado $\quad f^{-1}(B)$ es cerrado de τ_x

$$\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(B) \subseteq \overline{f^{-1}(B)} \qquad \text{P.D} \qquad \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$$

$A = f^{-1}(B)$

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \bar{B} = B$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subseteq f^{-1}(B) \quad \Rightarrow \quad \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}.$$

iii) ⇒ i) Ejercicio.

Observación. ① Si $f:(X,\tau_X) \longrightarrow (\hat{X},\tau_{\hat{X}})$ una función entre (X,τ_X) y $(\hat{X},\tau_{\hat{X}})$, tenemos también los siguientes enunciados equivalentes.

i) f es globalmente continua

ii) Si $\mathcal{B}_{\hat{X}}$ es una base de $\tau_{\hat{X}}$ y además para todo $B \in \mathcal{B}_{\hat{X}}$ $f^{-1}(B) \in \tau_X$

2) Si $f:(X,\tau_X) \to (\hat{X},\tau_{\hat{X}})$ una función globalmente continua y $\mathcal{B}_{\hat{X}}$ una base para la topología $\tau_{\hat{X}}$, entonces eso no implica que que $\{f^{-1}(B)\}_{B\in\mathcal{B}_{\hat{X}}}$ sea una base para τ_X

③ Si f es biyectiva $\{f^{-1}(B)\}_{B\in\mathcal{B}_{\hat{X}}}$ es una base para $\tau_{\hat{X}}$

Supongamos que $f:(X,\tau_X) \longrightarrow (\hat{X},\tau_{\hat{X}})$ es continua y biyectiva.

P.D. $\{f^{-1}(B)\}_{B\in\mathcal{B}_{\hat{X}}}$ es una base para τ_X

Por la continuidad, tenemos que $f^{-1}(B) \in \tau_X$ para todo $B \in \mathcal{B}_{\hat{X}}$

Sea $A \in \tau_X$, P.D Existe I un conjunto de índices tal que

$$A = \bigcup_{i\in I} B_i \qquad B_i \in \mathcal{B}_X$$

Sea $x \in A$, entonces por la continuidad de f en el punto x tenemos que para todo $V_{f(x)} \in \mathcal{V}(f(x))$, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $f(V_x) \subseteq V_{f(x)}$.

Por otro lado, como A es abierto en τ_X, existe $\hat{V}_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $\hat{V}_x \subset A$.

Sin pérdida de generalidad puedo suponer que $V_{f(x)} \in \tau_{\hat{X}}$. Por lo tanto,

$$V_{f(x)} = \bigcup_{i\in I} B_i \qquad \text{con } B_i \in \mathcal{B}_{\tau_{\hat{X}}}$$

Como $f(x) \in V_{f(x)}$, tenemos que existe $B_j \in \tau_{\hat{X}}$ tal que $f(x) \in B_j$.

Como B_j es una vecindad abierta de $f(x)$ y f es continua en «x», tenemos que existe $\tilde{V}_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$f(\tilde{V}_x) \subset B_j$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(f(\tilde{V}_x)) \subseteq f^{-1}(B_j)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{V} \subseteq f^{-1}(B_j)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{V}_x \cap \hat{V}_x \subseteq A \cap f^{-1}(B_j)$$

Si $x \in A$, $f(x) \in f(A)$, Existe $j_x \in I$ tal que

$$f(x) \in B_{j_x}$$

$$f(A) \subseteq \bigcup_{j_x\in I} B_{j_x}$$

$$A = f^{-1}(f(A)) \subseteq \bigcup_{j_x\in I} f^{-1}(B_{j_x}) \quad \Rightarrow \quad A \subset \bigcup_{j_x\in I} f^{-1}(B_{j_x})$$

Usando la proposición 1.22, vamos a probar que

i) $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B$

ii) $B, \hat{B} \in \mathcal{B}_X$. $\exists \tilde{B} \in \mathcal{B}_X$ tal que $\tilde{B} \subseteq B \cap \hat{B}$

Demostración.

i) Si $x \in X$, entonces $f(x) \in f(X) \subseteq \hat{X} = \bigcup_{i \in I} B_i$

Existe $j \in I$ tal que $f(x) \in B_j$

$$x \in f^{-1}(B_j) = \overline{B_j} \in B_{\tau_x}$$

ii) Sea $x \in B \cap \hat{B}$, existe $U \in B_{\tau_x}$ tal que $x \in U \subseteq B \cap \hat{B}$

Como $B, \hat{B} \in \tau_x$, se tiene que

$$B = f^{-1}(V) \quad V \in B_{\tau_{\hat{x}}} \quad \text{y} \quad \hat{B} = f^{-1}(\hat{V}) \quad \hat{V} \in \hat{B}_{\tau_{\hat{x}}}$$

$$x \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(\hat{V}) = f^{-1}(V \cap \hat{V})$$

entonces $f(x) \in V \cap \hat{V}$ y existe $W \in B_{\tau_{\hat{x}}}$ tal que

$$f(x) \in W \subset V \cap \hat{V}$$

$$x \in f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(V \cap \hat{V}) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(\hat{V})$$

Ejemplo 1.

Consideremos $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$ y $\tau_2 = (X, d)$ y $f = Id : (X, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (X, d)$ puesto que Id es continua y biyectiva.

$B_{\tau_2} = \{B(x,r) : x \in X : r > 0\}$, entonces $\{f^{-1}(B(x,r))\}_{\substack{r>0 \\ x \in X}}$ en $\mathcal{P}(X)$

considerando $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$, abierto se tiene una contradicción

Corrección: $f(X, \tau_x) \longrightarrow (\hat{X}, \tau_{\hat{x}})$, f continua y biyectiva y además $B_{\hat{x}}$ es una base de $\tau_{\hat{x}}$. Para mostrar que $\{f^{-1}(B) : B \in B_{\tau_{\hat{x}}}\}$ es una base de τ_x, quisimos usar la proposición 1.22; sin embargo, nuestro razonamiento fue incorrecto puesto que la proposición 1.22 indica que si $\{f^{-1}(B)\}_{B \in \hat{B}_x}$ verifica la propiedad i) y ii), entonces Esta topología $\tilde{\tau}$ de ninguna forma es equivalente a τ_x, únicamente se tiene por construcción de $\tilde{\tau}$, que $\tilde{\tau} \subset \tau_x$ ∎

Observación Ahora bien, el ejemplo 1 nos permite concluir lo siguiente: supongamos que $f : (X, \tau_x) \to (\hat{X}, \tau_{\hat{x}})$ y además tenemos lo siguiente

- f continua
- f biyectiva
- $B_{\hat{x}}$ una base de $\tau_{\hat{x}}$

Entonces no se tiene que $\{f^{-1}(B)\}_{B \in B_{\hat{x}}}$ sea una base en τ_x.

$\{f^{-1}(B)\}_{B \in B_{\hat{x}}}$ genera una topología en X, denominamos a la misma $\dot{\tau}$, que no es equivalente a τ_x, solamente se tiene que (   )

Jueves 24 de junio de 2021

Continuidad.

La topología más pequeña que deja continuas una familia de aplicaciones.

Recordemos que dados $X \neq \emptyset$ y $(\hat{X}, \hat{\tau})$ y $f : X \longrightarrow (\hat{X}, \hat{\tau})$

En la anterior clase, vimos que $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ definida como $\tau = \{f^{-1}(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \hat{\tau}\}$ es una topología definida sobre X. Además, $f : (X, \tau) \longrightarrow (\hat{X}, \hat{\tau})$ es una función continua entre dos espacios topológicos. También, se puede mostrar que τ es la topología más pequeña en X que hace continua la función f. En efecto, si consideramos $\tilde{\tau} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\tilde{\tau}$ es una topología en X

$$f : (X, \tilde{\tau}) \longrightarrow (\hat{X}, \hat{\tau})$$

es continua, entonces mostremos que $\dot{\tau} \subset \tilde{\tau}$

Entonces $U \in \tau$, $\exists W \in \tilde{\tau}$ tal que $U = f^{-1}(W)$.
Por otro lado, como $f:(X,\tilde{\tau}) \to (\hat{X},\hat{\tau})$ es continua, se tiene que $f^{-1}(W) \in \tilde{\tau}$.
Es decir, $U \in \tilde{\tau}$.
Con esta misma idea, ¿Qué pasa si tenemos lo siguiente?
$X \neq \emptyset$ y (Y_1,τ_1) y (X_2,τ_2) dos espacios topológicos
$f_1: X \to (Y_1,\tau_1)$ y $f_2: X \to (Y_2,\tau_2)$
La pregunta es la siguiente
¿cómo construyo sobre X una topología τ que verifique lo siguiente?
1) $f_1:(X,\tau) \to (X_1,\tau_1)$ continua y $f_2:(X,\tau) \to (X_2,\tau_2)$ continua.
2) τ sea la topología más pequeña en X que hace continuas f_1 y f_2
Considerando $\beta \subseteq \wp(X)$, definido por

$$\beta = \{ V = f^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2), \text{ donde } U_1 \in \tau_1 \text{ y } U_2 \in \tau_2 \}$$

Para demostrar que β es una topología sobre X necesito mostrar que β verifique las hipótesis de la (proposición 1.22)
i) $\forall x \in X$, $\exists U \in \beta$ tal que $x \in \mathcal{U}$
ii) $\forall B_1, B_2 \in \beta$, $\forall x \in B_1 \cap B_2$ $\exists U_x \in \beta$ $x \in U_x \subseteq B_1 \cap B_2$
Trivialmente, se tiene que
i) $x \in X = f_1^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap f_2^{-1}(\mathcal{U}_2)$ con $\mathcal{U}_1 \in \tau_1$ y $\mathcal{U}_2 \in \tau_2$
ii) Sea $B_1 = f_1^{-1}(U_1^1) \cap f_2^{-1}(\mathcal{U}_1^2)$ con $U_1^1 \in \tau_1$ y $\mathcal{U}_1^2 \in \tau_2$

$B_2 = f_1^{-1}(\mathcal{V}_1^1) \cap f_2^{-1}(\mathcal{V}_1^2)$, con $\mathcal{V}_1^1 \in \tau_1$ y $\mathcal{V}_1^2 \in \tau_2$,
por lo tanto

$$B_1 \cap B_2 = f_1^{-1}(\mathcal{U}_1^1) \cap f_2^{-1}(\mathcal{U}_1^2) \cap f_1^{-1}(\mathcal{V}_1^1) \cap f_2^{-1}(\mathcal{V}_1^2) = f_1^{-1}(\mathcal{U}_1^1 \cap \mathcal{V}_1^1) \cap f_2(\mathcal{U}_1^2 \cap \mathcal{V}_1^2)$$

Sea $x \in B_1 \cap B_2$, tenemos que

$f_1(x) \in \mathcal{U}_1^1 \cap \mathcal{V}_1^1$ y $f_2(x) \in \mathcal{U}_1^2 \cap \mathcal{V}_1^2$

Como $\mathcal{U}_1^1 \cap \mathcal{V}_1^1$ es un abierto en τ_1 y $f_1(x) \in \mathcal{U}_1^1 \cap \mathcal{V}_1^1$
Existe $W_1 \in \tau_1$ tal que $f_1(x) \in W_1 \subseteq \mathcal{V}_1^1 \cap \mathcal{V}_1^1$
y existe $W_2 \in \tau_2$ tal que $f_2(x) \in W_2 \subseteq \mathcal{U}_1^2 \cap \mathcal{V}_1^2$
Así, $f_1(x) \in W_1$ y $f_2(x) \in W_2$, y

$$x \in f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2) \subseteq B_1 \cap B_2,$$

de donde

$$f(x) \subseteq B_x \subseteq B_1 \cap B_2 \quad \text{con} \quad B_x = f_1^{-1}(W_1) \cap f_2^{-1}(W_2) \in \beta$$

Por lo tanto, utilizando la proposición 1.22 tenemos que existe una única topología τ definida sobre X tal que β es una base de τ.

Claramente $\tau = \{$ Uniones arbitrarias de elementos de $\beta\}$
con
$$\beta = \{ f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(\mathcal{U}_2) : U_1 \in \tau_1 \text{ y } U_2 \in \tau_2 \}$$
Además, tenemos por construcción que τ hace continuas tanto a f_1 como a f_2
P.D τ es la topología más pequeña que hace continuas a f_1 y f_2
Consideremos $\tilde{\tau} \subseteq \mathcal{P}(X)$, con $\tilde{\tau}$ es una topología en X y además hace continuas a f_1 y f_2
P.D $\tau \subseteq \tilde{\tau}$.
Si $U \in \tau$ $\quad U = f_1^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap f_2^{-1}(\mathcal{U}_2)$ con $\mathcal{U}_1 \in \tau_1$ y $\mathcal{U}_2 \in \tau_2$.
Por propiedad de $\tilde{\tau}$, $f^{-1}(U_1) \in \tilde{\tau}$ y $f^{-1}(\mathcal{U}_2) \in \tilde{\tau}$.
Entonces $f_1^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap f_2^{-1}(\mathcal{U}_2)$ al ser intersección finita de elementos de $\tilde{\tau}$, tenemos que
$$U = f_1^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap f_2^{-1}(\mathcal{U}_2) \in \tilde{\tau}$$
Nuestra siguiente pregunta es la parte principal de esta clase
$X \neq \emptyset$ $\quad (f_i)_{i\in I}$ una familia de aplicaciones tal que para todo $i \in I$
$f_i : X \to (Y_i, \tau_i)$, donde $(Y_i, \tau_i)_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos.
¿Cómo defino una topología (τ) sobre X tal que
① τ haga continua a toda la familia $(f_i)_{i\in I}$
② τ sea la topología más pequeña con la propiedad ①.

Proposición 2.10. Sea X no vacío, un conjunto cualesquiera y $(Y_i, \tau_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos. Además, consideremos la familia $(f_i)_{i\in I}$ de aplicaciones tales que para todo $i \in I$, $f_i : X \to (Y_i, \tau_i)$. Definimos
$$\tau = \{ A \in X : A = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j \in F_i} f_j^{-1}(U_j) \text{ donde } F_i \subset I \text{ finito y } U_j \in \tau_i \}$$
Entonces τ es una topología sobre X y además es la topología más pequeña en X que hace continua a la familia de aplicaciones $(f_i)_{i\in I}$

Observación Si fijamos $j \in I$. Podemos construir $\hat{\tau}_j$ una topología en X tal que $f_j : (X, \hat{\tau}_j) \to (Y_j, \tau_j)$ sea continua $\hat{\tau}_j$ es la más pequeña topología definida en X que hace continua la función f_j.
Por otro lado, tenemos la topología τ definida en la proposición 2.10 sobre X. Claramente $\hat{\tau}_j \subset \tau$. y además si $i \neq j$ la función $f_i : (X, \hat{\tau}_j) \to (Y_i, \tau_i)$ no necesariamente es continua

Demostración: ejercicio.

Ejemplos.
1) $X = C([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{K}$, continuas, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}\}$
Consideremos $x \in [0,1]$
$$P_x : X \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$$
$$f \longmapsto P_x(f) = f(x)$$
Una familia $(P_x)_{x\in[0,1]}$ $\forall x \in [0,1]$ $\quad (Y_x, \tau_x) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$.
¿Cuál es la topología definida sobre X que sea la más pequeña que haga continuas $(P_x)_{x\in X}$
Utilizando la proposición 2.10, tenemos que
$$\tau = \{ \bigcup_{x \in [0,1]} \bigcap_{j \in J_x} P_{x_j}^{-1}(B_j) \quad \text{donde } J_x \subseteq [0,1] \text{ finito}$$
B_j es un abierto en $(\mathbb{K}, |\cdot|)$

Por lo tanto, una base de $\mathcal{T}$, será:

$$\beta = \{ \bigcap_{i \in J} P_{x_j}(B_j) \text{ donde } J \in [0,1] \text{ finito } \quad B_j \in \mathcal{T}_{|\cdot|} \}$$

$$\beta = \{ A \subset X : A = \bigcap_{i=1}^{n} P_{x_i}^{-1}(B_i) \quad B_i \in \mathcal{T}_{|\cdot|} \}$$

$$A = \{ f \in X \text{ tal que } \forall i \in \{1, \dots, n\} \ P_{x_i}(f) \in B_i, \ B_i \in \mathcal{T}_{|\cdot|} \}$$

$$A = \{ f \in X \text{ tal que } \forall i \in \{1, \dots, n\} \ f(x_i) \in B_i, \ B_i \in \mathcal{T}_{|\cdot|} \}$$

Sobre X puedo definir la métrica $d_\infty(\cdot,\cdot)$, donde

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

Por lo tanto $(X, \mathcal{T}_\infty)$ es un espacio topológico donde la topología proviene de la métrica $d_\infty(\cdot,\cdot)$. Así, hemos definido dos topologías sobre X

→ $(X, \mathcal{T})$ (utilizando $(P_x)_{x \in [0,1]}$)

→ $(X, \mathcal{T}_\infty)$ métrica.

Se puede mostrar que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\infty$.

Basta mostrar que para todo $x \in [0,1]$,

$$P_x : (X, \mathcal{T}_\infty) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$$
$$f \longmapsto P_x(f) = f(x)$$

es continua, para concluir que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\infty$.

Recuerde que P_x es lineal sobre un espacio normado. por tanto, únicamente tenemos que mostrar que, existe $c > 0$ tal que $f \in X$

$$|P_x(f)| \leq c \|f\|_\infty$$

$$|P_x(f)| = |f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

Tomando $c = 1$, tenemos que $\forall x \in [0,1]$ P_x es continua de $(X, \mathcal{T}_\infty)$ en $(\mathbb{K}, |\cdot|)$

Así, esto implica que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\infty$.

Proposición 2.11. Con las siguientes hipótesis de la proposición 2.10, tenemos que

(1) Una base de vecindades $\mathcal{V}(x)$ del punto x para la topología $\mathcal{T}$ son conjuntos de la forma

$$\mathcal{V}_x = \{ \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\mathcal{O}_i) : \text{donde para todo } i \in \{1, \dots, n\} \ \mathcal{O}_i \text{ es una vecindad de } f_i(x) \text{ para la topología } \mathcal{T}_i \}$$

(2) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ y $x \in X$, se tiene que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x en $\mathcal{T}$ si y solamente si para todo $i \in I$ $(f_i(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f_i(x)$

(3) Si $(Z, \mathcal{T}_Z)$ es un espacio topológico y $\varphi : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X, \mathcal{T})$ entonces φ es una función continua de $(Z, \mathcal{T}_Z)$ en $(X, \mathcal{T})$ si y solamente si

$\forall i$ $f_i \circ \varphi : (Z, \mathcal{T}_Z) \longrightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)$ es continua.

Demostración

i) P.D. $\mathcal{V}(x)$ definido en el literal (1) es una familia de vecindades en la topología

Sea $\mathcal{V}_x \in \mathcal{V}(x)$. P.D Existe $\mathcal{O}_x \in \mathcal{T}$ tal que

$$x \in \mathcal{O}_x \subseteq \mathcal{V}_x$$

$$\mathcal{V}_x = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\mathcal{O}_i) \text{ para algún } n\in\mathbb{N} \text{ finito además } \forall i\in\{1,\dots,n\}\ f_i(x)\in\mathcal{O}_i \text{ donde } \mathcal{V}_i \text{ es una vecindad de } f_i(x) \text{ en } (Y_i,\tau_i) \right\}$$

Así, existe $\omega_i\in\tau_i$ tal que $f_i(x)\in\omega_i\subseteq\mathcal{O}_i$

$$\forall i\in\{1,\dots,n\} \qquad f_i(x)\in\omega_i\subset\mathcal{V}_i \qquad \omega_i\in\tau_i$$

$$x\in\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\omega_i)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\mathcal{O}_i)=\mathcal{U}_x$$

Como para todo $i\in\{1,\dots,n\}$ f_i es continua de (X,τ) en (Y_i,τ_i) tenemos que $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ $f_i^{-1}(\omega_i)\in\tau$.

Además, por las propiedades de topología

$$\mathcal{O}_x=\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\omega_i)\in\tau$$

Se tiene que

$$x\in\mathcal{O}_x\subset\mathcal{V}_x$$

Por lo tanto, $\mathcal{V}_x$ es una vecindad de x en la topología τ

Topología de funciones continuas

Viernes, 25 de junio de 2021

Funciones abiertas y cerradas

Definición 2.12 Sea $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ una función. Se dice que f es una función abierta si

$$\forall U\in\tau_X \qquad f(U)\in\tau_Y$$

Se dice que f es una función cerrada si

$$\forall F\in\mathcal{F}_X \qquad f(F)\in\mathcal{F}_Y$$

Ejemplos.

1) $Id:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$
la identidad es una función abierta y cerrada

2) Si (X,τ_X) es un espacio topológico y (Y,τ_Y) es un espacio discreto, entonces toda función entre (X,τ_X) y (Y,τ_Y) es abierta y cerrada a la vez.

Observación.

1) Si f es una función abierta no implica que f sea una función cerrada.
2) Si f es una función cerrada no implica que f sea una función abierta

$$f:(\mathbb{R},|\cdot|)\longrightarrow(\mathbb{R},|\cdot|)$$
$$x\longmapsto f(x)=a \qquad \text{con } a\in\mathbb{R}$$

Entonces f es cerrada ya que la imagen de todo cerrado es cerrada pero no es una función abierta ya que la imagen de todo abierto es un conjunto cerrada

$$f:(\mathbb{R},|\cdot|)\longrightarrow(\mathbb{R},|\cdot|)$$
$$x\longmapsto f(x)=e^x$$

Entonces f es abierta pero no es una función cerrada ya que $f(\mathbb{R})=]0,+\infty[$

f es abierta, en efecto si A es un conjunto abierto, existe $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto tal que $I \subseteq \mathbb{R}$, donde $I =]a,b[$. Como la función es continua y estrictamente creciente, tenemos que

$$f(I) =]e^a, e^b[.$$

Así, $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ es un abierto en $\mathbb{R}$ y por lo tanto

$$f(I) =]e^a, e^b[\subseteq f(A)$$

Con lo cual se puede concluir que $f(A)$ es abierto.

O también podemos usar la siguiente proposición.

Proposición 2.13. Sean (X, τ_x) y (Y, τ_y) dos espacios topológicos y $f:(X,\tau_x) \to (Y,\tau_y)$ una función. Además, consideremos B_x una base en τ_x. se tiene que

f es abierta si y solo si $\forall B \in B_x \quad f(B) \in \tau_y$

Observación

La proposición 2.13 de «ninguna forma» nos dice que f es abierta si y solo si $f(B)$ es base en τ_y con $B \in \beta_x$

Demostración

$\Rightarrow$ Si f es abierta, entonces se tiene en particular que

$$\forall B \in \beta_x \qquad f(B) \in \tau_y.$$

$\Leftarrow$ Supongamos que $\forall B \in \beta_x \; f(B) \in \tau_y$

P.D $\quad \forall A \in \tau_x \qquad f(A) \in \tau_y$

Sea $A \in \tau_x$, cualquiera. Como β_x es una base en τ_x, tenemos que

$$A = \bigcup_{\substack{i \in I \\ B_i \in \beta_x}} B_i$$

Por lo tanto, se sigue que

$$f(A) = f\Big(\bigcup_{\substack{i \in I \\ B_i \in \beta_x}} B_i \Big) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ B_i \in \beta_x}} f(B_i)$$

Por hipótesis, tenemos que $f(B_i) \in \tau_y$ para todo $i \in I$, y dado que la unión arbitraria de abiertos es abierta. Se sigue que

$$f(A) \in \tau_y.$$

Dado que A es arbitrario, se sigue que f es abierta.

Observación

Si f es continua, esto no implica que sea abierta.

Por otra parte, consideremos

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) \begin{cases} x & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$]-2,2[=]-2,1[\cup]1,2[$

f no es abierta

$$f:(\mathbb{R}, |\cdot|) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{dis})$$

f es abierta

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad \{0\} \in \tau_{dis}$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{1\} \in \tau_{|\cdot|}$$

Aquí hay un contraejemplo de una función abierta que no es necesariamente continua $\quad f^{-1}(\{0\}^c) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ abierto

Proposición 2.14.
Consideramos $f:(X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ y $g:(Y,\tau_Y) \longrightarrow (Z,\tau_Z)$. Si f y g son abiertas (respectivamente cerradas) entonces $g\circ f:(X,\tau_X) \longrightarrow (Z,\tau_Z)$ es abierta (
Demostración: Ejercicio

Proposición 2.15.
Sea $f:(X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ f es una función cerrada si y solo si $\forall B \subseteq Y$ y para toda vecindad U de $f^{-1}(B)$ existe una vecindad de V de B tal que $f^{-1}(V) \subset U$

Decimos que A es vecindad del conjunto B si $B \subset A$ existe $U_B \in \tau$ tal que $B \subset U_B \subset A$.

Demostración. Supongamos que f es cerrada.
P.D. $(\forall B \subseteq Y)(\forall \mathcal{U}$ vecindad de $f^{-1}(B)$ en $\tau_X)(\exists \mathcal{V}$ vecindad de $B)$ tal que $f^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$
Sea $B \subseteq Y$, cualquiera y $\mathcal{U}$ una vecindad de $f^{-1}(B)$, cualquiera, en τ_X
Sin pérdida de generalidad, podemos considerar $\mathcal{U}$ abierto de τ_X tal que

$$f^{-1}(B) \subset U$$

y por lo tanto

$$U^c \subset f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c)$$

de donde

$$f(U^c) \subset f((f^{-1}(B))^c) = f(f^{-1}(B^c)) \subseteq B^c$$

$$\Rightarrow B \subseteq (f(U^c))^c$$

tomando $V_B = (f(\mathcal{U}^c))^c \in \tau_Y$ y además $B \subseteq V_B$. Así, V_B es una vecindad de B.
Además, tenemos que

$$B \subseteq (f(A^c))^c \subset f(A)$$

$$f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(f(A))$$

Forma 2
Sea U una vecindad de $f^{-1}(B)$, existe $W \in \tau_y$ tal que

$$f^{-1}(B) \subseteq W \subseteq \mathcal{U}.$$

de donde

$$\mathcal{U}^c \subseteq W^c \subseteq (f^{-1}(B))^c$$

$$\Rightarrow f(\mathcal{U}^c) \subseteq f(W^c) \subseteq f((f^{-1}(B^c))) \subseteq B^c$$

$$\Rightarrow B \subseteq (f(W^c))^c \subseteq (f(\mathcal{U}^c))^c$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq \left(f^{-1}((f(W^c))^c)\right) \subseteq f^{-1}\left((f(\mathcal{U}^c))^c\right) = \left(f^{-1}(f(\mathcal{U}^c))\right)^c$$

Consideremos

$$x \in f^{-1}(f(\mathcal{U}^c)^c) \Rightarrow f(x) \notin f(\mathcal{U}^c) \Rightarrow x \notin U^c \Rightarrow x \in U.$$

Así,

$$f^{-1}(f(\mathcal{U}^c)^c) \subseteq U.$$

Por otro lado, tenemos que

$$f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(f(W^c)^c) \subset U$$

Así, tomando $V_B = f(W^c)^c \in \tau_y$

$$f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(V_B) \subset U$$

Es claro que U_B es vecindad de B.

Si $x \in B \Rightarrow x \in U_B$, Como $W_B \subset B \Rightarrow B^c \subseteq W_B^c$

Martes, 29 de junio de 2021.

Continuidad en espacios topológicos - Homeomorfismos.

Hemos visto hasta el momento funciones continuas entre espacios topológicos. Un caso particular e interesante son los homeomorfismos que preservan la «estructura topológica» de los espacios. Buscando una analogía en álgebra lineal se puede tener la idea de tener los isomorfismos entre espacios vectorial que preservan la estructura algebraica del espacio.

(Sea $(E, \oplus, \odot)$ y $(F, \hat{+}, \hat{\cdot})$ y f una función $f: E \to F$, decimos que f es un isomorfismo entre dos espacios vectoriales (E y F) si

i) $\forall x, y \in E$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$
$$f(x \oplus \alpha \odot y) = f(x) \hat{+} \alpha \hat{\cdot} f(y)$$

ii) f sea biyectiva.

Por lo tanto, existe $f^{-1}: F \to E$ tal que

- f^{-1} es una biyección
- $\forall h, g \in F$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$
$$f^{-1}(h \hat{+} \alpha \hat{\cdot} g) = f^{-1}(h) \oplus \alpha \odot f^{-1}(g)$$

Además, la relación de espacios vectoriales isomorfos es una relación de equivalencia sobre el conjunto de espacios vectoriales.

Definición 2.16. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$, diremos que f es un homeomorfismo entre X y Y si

i) f es una biyección

ii) f es bicontinua.

Diremos que dos espacios topológicos (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre dos espacios topológicos.

Observación

La relación de espacios homeomorfos es una relación de equivalencia en el conjunto de espacios topológicos.

Ejemplos

1) Si (X, τ_X) es un espacio topológico, entonces $Id: (X, \tau_X) \to (X, \tau_X)$ es un homeomorfismo

2) Si sobre un conjunto $X \neq \emptyset$ definimos dos topologías τ_1 y τ_2, entonces $Id: (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es un homeomorfismo si y solo si $\tau_1 \approx \tau_2$.

En efecto, supongamos que Id es un homeomorfismo entre τ_1 y τ_2.

P.P. $\tau_1 \approx \tau_2 \Rightarrow \tau_1 \subseteq \tau_2$ y $\tau_2 \subseteq \tau_1$

Sea $\Omega \in \tau_2$, como Id: es continua, entonces $Id^{-1}(\Omega) = Id(\Omega) \in \tau_1$

Si $U \in \tau_1$ como Id es un homeomorfismo, entonces $Id^{-1} = Id: (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$, entonces

$Id^{-1}(U) \in \tau_2$ y como $Id^{-1}(U) = Id(U) = U \in \tau_2$

Así, hemos probado que $\tau_1 \approx \tau_2$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $\tau_1 \approx \tau_2$ en X P.D. $Id: (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es un homeomorfismo.

Es claro que Id: es una biyección y $Id = Id^{-1}$

P.D. $Id: (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua

P. D. $Id: (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ es continua

Si $U \in \tau_2$. P. D. $Id^{-1}(U) \in \tau_1$

$Id^{-1}(U) = U$ y como $\tau_1 \approx \tau_2 \Rightarrow U \in \tau_1$

② De manera análoga se obtiene el resultado

Observación Este último ejemplo nos permite concluir lo siguiente

Si $X \neq \emptyset$ sobre el cual definimos dos topologías τ_1 y τ_2 entonces $Id: (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$

→ Id es continua si y solo si $\tau_2 \subseteq \tau_1$ (τ_2 es más débil que τ_1)

→ Id es una función abierta si y solo si $\tau_1 \subseteq \tau_2$

Ejemplo.

Si $X = \mathbb{R}$, $\tau_X = \tau_{1.1}$ $A =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\tau_A = \tau_{1.1}$ Topología inducida por $\tau_{1.1}$ en el conjunto A

(X, τ_X) y (A, τ_A) son homeomorfos

En efecto

$$f: A \to X$$
$$x \mapsto f(x) = \tan(x)$$

f es un homeomorfismo. (Ejercicio - Hoja 2)

Cabe notar que tanto (X, τ_X) como (A, τ_A) son espacios métricos pero la métrica no se preserva.

(De igual manera, las propiedades que vienen a partir de la métrica de cada espacio: Sucesiones de Cauchy, Acotación, etc.)

Es decir que, a pesar que tanto (X, τ_X) y (A, τ_A) contienen la misma cantidad de abiertos (cerrados), las propiedades métricas de (X, τ_X) y (A, τ_A) son totalmente distintas.

En el caso de A su métrica es acotada

$$\sup_{\substack{x \in A \\ y \in A}} d_A(x, y) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in A}} |x - y| < +\infty$$

pero en X su métrica no es acotada.

Ejemplo.

Si consideramos $a < b$ y $c < d$, $([a, b], \tau_{1.1})$ y $([c, d], \tau_{1.1})$ son homeomorfos

$$f: [a, b] \to [c, d]$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{d - c}{b - a} x + \frac{cb - da}{b - a}$$

f es un homeomorfismo entre ambos espacios

$]a, b[$ y $]c, d[$ son homeomorfos

$]a, b]$ y $]c, d]$ son homeomorfos.

De manera análoga, podemos mostrar que $[a, b[$ y $]a, b]$ son homeomorfos.

Lo que no se puede mostrar es que $]a, b[$ y $[a, b]$ son homeomorfos.

Análogamente, tampoco se puede probar que $]a, b[$ y $[c, d]$ son homeomorfos

Proposición 2.17. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f(X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ biyectiva, las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) f es un homeomorfismo

ii) f es continua y abierta

iii) f es continua y cerrada.

Demostración

$i) \Rightarrow ii)$ Si f es un homeomorfismo

P.D f es continua y abierta.

Como f es un homeomorfismo, se tiene que f es continua. Ahora, mostremos que f es abierta.

Sea $A \subseteq X$ tal que A sea abierto en τ_X. P.D $f(A) \in \tau_Y$

Como f es una biyección, se tiene que $f^{-1} : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$

y puesto que f^{-1} es continua, se sigue que

$$f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) \in \tau_Y$$

$ii) \Rightarrow iii)$

Únicamente, nos tocaría mostrar que f es una función cerrada.

Sea F un cerrado en τ_X. P.D. $f(F)$ es un conjunto cerrado en τ_Y.

$$f(F^c) \in \tau_Y \quad \text{por hipótesis}$$

Además, como f es biyectiva se tiene que

$$f(F^c) = f(F)^c \in \tau_Y$$

Por lo tanto, $f(F)$ es cerrada en τ_Y.

$iii) \Rightarrow i)$ Supongamos que f es biyectiva, continua y cerrada.

P.D. f es un homeomorfismo en (X, τ_X) y (Y, τ_Y)

Únicamente faltaría mostrar que $f^{-1}(Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$ es una función continua.

Sea F un conjunto cerrado en X.

P.D. $(f^{-1})^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en τ_Y.

Como f es una biyección, tenemos que

$$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F).$$

Ahora, por hipótesis, tenemos que f es una función cerrada. Así, $f(F)$ es un conjunto cerrado en τ_Y.

Observación.

Como hemos dicho anteriormente, la relación de espacios topológicos homeomorfos es una relación de equivalencia sobre el conjunto de espacios topológicos. La clase de equivalencia

$$[X] = \{(Y, \tau_Y) \text{ e.t. } : X \sim Y\}$$

de un espacio topológico, recibe el nombre de tipo topológico de X.

Por ejemplo si (X, τ_X) es un espacio topológico del mismo tipo topológico de un espacio topológico separable (propiedad topológica) entonces (X, τ_X) es un espacio topológico separable.

Jueves 1 de julio de 2021

Homeomorfismos entre espacios topológicos

$(X, \tau_X) \simeq (Y, \tau_Y)$ era una clase de equivalencia sobre el conjunto de espacios topológicos

$[X]$ tipo topológico de X.

Diremos que una propiedad P es topológica o invariante topológico si para cualesquiera dos espacios topológicos (X, τ_X) y (Y, τ_Y) homeomorfos, se tiene que X satisface la propiedad P si y sólo si Y satisface la propiedad P.

Ejemplos.

- La cardinalidad de un espacio topológico es un invariante topológico
- La propiedad T_1 y T_2 son invariantes topológicos
- $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ no es un espacio topológico separable y $(\ell^\infty, \|\cdot\|_p)$ para $1 \leq p < +\infty$ es separable

Utilizando el contrarrecíproco de «Todo espacio homeomorfo a (X, τ_X) tiene las mismas propiedades topológicas de (X, τ_X)».
Debido a esta última observación, $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ y $(\ell^\infty, \|\cdot\|_p)$ no son homeomorfos.

Observación

- Propiedad de acotamiento entre espacios métricos no es una propiedad topológica. Por ejemplo $((-\pi/2, \pi/2), |\cdot|)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Así, $((-\pi/2, \pi/2), |\cdot|)$ es acotado, mientras que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ no lo es.

Un caso particular en el cual se puede ver claramente las diferencias entre propiedades topológicas y propiedades métricas en espacios métricos, es el concepto de métricas topológicamente equivalentes.

Definición 2.18.

Sea X un conjunto no vacío sobre el cual definimos dos métricas $d_1(\cdot,\cdot)$ y $d_2(\cdot,\cdot)$. Decimos que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes en X si $\tau_{d_1} \approx \tau_{d_2}$

Definición 2.19.

Sea X un conjunto no vacío sobre el cual definimos dos métricas $d_1(\cdot,\cdot)$ y $d_2(\cdot,\cdot)$ decimos que d_1 y d_2 son métricas equivalentes en X si existen $\beta, \alpha > 0$ tal que

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d(x,y) \qquad \forall x,y \in X$$

Observación

Si d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes, entonces (X, τ_{d_1}) y (X, τ_{d_2}) son espacios topológicos homeomorfos.

$$Id : (X, \tau_{d_1}) \longrightarrow (X, \tau_{d_2})$$

Trivialmente, la relación «métricas topológicamente equivalentes» es una relación de equivalencia en X

- Si d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes, entonces (X, τ_{d_1}) y (X, τ_{d_2}) tienen las mismas propiedades topológicas
- Si d_1 y d_2 son métricas equivalentes, entonces d_1 y d_2 son métricas topológicamente equivalentes

Demostración.

En efecto, si $B_{d_1}(x,r)$ la bola abierta de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ en la métrica d_1

P.D. $\quad \forall y \in B_{d_2}(x,r) \quad \exists S_y > 0$ tal que $B_{d_2}(x,r) \subseteq B_{d_1}(x,r)$

$z \in B_{d_2}(y, S_y) \qquad d_2(z,y) < S_y$

$$\begin{aligned} d_1(x,z) &\leq d_1(z,y) + d_1(y,x) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} d_2(z,y) + d_1(x,y) \\ &< \frac{1}{\alpha} S_y + d_1(x,y) \end{aligned}$$

Tomando $S_y = \alpha(r - d_1(x,y)) > 0$, se sigue que

$$d_1(x,z) < \frac{1}{\alpha} S_y + d_1(x,y) = \frac{1}{\alpha}\alpha(r - d_1(x,y)) + d_1(x,y)$$

$B_{d_1}(x,r) \in \tau_{d_2} \quad \forall x \in X \quad \forall r > 0.$

Análogamente, se puede mostrar que $B_{d_2}(x,r) \in \tau_{d_1}$. Por tanto d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

Observación

Si d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes, sobre X, no implica que d_1 y d_2 son métricas equivalentes.

Ejemplo.

Sea $X \neq \emptyset$ y d una métrica sobre (X,d) un espacio métrico. Defino $\hat{d}(x,y) := \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$

$\hat{d}$ es una métrica sobre X, ejercicio.

Demuestre que $\tau_d \approx \tau_{\hat{d}}$ (d y $\hat{d}$ son topológicamente equivalentes)

Sea B un conjunto cerrado en τ_d. P.D B es cerrado en $\tau_{\hat{d}}$.

Sea $x \in \overline{B}$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en τ_d.

Equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

$$0 \leq \hat{d}(x_n,x) = \frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)} \leq d(x_n,x)$$

Así, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \hat{d}(\hat{x}_n, x) = 0 \iff x \in \overline{B}.$$

Así, B es cerrado en $\tau_{\hat{d}}$.

Supongamos que B es cerrado en $\tau_{\hat{d}}$. P.D. B es cerrado en τ_d.

Si $x \in \overline{B}_{\tau_{\hat{d}}}$, entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B tal que

$$\lim_{n\to\infty} \hat{d}(x_n, x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)} \right) = 0.$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty} (1+d(x_n,x)) \geq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0.$$

Por lo tanto $x \in \overline{B}_{\tau_d}$.

Así, B es cerrado en τ_d si y solo si B es cerrado en $\tau_{\hat{d}}$

De esta manera, hemos probado que (d y $\hat{d}$ son métricas equivalentes)

- Ahora, vamos a probar que d y $\hat{d}$ no son métricas equivalentes (X,d) y $(X,\hat{d})$. Supongamos por absurdo que d y $\hat{d}$ son métricas equivalentes en X.

Así, existe $\alpha, \beta > 0$ tal que

$$\alpha d(x,y) \leq \hat{d}(x,y) \leq \beta d(x,y) \qquad \forall x,y \in X$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq d(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha d(x,y) \leq \hat{d}(x,y) \leq d(x,y)$$

Consideremos $x \neq y$ $\quad y \in B_{\hat{d}}(x, \alpha/n)$

$$\alpha\, d(x,y) \leq \hat{d}(x,y) < \alpha/n$$

$$\Rightarrow d(x,y_n) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

tomando $n \to \infty$, se sigue que

$$d(x,y) = 0 \iff x = y.$$

Por lo tanto, d y $\hat{d}$ no son métricas equivalentes.

Observación.

Si (X,d_1) y (X,d_2), d_1 y d_2 son métricas topológicamente equivalentes, entonces tienen las mismas propiedades topológicas. Pero no tienen las mismas propiedades métricas.

Por ejemplo.

- Principio de acotación
- Propiedad de continuidad
- Propiedad de Cauchy
- Propiedad de funciones Lipschitz

Observación

Mientras que si d_1 y d_2 son «métricas equivalentes» en X se tiene que

- (X, τ_{d_1}) y (X, τ_{d_2}) tienen las mismas propiedades topológicas y métricas.

Martes, 6 de Julio de 2021

Funciones continuas en espacios topológicos

Definición 2.20 Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) dos espacios topológicos y $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$. Decimos que f es un encaje topológico si $f:(X,\tau_X) \to (f(X), \tau_{f(X)})$ es un homeomorfismo entre X y $f(X)$.

$\tau_Y|f(X) = \{$ Topología inducida por el subconjunto $f(X)$ en $\tau_Y \}$

$$\tau_Y|f(X) = \{B \subset Y : B = f(X) \cap U,\ U \in \tau_Y\}$$

Ejemplo: Si consideramos $n < m$ y $X = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $Y = (\mathbb{R}^m, |\cdot|)$ y $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(x_1, \dots, x_n) \to f((x_1,\dots,x_n)) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

f es un encaje topológico.

Capitulo 3: Espacio producto, topología producto

Consideremos lo siguiente

- $\mathcal{A}$ un conjunto de índices
- $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de conjuntos no vacíos

Definiremos el producto cartesiano de $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de la siguiente manera

Definición 3.1

El producto cartesiano de la familia de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es el conjunto de todas las funciones

$$x: \mathcal{A} \to \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$$

tales que para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, $x(\alpha) \in X_\alpha$.

Este conjunto de funciones se nota como $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$.

• Para cada $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ y para cada $\alpha \in A$ el valor $x(\alpha)$ lo llamamos la α-ésima componente coordenada de x.

• Frecuentemente, la α-ésima componente de $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ se la suele notar por x_α. Además, por conveniencia, denotaremos a la función x por $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Observación

• Para asegurarnos de que el producto cartesiano de una familia infinita de conjuntos no vacíos es, no vacía, se usa el axioma de elección.

Definición 3.2.

Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos. Para todo subconjunto finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de elementos de A, y para toda familia de abiertos $\{W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_n}\}$ tal que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ $W_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i}$, podemos definir el siguiente conjunto de $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Llamaremos el cilindro abierto de base $\{W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_n}\}$ al subconjunto de $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ definido como

$$Cyl(W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_n}) = \prod_{j \in A} Y_j$$

donde

$$Y_j = W_j \qquad \text{si } j \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

$$Y_j = X_j \qquad \text{si } j \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

Proposición 3.3

El conjunto de cilindros $\{Cyl(W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_n})\}$ forma una base para la topología definida en el espacio producto cartesiano. $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Observación

Note que para definir una topología sobre $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ necesito que todos los conjuntos no vacíos X_α, $\alpha \in A$ sean espacios topológicos

• A la topología inducida por cilindros se la conoce como topología producto y se la nota como

$$\prod_{\alpha \in A} \tau_\alpha.$$

Demostración (Proposición 3.3)

En primer lugar consideremos

$$\beta \subseteq \mathcal{P}\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha\right)$$

definido como

$$\beta = \{ Cyl((W_{\alpha_i})_{i=1}^{n}) : n \in \mathbb{N} \text{ y } W_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i} \}$$

P.D. Se verifica la (proposición 1.22)

1] Sea $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \Rightarrow$ Existe $\hat{\beta} \in \beta$ tal que $x \in \hat{\beta}$

2] $\forall \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 \in \beta \quad \forall x \in \hat{\beta}_1 \cap \hat{\beta}_2$ Existe $\hat{\beta}_x \in \beta \quad x \in \hat{\beta}_x \subset \hat{\beta}_1 \cap \hat{\beta}_2$

1) Evidentemente ya que si considero $Cyl(\{W_{\alpha_1}\})$ con $W_{\alpha_1} = X_{\alpha_1}$ tenemos $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in Cyl(\{W_{\alpha_1}\})$

2) Sean $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 \in \beta$, cualesquiera y $x \in \hat{\beta}_1 \cap \hat{\beta}_2$, cualquiera

Como $\hat{\beta}_1 \in \beta$, tenemos que

$$\hat{\beta}_1 = C_y|(\{W_{\alpha_j}^1\}_{j\in J}) \quad \text{donde } J\subset \mathcal{A} \text{ finito } W_{\alpha_j} \in \tau_{\alpha_j}$$

y

$$\hat{\beta}_2 = C_y|(\{W_{\alpha_k}^2\}_{k\in K}) \quad \text{donde } K\subset \mathcal{A} \text{ finito y } W_{\alpha_k} \in \tau_{\alpha_k}$$

Como $x \in C_y(\{W_{\alpha_j}^1\}_{j\in J}) \cap C_y|(\{W_{\alpha_k}^2\}_{k\in K})$, se tiene que, $x_{\alpha_j} \in W_{\alpha_j}^1$ y $x_{\alpha_k} \in W_{\alpha_k}^2$

- Caso: $J=K$.

Se tiene que para todo $j\in J$,

$$x_{\alpha_j} \in W_{\alpha_j}^1 \cap W_{\alpha_j}^2$$

Como $W_{\alpha_j}^1 \cap W_{\alpha_j}^2 \in \tau_{\alpha_j}$, tenemos que existe $B_{\alpha_j} \in \tau_{\alpha_j}$ tal que

$$x_{\alpha_j} \in B_{\alpha_j} \subseteq W_{\alpha_j}^1 \cap W_{\alpha_j}^2$$

Tomando $B_x = C_y(\{B_{\alpha_j}\}_{j\in J})$, se sigue que

$$x \in B_x \subseteq \hat{\beta}_1 \cap \hat{\beta}_2$$

- Caso: $J\cap K \neq \emptyset$

Como J y K son finitos, tenemos que su intersección no vacía, es un conjunto finito de $\mathcal{A}$, entonces

$$J\cap K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad \text{con } n\in \mathbb{N}$$

Así, para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, tenemos que

$$x_{\alpha_i} \in W_{\alpha_i}^1 \cap W_{\alpha_i}^2$$

Razonando de la misma forma que antes, tenemos que existe $\beta_{\alpha_i}^x \in \tau_{\alpha_i}$ tal que

$$x_{\alpha_i} \in \beta_{\alpha_i}^x \subseteq W_{\alpha_i}^1 \cap W_{\alpha_i}^2$$

Por otro lado, si $j\in J$ y $j\notin K$, tenemos que existe $\beta_{\alpha_j}^x \in \tau_{\alpha_j}$ tal que

$$x_{\alpha_j} \in \beta_{\alpha_j}^x \subset W_{\alpha_j}^1.$$

Además, si $k\in K$ y $k\notin J$, tenemos que existe $\beta_{\alpha_k}^x \in \tau_{\alpha_k}$ tal que

$$x_{\alpha_k} \in \beta_{\alpha_k}^x \subset W_{\alpha_k}^2.$$

Así, podemos tomar

$$\beta_x = C_y|\{(B_{\alpha_z}^x)_{z\in J\cup K}\}$$

donde:

- Si $z\in K\cap J \Rightarrow B_{\alpha_z}^x \subseteq W_{\alpha_z}^1 \cap W_{\alpha_z}^2$
- Si $z\in K$ y $z\notin J \Rightarrow B_{\alpha_z}^x \subseteq W_{\alpha_z}^2$
- Si $z\notin K$ y $z\in J \Rightarrow B_{\alpha_z}^x \subseteq W_{\alpha_z}^1$

Así, se tiene que

$$x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \beta^x \subseteq \hat{B}_1 \cap \hat{B}_2$$

Caso $J\cap K = \emptyset$, ejercicio.

Observación.
Con esta última proposición, podemos ver que la topología producto $\prod_{\alpha\in A} \tau_\alpha$ está formada por la unión arbitraria de «cilindros».

- Un caso particular de cilindros es el siguiente:

Si $\alpha_j \in A$ y $W_{\alpha_j} \in \tau_{\alpha_j}$ tenemos $C_{Y} | (W_{\alpha_j}) = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ donde

$$\begin{cases} Y_\alpha = W_\alpha & \text{con } \alpha = \alpha_j \\ Y_\alpha = X_\alpha & \text{con } \alpha \neq \alpha_j \end{cases}$$

Este tipo de cilindros son llamados unitarios.

→ Ejercicio de repaso
8 de julio de 2021
1) Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) dos espacios topológicos y $A, B \subseteq X$ no vacías y $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ una función continua. Demostrar que si $\bar{A}=\bar{B}$, entonces

$$\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$$

Demostración:
Supongamos que $\bar{A}=\bar{B}$, así dado que f es continua; así

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow f(\bar{B}) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow f(B) \subseteq f(\bar{B}) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow \overline{f(B)} \subseteq \overline{f(A)}.$$

Análogamente,

$$f(A) \subseteq f(\bar{A}) = f(\bar{B}) \subseteq \overline{f(B)} \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq \overline{f(B)}.$$

Así

$$\overline{f(A)} = \overline{f(B)}.$$

Ejercicio 2.
Sea X un conjunto no vacío sobre el cual definimos τ_1 y τ_2 dos topologías. Muestre que los siguientes enunciados son equivalentes

1) $\tau_1 \subseteq \tau_2$
2) $Id: (X,\tau_2) \to (X,\tau_1)$ es continua
3) $Id\ (X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$ es abierta
4) $Id\ (X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$ es cerrada.

Demostración
$(1 \Rightarrow 2)$
Supongamos que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. P.D. $Id\ (X,\tau_2) \to (X,\tau_1)$ es continua.
P.D

$$(\forall A \in \tau_1)\ (f^{-1}(\tau_2) \in \tau_2)$$

Sea $A \in \tau_1$ cualquiera; puesto que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, se sigue que $A \in \tau_2$ y por definición de identidad

$$Id(A) = A \in \tau_2.$$

Así, puesto que A fue arbitrario, se sigue que $Id: (X,\tau_2) \to (X,\tau_1)$ es continua.

$(2 \Rightarrow 3)$.
Supongamos que $Id: (X,\tau_2) \to (X,\tau_1)$ es continua.
P.D $Id(X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$ es abierta.
P.D $(\forall A \in \tau_1)\ (f(A) \in \tau_2)$

Ejercicio 3 Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Muestre que los siguientes enunciados son equivalentes

1) $\forall (x,y) \in X \times X$ tal que $x \neq y$, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $y \notin V_x$

2) $\forall x \in X$ $\{x\}$ es cerrado

3) $\forall x : X \cap \{V : V \in \mathcal{V}(x)\} = \{x\}$

b) Sea (X, τ_X), con la propiedad anterior y $A \subset X$ tal que $\overline{A} \neq A$.
P.D. Si $x \in \overline{A}$ y $x \notin A$, entonces toda vecindad de x interseca a A en una infinidad de puntos

$(1 \Rightarrow 2)$ Supongamos que $\forall (x,y) \in X \times X$ tal que $x \neq y$, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $y \notin V_x$.

Sea $x \in X$, cualquiera.
P.D $\{x\}$ es cerrado
P.D $\{x\}^c$ es abierto
Sea $y \in \{x\}^c$, cualquiera. P.D y es punto interior.
Como $y \in \{x\}^c \Rightarrow y \neq x$. Así, existe $V_y \in \mathcal{V}(y)$ tal que $x \notin V_y$.

De donde, se sigue que

$$y \in V_y \subseteq \{x\}^c$$

Por lo tanto, como y es arbitrario, se sigue que $\{x\}^c$ es abierto.
Y, por lo tanto, $\{x\}$ es cerrado.

$(2 \Rightarrow 3)$ Supongamos que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado.
Supongamos que $\{x\}$ es cerrado.
P.D. $\bigcap \{V \in \mathcal{V}(x)\} = \{x\}$.

$$\{x\} \subseteq \bigcap \{V \in \mathcal{V}(x)\}$$

P.D

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} V \subseteq \{x\}.$$

Sea $a \in \bigcap \{V : V \in \mathcal{V}(x)\}$. P.D $a = x$. Por absurdo, supongamos que $a \neq x$.
Como $\{x\}^c$ es abierto, y $a \in \{x\}^c$, existe V_a tal que

$$a \in V_a \subseteq \{x\}^c$$

Otro argumento.

$$\bigcap \{V : V \in \mathcal{V}(x)\} \subseteq \bigcap \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}(x)\} \subseteq \bigcap \{F \text{ cerrado con } x \in F\} = \overline{\{x\}} = \{x\}$$

$(3 \Rightarrow 1)$ Sean $x \neq y$. P.D. Existe $V_y \in \mathcal{V}(y)$ tal que $x \notin V_y$.

Si $x = y$, entonces $x \in \bigcap \{V_y \in \mathcal{V}(y)\} = \{y\}$. Así, por definición de intersección, existe $\hat{V}_y \in \mathcal{V}(y)$ tal que

$$x \notin \hat{V}_y$$

Tomando $V_y = \hat{V}_y$, se sigue el resultado.

Supongamos que $x \in \overline{A}$ y $x \notin A$. P.D. $\forall V_x \in \mathcal{V}(x)$ $V_x \cap A$ es un conjunto infinito de puntos
Por absurdo, supongamos que

$$V_x \cap A \text{ es finito}$$

es decir

$$V_x \cap A = \{y_1, \dots, y_n\}$$

con $y_i \in V_x$ y $y_i \in A$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

Además, note que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ $y_i \neq x$.
Por la propiedad 1, se tiene que existe $V_i \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$y_i \notin V_i \qquad \text{con } i \in \{1, \dots, n\}$$

Tomando $\hat{V}_x = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \cap V_x$, tenemos que $\hat{V}_x$ es una vecindad de x y además

$$\hat{V}_x \cap A = \emptyset$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_i \cap V_x \cap A = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \cap \{y_1, \dots, y_n\} = \emptyset$$

Así, se sigue que $x \notin \overline{A}$, pero esto es absurdo. Por lo tanto $V_x \cap A$ es un conjunto infinito.

Ejercicio

Sea (X, τ_X) un espacio topológico y $f:(X, \tau_X) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ una función continua.
Definimos el soporte de f como

$$S = S(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

1) Muestre que $\overline{\mathring{S}} = S$.
2) Supongamos que (X, d) es un espacio métrico tal que existe $A \subset E$ que cumple que $A = \overline{\mathring{A}}$
Muestre que existe $f_A : (X, \tau d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ tal que

$$S(f_A) = A.$$

Demostración

i) Notemos que

$$\operatorname{int}(S) \subseteq S \Rightarrow \overline{\operatorname{int}(S)} \subseteq \overline{S} = S$$

Basta probar que

$$S \subseteq \overline{\operatorname{int}(S)}.$$

Sea $s \in S$, cualquiera P.D $s \in \overline{\operatorname{int}(S)}$. P.D Para toda vecindad de s, $V_s \in \mathcal{V}(s)$ $V_s \cap \operatorname{int}(S) \neq \emptyset$
como $s \in S$, se sigue que

$$s \in \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}},$$

entonces, se sigue que para toda vecindad de s, V_s. se tiene que

$$y \in V_s \cap \{x \in X : f(x) \neq 0\} \neq \emptyset$$

Como f es continua y $\{0\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, se sigue que $\{x \in X : f(x) = 0\}$ es cerrado y por lo tanto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ es abierto en (X, τ_X), entonces existe $V_y \in \tau$ tal que

$$y \in V_y \subseteq \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

de esta manera, se sigue que

$$y \in V_y \subseteq S \Rightarrow y \in \operatorname{int}(S)$$

y además

$$y \in V_s \cap \operatorname{int}(S) \Rightarrow V_s \cap \operatorname{int}(S) \neq \emptyset$$

es decir, $s \in \overline{\operatorname{int}(S)}$. Como se quería.

Supongamos que existe $A = \overline{\mathring{A}}$, definamos

$$f_A : (X, \tau_X) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$$
$$x \mapsto f_A(x) = d(x, \mathring{A}) \geq 0,$$

donde

$$d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z)$$

P.D f_A es continua
$S f_A = A^c$

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

tomando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_n \to x$, se sigue que

$$|d(x_n,A) - d(x,A)| \leq d(x_n,x)$$
$$\Leftrightarrow |f(x_n) - f(x)| \leq d(x_n,x)$$

puesto que $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$, se sigue que $f(x_n) = f(x)$. Así, f es continua.
Consideremos

Martes. 13 de julio de 2021

Topología en un espacio producto.

$$C_y|(W_{i_1}) = \prod_{i\in I} Y_i \quad \text{donde} \quad Y_i = \begin{cases} \text{si } i = i_1, & Y_{i_1} = W_{i_1} \\ \text{si } i \neq i_1, & Y_i = X_i \end{cases}$$

cilindro unitario con el cual podemos caracterizar todos los cilindros de la siguiente forma:

Si $\{i_1,\dots,i_n\} \subseteq I$, $\{W_{i_1},\dots,W_{i_n}\}$ una familia de conjuntos tal que $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ $W_{i_j} \in \mathcal{T}$

$$C_y|(W_{i_1},\dots,W_{i_n}) = C_y|(W_{i_1}) \cap C_y|(W_{i_2}) \cap \dots \cap C_y|(W_{i_n})$$
$$= \bigcap_{j=1}^{n} C_y|(W_{i_j})$$

En efecto, si $x \in C_y(W_{i_1},\dots,W_{i_n})$, entonces $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i$ donde

$$Y_i = \begin{cases} Y_i = W_i & \text{si } i \in \{i_1,\dots,i_n\} \\ Y_i = X_i & \text{si } i \notin \{i_1,\dots,i_n\} \end{cases}$$

Por tanto, se sigue que para todo $i \in \{1,\dots,n\}$ $x_i \in W_i$, así

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} C_y|(W_{i_j})$$

Los cilindros unitarios forman una subbase de la topología producto.

Topología cajas sobre un espacio producto

Recordemos que hasta el momento, hemos definido una topología $(\prod_{i\in I} \tau_i)$ sobre el producto $(\prod_{i\in I} X_i)$.
Ahora, definamos una nueva topología en $\prod_{i\in I} X_i$ de la siguiente forma

Proposición 3.4. Consideremos $\beta' \subseteq \mathcal{P}(\prod_{i\in I} X_i)$ definido como $\beta' = \{U = \prod_{i\in I} W_i,\ W_i \in \tau_i\}$, entonces β' induce una única topología τ_{caj} sobre $\prod_{i\in I} X_i$ tal que β' es una base de τ_{caj}.

Observación la topología que genera β' sobre el espacio producto $\prod_{i\in I} X_i$ es conocida como la topología cajas y es notada τ_{caj}.

Si $U \in \tau_{caj}$ entonces U es una unión arbitraria de elementos de β'

Demostración: Ejercicio.

Observación $\prod_{i\in I} \tau_i \subset \tau_{caj}$

En efecto, si $U \in \prod_{i\in I}\tau_i$. P.D. $U \in \tau_{caj}$.
Si $x \in U$, mostremos que existe $U_x \in \tau_{caj}$ tal que $x \in U_x \subset U$.
Si $x\in U$, existe β_x un cilindro abierto en $\prod_{i\in I}\tau_i$ tal que

$$x \in \beta_x \subseteq U$$

Así, existe $\{i_1,\dots,i_n\} \subseteq I$ y $\{W_1,\dots,W_n\}$ tal que para todo $j \in \{i_1,\dots,i_n\}$ se tiene que $W_{ij} \in \tau_j$.

$$\beta_x = Cyl(W_{i_1},\dots,W_{i_n}) = \bigcap_{j=1}^{n} Cyl(W_{ij}).$$

Entonces $\beta_x = \prod_{i\in I}\hat{W}_i$, donde

$$\hat{W} = \begin{cases} \hat{W}_i = W_i & \text{si } i \in \{i_1,\dots,i_n\} \\ \hat{W}_i = X_i & \text{si } i \notin \{i_1,\dots,i_n\} \end{cases}$$

Por lo tanto, para todo $i\in I$

$$\hat{W}_i \in \tau_i.$$

Así, $\beta_x \in \beta' \subseteq \tau_{caj}$. Por lo tanto, U es vecindad de todos sus puntos para la topología τ_{caj}

En general, no se tiene que $\tau_{caj} \subseteq \prod_{i\in I}\tau_i$
En efecto, si $|I| = +\infty$ y además tomamos

$$\beta = \prod_{i\in I} W_i \quad \text{tal que} \quad \forall i\in I \quad W_i \in \tau_i$$

Entonces, $\beta \in \tau_{caj}$ pero $\beta \notin \prod_{i\in I}\tau_i$

En efecto si suponemos por absurdo que $\beta \in \prod_{i\in I}\tau_i$, entonces para todo $x\in\beta$ existe β_x un cilindro tal que

$$x \in \beta_x \subseteq \beta$$

Así, existe $\{i_1,\dots,i_n\} \subseteq I$ y $\{\hat{W}_{i_1},\dots,\hat{W}_{i_n}\}$ tal que para todo $j\in\{1,\dots,n\}$ $\hat{W}_{ij} \in \tau_{ij}$

$$\beta_x = \prod_{i\in I} Y_i \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} \text{si } i \in \{W_{i_1},\dots,W_{i_n}\} & Y_i = \hat{W}_i \\ \text{si } i \notin \{W_{i_1},\dots,W_{i_n}\} & Y_i = X_i \end{cases}$$

Así, $x \in \prod_{i\in I} Y_i \subset \beta$ como $\beta = \prod_{i\in I} W_i$ tal que $W_i \in \tau_i$, $W_i = X_i$ se tendría que $\forall i \in \{i_1,\dots,i_n\}$

$$Y_i = X_i \subset W_i$$

lo cual es absurdo.

- Si $|I| < +\infty$, entonces $\tau_{caj} \cong \prod_{i\in I}\tau_i$

En general, es falso que para $A \in \prod_{i=1}^{n}\tau_i$ (cuando $|I| < +\infty$), se tenga que

$$A = \prod_{i=1}^{n} W_i \qquad \text{donde } W_i \in \tau_i \ \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Lo que se puede decir es que existen $\{\hat{W}_1,\dots,\hat{W}_n\}$ una familia de conjuntos finita tal que para todo $i\in\{1,\dots,n\}$ $\hat{W}_i \in \tau_i$

$$\prod_{i=1}^{n} \hat{w}_i \subseteq A$$

También se pueden considerar los abiertos de la forma $\prod_{i=1}^{n} \hat{w}_i$ con $\hat{w}_i \in \tau_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ para demostrar cualquier propiedad topológica.

Proposición 3.6

Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $\{A_i\}_{i\in I}$ tal que $A_i \subseteq X_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces para todo $i \in I$ (A_i, τ_{A_i}) es un espacio topológico (τ_{A_i} es la topología inducida por τ_i sobre el conjunto A_i).

Se tiene que

$$\left(\prod_{i\in I} A_i, \prod_{i\in I} \tau_{A_i}\right) \cong \left(\prod_{i\in I} A_i, \prod_{i\in I} \tau_i\right)$$

Es decir que si $U \in (\prod_{i\in I} A_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$, entonces

$$U = \prod_{i\in I} A_i \cap W$$

donde $W \in \prod_{i\in I} \tau_i$.

En primer lugar, es suficiente mostrar que dado $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$ y $\{w_{i_1}, \dots, w_{i_n}\}$ con $j \in \{1, \dots, n\}$ $w_{i_j} \in \tau_{i_j}$ se tiene que

$$Cyl(w_{i_1}, \dots, w_{i_n}) \cap \prod_{i\in I} A_i \in \prod_{i\in I} \tau_{A_i} \qquad (*)$$

Para demostrar que

$$\left(\prod_{i\in I} A_i, \prod_{i\in I} \tau_i\right) \subseteq \left(\prod_{i\in I} A_i, \prod_{i\in I} \tau_{A_i}\right)$$

ya que los conjuntos de la forma $(*)$ forman una base de $\left(\prod_{i\in I} A_i, \prod_{i\in I} \tau_i\right)$

$$Cyl(w_{i_1}, \dots, w_{i_n}) \cap \left(\prod_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} Y_i$$

donde

$$Y_i = \begin{cases} Y_i = w_i \cap A_i & \text{si } i \in \{i_1, \dots, i_n\} \\ Y_i = A_i & \text{si } i \notin \{i_1, \dots, i_n\} \end{cases}$$

Como para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ $Y_i = W_i \cap A_i \in \tau_{A_i}$ ya que $w_i \in \tau_i$, tenemos que

$$\prod_{i\in I} Y_i = Cyl_{A_i}(\hat{w}_{i_1}, \dots, \hat{w}_{i_n})$$

tal que para todo $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$ $\hat{w}_i = A_i \cap w_i$. Como

$$Cyl_{A_i}(\hat{w}_{i_1}, \dots, \hat{w}_{i_n}) \in \prod_{i\in I} \tau_{A_i}$$

se tiene que

$$Cyl(w_{i_1}, \dots, w_{i_n}) \cap \prod_{i\in I} A_i \in \prod_{i\in I} \tau_{A_i}$$

Para demostrar la otra inclusión: $\left(\prod_{i\in I} A_i, \prod \tau_{A_i}\right) \subseteq \left(\prod_{i\in I} A_i, \prod_{i\in I} \tau_i\right)$

Bastaría con demostrar que, dado $\{i_1, \dots, i_n\} \in I$ y $\{\hat{w}_{i_1}, \dots, \hat{w}_{i_n}\}$ una familia de conjuntos tal que para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ $\hat{w}_{i_j} \in \tau_{A_{i_j}}$

$$Cyl_{A_i}(\hat{w}_{i_1}, \dots, \hat{w}_{i_n}) \in \left(\prod_{i\in I} A_i, \prod \tau_i\right)$$

Es decir que

$$Cyl_A(\hat{w}_{i_1}, \dots, \hat{w}_{i_n}) = \prod_{i \in I} A_i \cap U$$

donde U es un abierto en $\prod_{i\in I} \tau_i$.

Como $\hat{w}_{i_j} \in \tau_{A_{i_j}}$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que $\hat{w}_{i_j} = A_{i_j} \cap w_{i_j}$ donde $w_{i_j} \in \tau$

$$Cyl_{A_i}(\hat{w}_{i_1}, \dots, \hat{w}_{i_n}) = \prod_{i \in I} A_i \cap Cyl(w_{i_1}, \dots, w_{i_n})$$

Así, como $Cyl(w_{i_1}, \dots, w_{i_n}) \in \prod_{i\in I} \tau_i$, tenemos que

$$Cyl_{A_i}(\hat{w}_{i_1}, \dots, \hat{w}_{i_n}) \in \left(\prod_{i\in I} A_i, \prod_{i\in I} \tau_i\right).$$

Continuidad en el espacio producto para la topología producto.

Antes de hablar de continuidad, vamos a dar un enfoque distinto para la construcción de la topología producto, a partir de proyecciones canónicas.

Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i\in I} X_i$. con estos antecedentes, tenemos la siguiente proposición.

Definición 3.6 - Proyecciones canónicas -
Sea $j \in I$, definimos la aplicación j-ésima proyección p_j de X en (X_j, τ_j) de la siguiente manera

$$p_j : X \longrightarrow (X_j, \tau_j)$$

$$x = (x_i)_{i\in I} \longrightarrow p_j(x) = x_j.$$

donde x_j es la j-ésima componente de $x = (x_i)_{i\in I}$.

Observación
- p_j es una aplicación de un conjunto sobre un espacio topológico
- $(p_j)_{j\in I}$ es una familia de aplicaciones de un mismo conjunto hacia varios espacios topológicos
- Utilizando la proposición 2.10 podemos proveer a $X = \prod_{i\in I} X_i$ una topología tal que sea la topología más pequeña que haga continua a la familia de aplicaciones $(p_j)_{j\in I}$.

Proposición 3.7 La topología producto es la topología más pequeña definida sobre $X = \prod_{i\in I} X_i$ que hace continuas la familia de proyecciones. $(p_j)_{j\in I}$.

Jueves 15 de julio de 2021
En primer lugar, recordemos que la topología más pequeña definida sobre $X = \prod_{i\in I} X_i$ que deja continuas las familias de proyecciones $(p_i)_{i\in I}$ es:

$$\beta = \{ \bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(w_i) \text{ donde } J \subseteq I \text{ finito y } w_j \in \tau_j \}.$$

A la topología generada por β la notaremos como τ. P.D. $\tau \approx \prod_{i\in I} \tau_i$

$(\subseteq)$
Para ello, es suficiente mostrar que $\forall B \in \beta$, $B \in \prod_{i\in I} \tau_i$.
Sea $B \in \beta$, se tiene que

$$B = \bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(w_j) \qquad J \subseteq I \text{ finito}$$

Únicamente, mostremos que

$$B = Cyl((W_j)_{j\in J})$$

Recordemos que $Cy((W_j)_{j\in J}) = \bigcap_{j\in J} Cyl(W_j)$. Así, únicamente restaría probar que para todo $j\in J$

$$Cy(W_j) = P_j^{-1}(W_j)$$

Si $x=(x_i)_{i\in I} \in Cyl(W_j)$, tenemos que $x_j \in W_j$. Así $x_j \in P_j^{-1}(W_j)$ si y solo si $P_j(x) = x_j \in W_j$. Evidentemente, si $x \in P_j^{-1}(W_j)$, entonces $x \in Cyl(W_j)$. Así, hemos demostrado que

$$B = \bigcap_{j\in J} P_j^{-1}(W_j) = Cyl((W_j)_{j\in J})$$

Esta igualdad de conjuntos muestra que los espacios topológicos inducidos tanto por B como por los silindros, son iguales

Con esta igualdad de topologías, tenemos la siguiente proposición respecto a la continuidad

Proposición 3.8 Sea (X,τ_X) un espacio topológico y $X' = \prod_{i\in I} X_i$ provisto de la topología producto $\tau' = \prod_{i\in I}\tau_i'$ y $P_i : X' \longrightarrow X_i'$, donde $\{(X_i',\tau_i')\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos. Consideramos la función $f:(X,\tau_X)\longrightarrow(X',\tau')$ una función, entonces f es continua de (X,τ_X) en (X',τ') una función continua si y solo si para todo $i\in I$ $p_i\circ f : (X,\tau_X) \longrightarrow (X_i',\tau_i')$ es continua

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau_X) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_i'\circ f"'] & (X',\tau') \arrow[d, "p_i'"] \\
& (X_i',\tau_i')
\end{tikzcd}$$

Observación Tengamos en cuenta que esta caracterización de continua es válida cuando el espacio de llegada es el espacio producto con la topología producto
No tenemos una caracterización de las funciones de la forma

$$g : \left(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I}\tau_i\right) \longrightarrow (X,\tau_X)$$

(Demostración 3.8)

($\Rightarrow$) Si f es continua y además, recordando que para todo $i\in I$ $p_i' : (X,\tau_X') \to (X_i',\tau_i')$ es continua, tenemos que para todo $i\in I$ $p_i'\circ f$ es continua al ser la composición de funciones continuas

($\Leftarrow$) Supongamos que para todo $i\in I$ $p_i\circ f$ es continua. P.D. f es continua.
Para ello basta mostrar que la imagen inversa a partir de f de la base de τ' es un abierto en τ_X.
Si B pertenece a la base de la topología producto, entonces B es de la forma

$$B = \bigcap_{j\in J} P_j^{-1}(W_j) \qquad J\subseteq I \text{ finito} \quad W_j \in \tau_j'$$

$$f^{-1}(B) = \bigcap_{j\in J} (P_j\circ f)^{-1}(W_j)$$

Por hipótesis, para todo $i\in I$ $p_i\circ f$ es continua. En particular, para todo $j\in J$, $P_j\circ f$ es continua. Como $f^{-1}(B)$ es la intersección finita de abiertos, tenemos que $f^{-1}(B)$ es un abierto en τ_X

Ejemplo

Consideremos $M_n(\mathbb{K}) = \{$ matrices de $n\times n$ componentes sobre $\mathbb{K}\}$

$$M_n(\mathbb{K}) \approx \mathbb{K}^{n\times n}$$

$$\begin{aligned} \odot : M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} &\longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n} \end{aligned}$$

$A = (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} \longrightarrow AB = C$ $\qquad C = (c_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}}$, donde para todo $i,j\in\{1,\dots,n\}$

$B = (b_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}}$ $\qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Demuestre que $\odot$ es continuo.

Dado $i\in\{1,\dots,n\}$ y $j\in\{1,\dots,n\}$ $\qquad$ $\begin{aligned} P_{ij} : M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) \\ A &\longmapsto P_{ij}(A) = a_{ij} \end{aligned}$

$$\begin{tikzcd} M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \arrow[r] \arrow[dr, "P_{ij}\circ\odot"'] & M_n(\mathbb{K}) \arrow[d, "P_{ij}"] \\ & (\mathbb{K}, |\cdot|) \end{tikzcd}$$

Mostremos que para todo $i,j\in\{1,\dots,n\}$

$$\begin{aligned} P_{ij}\circ\odot : M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) \\ (A,B) &\longrightarrow P_{ij}\circ\odot(A,B) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \end{aligned}$$

Como $P_{ij}\circ\odot((A,B))$ es una suma finita de funciones continuas se tiene que $P_{ij}\circ\odot$ es continua para todo $i,j\in\{1,\dots,n\}$

Proposición 3.9 Sea $(X = \prod_{i\in I} X_i, \tau = \prod_{i\in I}\tau_i)$ donde, $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos y $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X, entonces $x^n \to x$ en (X,τ_X) si y solo si para todo $i\in I$

$$P_i(x^n) \longrightarrow P_i(x)$$

en cada (X_i,τ_i). Tome en cuenta que para todo $n\in\mathbb{N}$ $\quad x^n = (x_i^n)_{i\in I}$, entonces $P_j(x^n) = x_j^n$

Demostración: Ejercicio.

Ejemplo. Consideremos el espacio vectorial ℓ^∞, se tiene que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ es un espacio métrico completo y, para todo $i\in I$

$$\begin{aligned} S_i : \ell^\infty &\longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longrightarrow S_i(x) = x_i \end{aligned}$$

Además, como $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach tenemos que existe el espacio dual notado por $(\ell^\infty)'$. Con esto, tenemos que a ℓ^∞ se le pueden asignar 3 topologías

$(\ell^\infty, \tau_{\|\cdot\|_\infty})$ $\qquad \tau_{\|\cdot\|_\infty}$ la topología inducida por $\|\cdot\|_\infty$

$(\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty,(\ell^\infty)'))$ $\quad$ la topología más pequeña que hace continuas las familias de aplicaciones $(\ell)_{\ell\in(\ell^\infty)'}$

$(\ell^{\infty}, \tau_{prod})$ ℓ^{∞} con la topología producto.

- Decir las inclusiones o equivalencias de las 3 topologías mencionadas
- Decir las implicaciones con respecto a los 3 tipos de convergencia en ℓ^{∞}
- En el caso que exista solo una implicación con respecto a estos 3 tipos de convergencia, dar contraejemplos para mostrar que en efecto no se tiene la otra implicación.

Evidentemente, tenemos que

$$\tau_{prod} \subseteq \sigma(\ell^{\infty}, (\ell^{\infty})') \subseteq \tau_{\|\cdot\|_{\infty}}$$

En efecto, puesto que cada proyección $p_i \in (\ell^{\infty})'$

Respuesta: En primer lugar, note que $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\ell^{\infty})'$. Así, para todo $n\in\mathbb{N}$ $\delta_n : (\ell^{\infty}, \sigma(\ell^{\infty}, (\ell^{\infty})')) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ son continuas. Entonces, como τ_{prod} es la topología más pequeña que deja continuas las proyecciones $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que

$$\tau_{prod} \subset \sigma(\ell^{\infty}, (\ell^{\infty})')$$

Análogamente, para todo $\ell \in (\ell^{\infty})'$, se tiene que

$$\ell : (\ell^{\infty}, \tau_{\|\cdot\|_{\infty}}) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$$

es continua, se tiene que $\sigma(\ell^{\infty}, (\ell^{\infty})') \in \tau_{\|\cdot\|_{\infty}}$

$$\tau_{prod} \subsetneq \sigma(\ell^{\infty}, (\ell^{\infty})') \subseteq \tau_{\|\cdot\|_{\infty}}$$

Respuesta: Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^{\infty}$, entonces para todo $n\in\mathbb{N}$

$$x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n, \ldots) \quad \text{tal que} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k^n|$$

x^n converge a x en $\tau_{\|\cdot\|_{\infty}}$ $\quad x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ tal que $\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_{\infty} = 0 \qquad \|x^n - x\|_{\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k^n - x_k|$$

Mostrar que si x^n converge a x, entonces converge en $(\ell^{\infty}, (\ell^{\infty})')$. Es decir, para todo $f \in (\ell^{\infty})'$

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n) = f(x) \quad \text{en} \quad (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

Así, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |f(x^n) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x^n - x)| \leq \|f\|_{(\ell^{\infty})'} \|x^n - x\| \underset{n\to\infty}{=} 0$$

Ahora, mostremos que $x^n \to x$ en $(\ell^{\infty}, (\ell^{\infty})')$ implica $x^n \to x$ en τ_{prod}. Es decir, para todo $j\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} x_j^n = x_j \quad \Rightarrow \quad \delta_j(x^n) \longrightarrow \delta_j(x) \quad \text{en } (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

Como para todo $f \in (\ell^{\infty})'$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} f(x^n) = f(x)$ en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ se tiene que, en particular

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \delta_j \in (\ell^{\infty})' \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \delta_j(x^n) = \delta_j(x)$$

Por lo tanto, hemos probado que

$$x^n \to x \text{ en } \tau_{\|\cdot\|_\infty} \Rightarrow x^n \to x \text{ en } \sigma(\ell^\infty, (\ell^\infty)') \Rightarrow x^n \to x \text{ en } \tau_{prod}.$$

Clase, lunes 19 de julio de 2021

Definición 3.10 - Aplicación parcial-
Sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ el espacio producto de la familia de espacios topológicos $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ sobre el definimos la topología producto $\tau = \prod_{i\in I} \tau_i$. Además, consideremos (X', τ') un espacio topológico y $f \in f(X, X')$. Dado $J \subseteq I$ y $a = (a_i)_{i\in I} \in X$. Podemos definir la aplicación parcial de f, notada f_{aJ}, definida como

$$f_{aJ} : \prod_{i\in I\setminus J} X_i \longrightarrow X'$$

$$x = (x_i)_{i\in I\setminus J} \longrightarrow f_{aJ}(x) = f(y)$$

donde

$$y = (y_i)_{i\in I} = \begin{cases} x_i & \text{si } i \notin J \\ a_i & \text{si } i \in J \end{cases}$$

Proposición 3.11
Sobre las notaciones utilizadas en la definición 3.10, tenemos lo siguiente $f: (X, \tau) \to (X', \tau')$ es continua, entonces para todo $J \subseteq I$ y para toda $a = (a_i)_{i\in I}$ f_{aJ} es continua en todo punto de $\prod_{i\in I\setminus J} X_i$.

Demostración:
En primer lugar, asumamos que f es continua de $\left(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i\right)$ en (X', τ')

Además, podemos considerar

$$\varnothing : \prod_{i\in I\setminus J} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} Y_i \qquad \text{donde} \quad \begin{cases} Y_i = X_i & \text{si } i \in I\setminus J \\ Y_i = \{a_i\} & \text{si } i \in J \end{cases}$$

$$\varnothing \left(\prod_{i\in I\setminus J} X_i, \prod_{i\in I\setminus J} \tau_i\right) \longrightarrow \left(\prod_{i\in I} Y_i, \prod_{i\in I} \hat{\tau}_i\right)$$

donde $\hat{\tau}_i = \tau_i$ si $i \notin J$

$\hat{\tau}_i = \{\{a_i\}, \varnothing\}$ $i \in J$

$\varnothing$ es continua, en efecto

$$\begin{tikzcd} \varnothing \left(\prod_{i\in I\setminus J} X_i, \prod_{i\in I\setminus J} \tau_i\right) \arrow[r] \arrow[dr, "p_j \circ \varnothing"'] & \left(\prod_{i\in I} Y_i, \prod_{i\in I} \hat{\tau}_i\right) \arrow[d, "j\in J"] \\ & (Y_j, \tau_j) \end{tikzcd}$$

P.D. $p_j \circ \varnothing : \left(\prod_{i\in I\setminus J} X_i, \prod_{i\in I\setminus J} \tau_i\right) \to (Y_j, \hat{\tau}_j)$ es continuo para todo $j \in J$

- Si $i \in I\setminus J$, entonces $p_j \circ \varnothing = p_j$ es continua
- Si $j \in J$, entonces $p_j \circ \varnothing = a_j$ es la función constante

$$p_j \circ \varnothing = a_j : \left(\prod_{i\in I\setminus J} X_i, \prod_{i\in I\setminus J} \tau_i\right) \longrightarrow (\{a_j\}, \{\{a_j\}, \varnothing\})$$

$$x = (x_i)_{i\in I} \longrightarrow p_j \circ \varnothing(x) = a_j$$

Entonces $P_j \circ \emptyset$ es continua
Así, hemos demostrado que $\emptyset$ es continua. $f_{aj} = f \circ \emptyset$. Como f_{as} es la composición de dos funciones continuas, se sigue que f_{aj} es continua.

Observaciones

1. La recíproca de la (proposición 3.11) es falsa
Es decir que si $\forall S \subseteq I$ f_{aj} es continua, esto no implica que f sea continua
Ejemplo

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f((x,y)) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si $a=(0,0)$, entonces para todo $J \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, se tiene que f_{aJ} es continua

$$f_{(\cdot,0)}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f((x,0)) = 0, \qquad f_{(0,\cdot)}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f((0,x)) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_{(0,0)}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(0,0) = 0$$

continua continua continua

Por otro lado, f no es continua de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, ya que $x=y$ y $x\neq 0$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{1x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} f((x,x)) = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad f((0,0)) = 0.$$

Lo que muestra que f no es continua en $(0,0)$.

2. Lo interesante de esta proposición es su contrarecíproco.
Es decir que existe $J \subseteq I$ y $a=(a_i)_{i\in I}$ tal que f_{as} no es continua en algún punto, entonces f no es continua.

Ejercicios.

1) Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos. Muestre que

i) $\forall i\in I$ (X_i,τ_i) es de Hausdorff si y solo si $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I}\tau_i)$ es de Hausdorff

ii) $\forall H_i \subseteq V_i$ se tiene que $\overline{\prod_{i\in I} H_i} = \prod_{i\in I} \overline{H_i}$

$(\Rightarrow)$ Supongamos que $\forall i\in I$, (X_i,τ_i) es un espacio de Hausdorff.
P.D. $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I}\tau_i)$ es de Hausdorff.

Sean $x=(x_i)_{i\in I}$, $y=(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ cualesquiera tal que $x\neq y$. Así, existe $j\in I$ tal que $x_j\neq y_j$, y como (X_j,τ_j) es de Hausdorff, entonces existen $V_{x_j}\in V(x_j)$ y $V_{y_j}\in V(y_j)$ tales que

$$V_{x_j}\cap V_{y_j} = \emptyset.$$

Puesto que V_{x_j} y V_{y_j} son vecindades en τ_j, entonces $V_{x_j}, V_{y_j}\in\tau_j$. Así, definimos

$$V_x = Cyl(V_{x_j}) = P_j^{-1}(V_{x_j}) \qquad \text{y} \qquad V_y = Cyl(V_{y_j}) = P_j^{-1}(V_{y_j})$$

donde V_x y V_y son abiertos en $\prod_{i\in I}\tau_i$, además $x\in V_x$ y $y\in V_y$. P.D $V_x\cap V_y=\emptyset$.

Por absurdo, supongamos que existe $z=(z_i)\in\prod_{i\in I}X_i$, tal que

$$z\in V_x\cap V_y\neq\emptyset$$

Se tiene que $p_j(z) \in V_{x_j}$ y $p_j(z) \in V_{y_j}$, lo que implica que

$$V_{x_j} \cap V_{y_j} \neq \emptyset.$$

Pero esto es absurdo; así, se concluye que $V_x \cap V_y = \emptyset$. Así, $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$ es de Hausdorff

($\Leftarrow$) Supongamos que $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$ es de Hausdorff. P.D. $\forall i \in I$ (X_i, τ_i) es de Hausdorff

Por absurdo, supongamos que existe $j \in J$ tal que (X_j, τ_j) no es separado, es decir, existen x_j, y_j tales que $\forall V_{x_j} \in V(x_j)$ y $\forall V_{y_j} \in V(y_j)$

$$V_{x_j} \cap V_{y_j} \neq \emptyset$$

Por otro lado; tomando $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i\in I}$ y $\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i\in I}$, definidos como

$$\hat{x}_j = \begin{cases} \hat{x}_i = \hat{y}_i & \text{si } i \in I \setminus \{j\} \\ \hat{x}_i = x_j & \text{si caso contrario} \end{cases} \qquad \hat{y}_j = \begin{cases} \hat{y}_j = \hat{x}_i & \text{si } j \in I \setminus \{j\} \\ \hat{y}_i = y_j & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Tenemos que $\hat{x} \neq \hat{y}$, así, se sigue que existen $V_{\hat{x}} \in V(\hat{x})$ y $V_{\hat{y}} \in V(\hat{y})$ tal que

$$V_{\hat{x}} \cap V_{\hat{y}} = \emptyset$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$V_{\hat{x}} = \bigcap_{j \in \hat{S} \subset I \text{ finito}} p_j^{-1}(W_j) \quad \text{donde } W_j \in \tau_i \text{ y } p_j(\hat{x}) = \hat{x}_j \in W_j \quad \forall j \in \hat{J}$$

$$V_{\hat{y}} = \bigcap_{k \in K \subseteq I \text{ finito}} p_k^{-1}(W_k) \quad \text{tal que } W_k \in \tau_k \text{ y } p_k(\hat{y}) = \hat{y}_k \in W_k \quad \forall k \in K$$

- Si $\{j\} \notin \hat{J}$ y $\{j\} \notin K$, entonces $V_{\hat{x}} \cap V_{\hat{y}} = \emptyset$

En efecto, se tiene que $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i\in I} \in V_{\hat{y}} = \bigcap_{k \in K \subseteq I \text{ finito}} p_k^{-1}(W_k)$ ya que $\hat{p}_k(\hat{x}) = \hat{x}_k = \hat{y}_k \in W_k$ con $k \in K$.

- Si $\{j\} \subseteq J$, $j \notin K$, entonces $\hat{x} = (x_i)_{i\in I} \in V_{\hat{y}}$, para todo $k \in K$ $p_k(\hat{x}) = \hat{x}_k = \hat{y}_k \in W_k$

Por lo tanto,

$$V_{\hat{x}} \cap V_{\hat{y}} \neq \emptyset.$$

Análogamente $j \notin \hat{S}$ y $\{j\} \subset K$

$$V_{\hat{x}} \cap V_{\hat{y}} \neq \emptyset.$$

Entonces el único caso posible es cuando $\{j\} \subseteq \hat{S}$ y $\{j\} \subseteq K$. Es decir que $p_j(\hat{x}) = x_j$ y $p_j(\hat{y}) = y_j$

$$x_j \in W_j \quad \text{y} \quad y_j \in \hat{W}_j$$

Como (X_j, τ_j) no es separado en x_j, y_j, se tiene que

$$W_j \cap \hat{W}_j \neq \emptyset$$

Así, existe $z_j \in W_j$ y $z_j \in \hat{W}_j$. Tomando $\hat{z} = (\hat{z}_i)_{i\in I}$ con $\hat{z}_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in I \setminus \{j\} \\ z_i & \text{si } i = j \end{cases}$

Entonces

$$\hat{z} \in V_x \quad y \quad \hat{z} \in V_y$$

Por lo tanto $V_{\hat{x}} \cap U_{\hat{y}} \neq \emptyset$, lo cual es absurdo.

(Ejercicio ii)
Sea $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$. P.D. $x \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$. Notemos que

$$x_i \in \overline{A_i} \qquad \forall i \in I \tag{*}$$

Por otra parte, sea $V_x \in V(x)$. P.D

$$V_x \cap \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$$

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar

$$V_x = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(W_i) \qquad \text{donde} \quad W_i \in \tau_i \ \text{para } i \in \{1,\dots,n\} \quad y \quad p_i(x) = x_i \in W_i$$

Así, por (*), entonces para todo $V_{x_i} \in V(x_i)$ se sigue que

$$V_{x_i} \cap A_i \neq \emptyset \qquad \forall i \in I$$

Clase, martes 20 de julio de 2021

Ejercicio Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. $\forall i\ A_i \subseteq X_i$ $\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i\in I} A_i}$

(Demostración)
($\supseteq$) Si $x = (x_i)_{i\in I} \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$. P.D. $\forall i \in I$ $x_i \in \overline{A_i}$

Sea $j \in I$ arbitrario pero fijo, vamos a mostrar que $x_j \in \overline{A_j}$, es decir que $\forall U_{x_j} \in V(x_j)$

$$A_j \cap V_j \neq \emptyset$$

Sin pérdida de generalidad se puede asumir que V_j es abierto en τ_j. Así, podemos considerar

$$Cyl(V_j) = p_j^{-1}(V_j)$$

Como $Cyl(V_j)$ es abierto en la topología producto y además $x = (x_i)_{i\in I} \in Cyl(V_j)$, tenemos que

$$Cyl(V_j) \cap \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$$

Así, existe $z = (z_i)_{i\in I} \in Cyl(V_j)$ y $z \in \prod_{i\in I} A_i$, así

$$p_j(z) = z_j \in V_j \quad y \quad p_j(z) \in p_j\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \subseteq A_j$$

$$z_j \in V_j \quad y \quad z_j \in A_j$$

Por lo tanto,

$$V_j \cap A_j \neq \emptyset.$$

Así, $x_j \in \overline{A_j}$. Como j es arbitrario se tiene que para todo $i \in I$ $x_i \in \overline{A_j}$ si y solo si $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

($\subseteq$) Sea $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$, cualquiera. P.D. $x \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$. Como $x \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$, entonces para cada $i \in I$, se tiene que

$$x \in \overline{A_i}$$

De donde, por definición, para cada $i \in I$, para todo $V_{x_i} \in V(x_i)$, se sigue que

$$V_{x_i} \cap A_i \neq \emptyset$$

Así, en particular, para $j \in I$, se tiene que

$$U = Cyl(V_{x_j}) = P_j^{-1}(V_{x_j}),$$

donde U es un abierto en $\prod_{i\in I} X_i$. Ahora, basta probar que

$$U \cap \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

Por absurdo, supongamos que

$$U \cap \prod_{i\in I} A_i = \emptyset$$

de esta manera, se sigue que $U \subseteq (\prod_{i\in I} A_i)^c$. No obstante, sabemos que $x \in U$, por lo tanto

$$x \in U \subseteq (\prod_{i \in I} A_i)^c \Rightarrow x \in (\prod_{i\in I} A_i)^c \Rightarrow P_j(x) = x_j \in P_j((\prod_{i\in I} A_i)^c) \quad ¿?$$

Ejercicio 2.
Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ una familia finita de espacios metrizables. Demuestre que $(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n \tau_i)$ es un espacio topológico metrizable.

Ejercicio 3
Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios topológicos, numerables, metrizable. Demuestre que $(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i, \prod_{n\in\mathbb{N}} \tau_n)$ es un espacio metrizable

Ejercicio 4
Encuentre una familia $\{X_i, \tau_i\}_{i\in I}$ de espacios metrizables tal que $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$ no es un espacio topológico metrizable

Demostración (Ejercicio 2)
Como para cada $i = \{1, \dots, n\}$, (X_i, τ_i) es metrizable, se sigue que existe d_i una métrica tal que

$$(X_i, d_i) \approx (X_i, \tau_i)$$

Así, podemos considerar $\{(X_i, \tau_{d_i})\}_{i=1}^n$ una familia finita de espacios métricos

1) Definir una métrica sobre $\prod_{i=1}^n X_i$
2) Demostrar que $\tau_d \approx \prod_{i=1}^n X_i$

Además, note que el conjunto indexado es finito, por lo tanto, la topología cajas y la topología producto coinciden en $\prod_{i=1}^n X_i$. Como todas las métricas son equivalentes, sin pérdida de generalidad, podemos considerar

$$d : \prod_{i=1}^n X_i \times \prod_{i=1}^n X_i \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

con $x = (x_i)_{i=1}^n$ y $y = (y_i)_{i=1}^n$, donde

$$d(x,y) = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} d_i(x_i, y_i)$$

Es fácil ver que d es una métrica sobre $\prod_{i=1}^n X_i$.

P.D. $\tau_d \approx \prod_{i=1}^n \tau_i$

En primer lugar, mostremos que para todo $j\in\{1,\dots,n\}$ la proyección

$$P_j\left(\prod_{i=1}^{n}X_i,\prod_{i=1}^{n}\tau_i\right)\longrightarrow (X_j,\tau_j)$$

es continua. Mostrando esto, se tendría que $\prod_{i=1}^{n}\tau_i\subseteq\tau d$.
Para demostrar que la proyección P_j es continua, es suficiente mostrar que

$$P_j\left(\prod_{i=1}^{n}X_i,\prod_{i=1}^{n}\tau_i\right)\longrightarrow (X_j,\tau_j)$$

dos espacios métricos ya que $\tau d_j\approx\tau_j$

P.D. $P_j\left(\prod_{i=1}^{n}X_i,\tau d\right)\longrightarrow (X_j,d_j)$

Como estamos en espacios métricos podemos demostrar la continuidad por sucesiones

Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\prod_{i=1}^{n}X_i$ tal que converge en $X=\prod_{i=1}^{n}$ en τd. P.D. $P_j(x^k)\to P_j(x)$ en (X_j,d_j). Notemos que

$$x^1=(x_1^1,\dots,x_n^1)\qquad\qquad y\qquad x=(x_1,\dots,x_n)$$
$$\vdots$$
$$x^n=(x_1^n,\dots,x_n^k)$$

Como $x^k\to x$ en τd, entonces $\lim_{n\to\infty}d(x^k,x)=0$, y para $l\in\{1,\dots,n\}$

$$d(x^k,x)=\max_{l}d_l(x_l^k,x_l)$$

P.D. $P_j(x^k)=x_j^k\to P_j(x)=x_j$ en $(X_j,\tau d_j)$

$$d_j(P_j(x^k),P_j(x))=d_j(x_j^k,x_j)\leq\max_{l}d_l(x_l^k,x_l)=d(x^k,x).$$

tomando el límite,

$$\lim_{k\to\infty}d_j(x_j^k,x_j)\leq\lim_{k\to\infty}d(x^k,x)\to0.\Rightarrow\lim_{k\to\infty}d_j(x_j^k,x_j)=0.$$

Por lo tanto, para todo $j\in\{1,\dots,n\}$ $P_j(x^k)\to P_j(x)$ en $(X_j,\tau d_j)$. Así, para todo $j\in\{1,\dots n\}$

$$P_j\left(\prod_{i=1}^{n}X_i,\tau d\right)\to(X_j,d_j)$$

es continua, lo que implica que

$$\prod_{i=1}^{n}\tau_i\subseteq\tau d$$

P.D. $\tau d\subseteq\prod_{i=1}^{n}\tau_i$.
Como las bolas abiertas son base de τd. Para demostrar que $\tau d\subseteq\prod_{i=1}^{n}\tau_i$ es suficiente mostrar que toda bola abierta, es un conjunto abierto de $\prod_{i=1}^{n}\tau_i$, sea $a=(a_i)_{i=1}^{n}$ y $r>0$

Sea $B(a,r)=\{x=(x_i)_{i=1}^{n}\quad d(x,a)=\max_{l\in\{1,\dots,n\}}d_l(x_l,a_l)<r\}$

P.D. $B(a,r)=\prod_{i=1}^{n}\tau_i$

Sea $x\in B(a,r)$. P.D Existe U_x un abierto en $\prod_{i=1}^{n}\tau_i$ tal que $x\in U_x\subset B(a,r)$, tomando $s=r-d(x,a)>0$, se tiene que para cada $i\in\{1,\dots,n\}$

$$A_i=B_{d_i}(a_i,s)$$

$\prod_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i=1}^{n} \tau_i$ ya que $\prod_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ cajas

ya que $A_i \in \tau_{d_i} \approx \tau_i$

P.D. $U_x = \prod_{i=1}^{n} A_i \subset B_d(a,r)$

si $y = (y_i)_{i=1}^{n} \in U_x$ si y solo si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ $d_i(x_i, y_i) < s$

P.D. $y \in B_d(a,r)$

$$d_i(y_i, a_i) \leq d_i(y_i, x_i) + d_i(x_i, a_i)$$

$$< s + \max_{\ell \in \{1,\dots,n\}} d_\ell(x_\ell, a_\ell) = s + d(x,a)$$

$$d_i(y_i, a_i) < s + d(x,a) = r - d(x,a) + d(x,a)$$

Ahora, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

$$d_i(y_i, a_i) < r$$

$$\max_{\ell \in \{1,\dots,n\}} d_\ell(y_\ell, a_\ell) < r$$

$$\Rightarrow \quad d(y,a) < r$$

Por lo tanto, $y \in B_d(a,r)$. Y así, hemos demostrado que $\tau_d \subseteq \prod_{i=1}^{n} \tau_i$

Demostración (Ejercicio 3)
Utilizando las ideas del literal 2, es suficiente mostrar que $\{(X_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de espacios métricos. P.D.

$$\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n, \prod_{n \in \mathbb{N}} \tau_{d_n}\right)$$

es metrizable.
Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$, necesito construir una métrica $\tilde{d}_n$ tal que $\tilde{d}_n$ y d_n son topológicamente equivalentes en X_n
• $\tilde{d}_n$ es

$\hat{d}_n = \dfrac{d_n}{1+d_n}$, $\hat{d}_n < 1$ $\quad$ d_n y $\hat{d}_n$ son topológicamente equivalentes (ejercicio)

Es decir $\tau_{\tilde{d}_n} \approx \tau_{d_n}$

Por lo tanto, basta mostrar que $\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i, \prod_{i \in I} \tau_{\tilde{d}_i}\right)$ es metrizable

$x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$

$$d(x,y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tilde{d}_n(x_n, y_n)$$

Note que para todo $x, y \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$

$$d(x,y) < +\infty \qquad \text{En efecto}$$

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tilde{d}_n(x,y) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$$

Es fácil ver que $d(\cdot,\cdot)$ es una métrica en $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ (ejercicio) $\quad$ P.D. $\tau_d \approx \prod_{i \in \mathbb{N}} \tau_{\tilde{d}_i}$

Clase, jueves 22 de 2021
(Ejercicio 8)

P.D. $\prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\tau_d} \subseteq \tau_d$. Para ello vamos a mostrar que $P_j : (\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \tau_d) \longrightarrow (X_j, \tilde{d_j})$ es continua, donde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $P_j(x) = x_j$

$$\begin{aligned}
d_j(P_j(x), P_j(y)) &= \tilde{d_j}(x_j, y_j) \\
&= \frac{2^j}{2^j} d_j(x_j, y_j) \\
&= 2^j \left(\frac{1}{2^j} d_j(x_j, y_j) \right) \\
&\leq 2^j \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} d_j(x_j, y_j) \right) \\
&= 2^j d(x,y) = 2^j \delta = \varepsilon, \quad \delta = \varepsilon/2^j
\end{aligned}$$

Así, p_j es continua de $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \tau_d)$ en (X_j, d_j). Por lo tanto,

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\tau_{d_n}} \subseteq \tau_d$$

Por último, mostremos que $\tau_d \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\tau_d}$

Como las bolas abiertas son una base en τ_d es suficiente mostrar que

$\Rightarrow \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \quad \forall r > 0 \quad B_d(x,r) = \{ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } d(x,y) < r \}$ es un abierto en $\prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\tau_d}$.

Sea $y \in B_d(x,r)$. P.D. Existe $V_y \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\tau_d}$ tal que $y \in V_y \subseteq B_d(x,r)$.

Recordemos que una familia de vecindades de «y» para la topología $\prod_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\tau_{d_n}}$ son conjuntos de la siguiente forma

$V_{y,\varepsilon} = \{ z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall j \in J \ \tilde{d_j}(y_j, z_j) < \varepsilon$ donde $J \subseteq \mathbb{N}$ finito $\}$ $\quad V_{y,\varepsilon} = \bigcap_{j=1}^{n} P_j^{-1}(B_{\tilde{d_j}}(p_j(y), \varepsilon)) \}$

$z \in V_{y,\varepsilon} \qquad$ P.D. $\quad d(z,x) < r$

$$\begin{aligned}
d(z,x) &\leq d(z,y) + d(y,x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tilde{d_n}(z_n, y_n) + d(x,y) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \tilde{d_n}(z_n, y_n) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tilde{d}(z_n, y_n) + d(x,y) \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \tilde{d_n}(z_n, y_n) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + d(x,y) \\
&< \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \varepsilon + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + d(x,y) \\
&< \frac{\varepsilon N}{2} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + d(x,y)
\end{aligned}$$

Con estas ideas, tenemos que como $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/2^n$ converge, entonces

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} 1/2^n < \varepsilon$$

Así, tomando $\varepsilon = \delta = 1/2\,(r - d(x,y))$, tenemos que existe $N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_\delta+1}^{\infty} 1/2^n < \delta$$

Tomando,

$$V_y = \{ z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall i \in \{1,\dots,N_\delta\}\ \tilde{d}_i(z_i, y_i) < \delta/N_\delta \}$$

Es claro que V_y es una vecindad abierta de «y» para la topología producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} \tau_{\tilde{d}_n}$

P.D. $V_y \subseteq B(x,r)$

$z \in V_y$ $\forall i \in \{1,\dots,N_\delta\}$ $\tilde{d}_i(z_i,y_i) < \delta/N_\delta$

$$\begin{aligned}
d(z,x) &\leq d(z,y) + d(y,x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tilde{d}(z_n,y_n)}{2^n} + d(x,y) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{\tilde{d}(z_n,y_n)}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\tilde{d}(z_n,y_n)}{2^n} + d(x,y) \\
&< \left(\frac{\delta}{N_\delta}\right) \sum_{n=1}^{N} 1 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + d(x,y) \\
&< \frac{\delta}{N_\delta} \cdot N_\delta + \delta + d(x,y) = 2\delta + d(x,y) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\left(r - d(x,y)\right)\right) + d(x,y) \\
&= r - d(x,y) + d(x,y) = r.
\end{aligned}$$

Así, $y \in V_y \subset B(x,r)$. Por lo tanto, $B(x,r)$ es abierto en $\prod_{n\in\mathbb{N}} \tau_{\tilde{d}_n}$.

(Ejercicio 4)

Utilizando el ejercicio anterior y sus notaciones faltaría demostrar que $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \tau_d)$ es un espacio métrico completo

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tilde{d}_i(x_i,y_i)$$

Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ de Cauchy. P.D. $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \tau_d)$

$x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1, \dots) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ $\quad \cdots \quad$ $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k, \dots) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$

$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tal que $\forall p,q \geq n_0$ $\quad d(x^p, x^q) < \varepsilon$

$$d(x^p,x^q) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tilde{d}_n(x_n^p, x_n^q) < \varepsilon$$

P.D. Existe $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tal que

$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x en $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \tau_d)$

Que es equivalente a mostrar que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x en $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \prod_{n\in\mathbb{N}} \tau_{\tilde{d}_n})$

En primer lugar, mostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$ fijo, la sucesión

$(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(X_n, \tau_{\tilde{d}_n})$

Como $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall p, q \geq n_0 \quad \sum_{m=1}^{+\infty} 1/2^m \, \tilde{d}_m(x_m^p, x_m^q) < \varepsilon$$

Así, tomando $q, p \geq n_0$, se sigue que

$$\tilde{d}_n(x_n^p, x_n^q) = 2^n\left(\frac{1}{2^n}\tilde{d}_n(x_n^p, x_n^q)\right)$$

$$< 2^n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m}\tilde{d}_m(x_m^p, x_m^q)$$

$$< 2^n \varepsilon$$

Lo que muestra que $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(X_n, \tau_{\tilde{d}_n})$. Como $(X_n, \tau_{\tilde{d}_n})$ es completo, tenemos que existe

$x_n \in X_n$ tal que $\lim_{k\to+\infty} x_n^k = x_n$ en $(X_n, \tau_{\tilde{d}_n})$

Consideremos $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} x_n^k = x_n$$

P.D. $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x en $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \tau_d)$

$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x en $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \prod_{n\in\mathbb{N}} \tau_{\tilde{d}_n})$

Por caracterización de convergencia de sucesiones en la topología producto tenemos que

$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x en $\prod_{n\in\mathbb{N}} \tau_{\tilde{d}_n}$ si y solo si $\forall j \in \mathbb{N}$ $p_j(x^k)$ converge a $p_j(x)$ en (x_j, d_j)

Donde $p_j(x^k) = (x_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $p_j(x) = x_j$

Como por definición de $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, tenemos que $\lim_{k\to\infty} x_j^k = x_j$ en (X_j, τ_{d_j}) y por lo tanto $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x en $\prod_{n\in\mathbb{N}} \tau_{\tilde{d}_n}$

Observación

Consideremos el siguiente detalle: Sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ (X_n, τ_{d_n}) es un espacio métrico completo y además

$$\tilde{d}_n = \frac{d_n}{1+d_n}$$

es topológicamente equivalente a d_n en X. Pero lo que no está claro es que $(X_n, \tau_{\tilde{d}_n})$ sea un espacio métrico completo. Ya que en principio, únicamente existe $\varphi: (X_n, \tau_{d_n}) \to (X_n, \tau_{\tilde{d}_n})$ es un homeomorfismo entre estos dos espacios topológicos. Es decir que (X_n, τ_{d_n}) y $(X_n, \tau_{\tilde{d}_n})$ tienen las propiedades topológicas.

Pero la propiedad de sucesión de Cauchy en τ_{d_n} si y solo si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en en $\tau_{\tilde{d}_n}$) no es una propiedad topológica. Así, que falta mostrar lo siguiente

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(X_n, \tau_{\tilde{d}_n})$ si y solo si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X_n, τ_{d_n})

Demostración

($\Leftarrow$) Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X_n, τ_{d_n}). P.D. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(X_n, \tau_{\tilde{d}_n})$

Esta implicación es automático ya que para todo $x, y \in X_n$

$$\tilde{d}_n(x,y) < d_n(x,y)$$

($\Rightarrow$) Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(X_n, \tau_{\tilde{d}_n})$. P.D. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X_n, τ_{d_n})

Por hipótesis para todo $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\tilde{d}_n(x_p, x_q) < \varepsilon \qquad \forall p,q \geq n_0$$

$$\frac{d_n(x_p,x_q)}{1+d_n(x_p,x_q)} < \varepsilon \qquad \forall p,q \geq n_0$$

$$d_n(x_p,x_q) < \varepsilon(1+d_n(x_p,x_q)) \qquad \forall p,q \geq n_0$$

$$d_n(x_p,x_q) - \varepsilon d_n(x_p,x_q) < \varepsilon \qquad \forall p,q \geq n_0$$

$$\Rightarrow d_n(x_p,x_q)(1-\varepsilon) < \varepsilon \qquad \forall p,q \geq n_0$$

$$\Rightarrow d_n(x_p,x_q) < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \qquad \forall p,q \geq n_0$$

Así, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X_n, τ_{d_n}).

Capítulo 4: Topología Cociente

Proposición 4.1. Sean (X,τ_X) un espacio topológico y Y un conjunto no vacío. Además consideremos una función sobreyectiva $q:(X,\tau_X)\to Y$. Denotamos τ_q la siguiente familia de conjuntos

$$\tau_q : \{U\subset Y : q^{-1}(U)\in\tau_X\}.$$

Entonces τ_q es una topología sobre Y y además τ_q es la topología más grande definida sobre Y que hace continua a la función q.

Demostración. Se tiene que $Y\in\tau_q$, ya que

$$q^{-1}(Y) = X\in\tau_X.$$

Así mismo, tenemos que $\emptyset\in\tau_q$, pues $q^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\tau_X$.

P.D. τ_q es estable por uniones arbitrarias.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de τ_q. P.D. $\bigcup_{i\in I} U_i\in\tau_q$.

Como para todo $i\in I$, $U_i\in\tau_q$, se tiene que

$$q^{-1}(U_i)\in\tau_X$$

y así, como

$$q^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} q^{-1}(U_i)\in\tau_X$$

ya que $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de τ_X.

P.D. Es estable por intersecciones finitas

Sea $\{U_i\}_{i=1}^{n} \in \tau_q$. P.D. $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau_q$

$$q^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} q^{-1}(U_i) \in \tau_X$$

pues $\{q^{-1}(U_i)\}_{i=1}^{n}$ es una familia finita de elementos de τ_X y por lo tanto

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau_q$$

P.D. Es la topología más fina sobre Y que hace continua la función q.

Consideremos τ_Y una topología definida sobre Y tal que

$$q:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$$

es continua. P.D. $\tau_Y \subseteq \tau_q$.

Sea $U \in \tau_Y$, como q es continua de (X,τ_X) en (Y,τ_Y), tenemos que $q^{-1}(U) \in \tau_X$. Así, tenemos que $U \in \tau_q$ por definición y por lo tanto $\tau_Y \subseteq \tau_q$.

Observación

- Si $q:(X,\tau_X) \to Y$ no es sobreyectiva entonces τ_q es una topología sobre $Im(q) \subseteq Y$.
- Tener en cuenta las diferencias entre la topología más pequeña que deja continua una aplicación $q: X \to (Y,\tau_Y)$

$$\tilde{\tau}_q = \{ U \in X : U = q^{-1}(W) \quad W \in \tau_Y \}.$$

$q:(X,\tilde{\tau}_q) \to (Y,\tau_Y)$ es continua y además $\tilde{\tau}_q$ es la topología más pequeña que deja continua la función q.

- La topología más fina que deja continua

$$q:(X,\tau_X) \to Y$$

con $\tau_q = \{ U \subseteq Y : q^{-1}(U) \in \tau_X$ de (X,τ_X) en $(Y,\tau_q)\}$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{g}:(Y,\tau_q) \arrow[r, "\tilde{g}"] & (Z,\tau_Z) \\
(X,\tau_X) \arrow[u, "q"] \arrow[ur, "\tilde{g}\circ q"'] &
\end{tikzcd}$$

¿ g es continua si y solo si $\tilde{g} \circ q$?

$(\Rightarrow)$ Si $\tilde{g}$ es continua, puesto que q es continua, entonces $\tilde{g} \circ q$ también es continua

$(\Leftarrow)$ Como $\tilde{g} \circ q$ es continua, entonces

$$\forall U_Z \in \tau_Z \qquad (\tilde{g}\circ q)^{-1}(U_Z) \in \tau_X$$

$$q^{-1}\left(\tilde{g}^{-1}(U_Z)\right) \in \tau_X$$

Sea $U_Z \in \tau_Z$. P.D. $g^{-1}(U_Z) \in \tau_q$; es decir que $q^{-1}(g^{-1}(U_Z)) \in \tau_X$

$$(\tilde{g} \circ q)^{-1}(U_Z) \in \tau_X$$

y esto es verdad por nuestra hipótesis que dice $\tilde{g} \circ q$ es continua.

Proposición 4.2. Consideremos las notaciones anteriores. Definimos $\tilde{g}:(Y,\tau_q)\to(Z,\tau_Z)$ donde (Z,τ_Z) es un espacio topológico, entonces

$\tilde{g}$ es continua si y solo si $\tilde{g}\circ q$ es continua de (X,τ_X) en (Z,τ_Z).

Demostración: Observación anterior

Definición 4.3 Sea (X,τ_X) un espacio topológico y Y un conjunto no vacío. Además, consideramos

$$q:(X,\tau_X)\longrightarrow Y$$

Entonces la topología τ_q definida en la (proposición 4.1) sobre Y es llamada la topología cociente inducida en Y por q. La función q también es llamada función cociente

Ejemplo: $X=[0,1]$, $\tau_X=\tau_{|\cdot|}$ $\quad Y=S^1=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$

$$\begin{aligned} q:(X,y)&\longrightarrow Y\\ t&\longmapsto q(t)=e^{2\pi i t}\in S^1\end{aligned}$$

Entonces, (S^1,τ_q) es un espacio topológico cociente. Además, se puede mostrar que τ_q coincide con la topología usual $\tau_{|\cdot|}$ en S^1.

Esta primera definición de espacio cociente y topología cociente es equivalente a la siguiente definición.

Sea X un conjunto no vacío sobre el cual definimos una relación de equivalencia $\sim$ y además, sus clases de equivalencia

$$\forall x\in X \qquad [x]=\{y\in X: y\sim x\}$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia es el espacio cociente (cocientado por la relación $\sim$) y es notado $X/\sim$. Se tiene la proyección

$$\begin{aligned}\pi: X&\longrightarrow X/\sim\\ x&\longmapsto [x]\end{aligned}$$

la cual es sobreyectiva.

Si además X tiene una estructura topológica, entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\pi:(X,\tau_X)&\longrightarrow X/\sim\\ x&\longmapsto \pi(x)=x\end{aligned}$$

con π sobreyectiva. Utilizando la (proposición 4.1), podemos dar una estructura topológica a $X/\sim$ de la siguiente forma

$$\tau_{/\sim}=\{U\subset X/\sim: \pi^{-1}(U)\in\tau_X\}$$

$\tau_{/\sim}$ es una topología sobre $X/\sim$ que además es la topología más grande definida sobre $X/\sim$ que hace continua la proyección canónica π.

La topología $\tau_{/\sim}$ es conocida como la topología cociente en un espacio cociente.

Observaciones

- Nuestra segunda definición de topología cociente, es un caso particular de la primera. En efecto,

$$q:(X,\tau_X)\to Y=X/\sim$$

En efecto,

$$(X, \tau_X) \qquad Y = X/\sim$$
$$q = \pi \qquad \text{sobreyectiva}$$
$$(Y, \tau_q) = (X/\sim, \tau_{X/\sim})$$

- Como de nuestra segunda definición, llegamos a la primera definición de topología cociente.

$q:(X,\tau_X) \to Y$ sobreyectiva y (X,τ_X)

$$(Y,\tau_q) = (X/\sim, \tau_{X/\sim})$$

para alguna relación de equivalencia en X. Tengamos en cuenta que q es sobreyectiva. Definamos $\sim_q$ en X de la siguiente forma

$x, y \in X \qquad x \underset{q}{\sim} y \qquad \text{si} \qquad q(x) = q(y)$

$\sim_q$ es: reflexiva, simétrica y transitiva.

$X/\sim_q = \{[x] : x \in X\}$ donde $[x] = \{y \in X : x \sim y \Leftrightarrow q(x) = q(y)\}$

$$\pi_q : (X, \tau_X) \longrightarrow (X/\underset{q}{\sim}, \tau_{X/\underset{q}{\sim}})$$

$$\tau_{X/\underset{q}{\sim}} = \{U \subseteq X/\underset{q}{\sim} : \pi_q^{-1}(U) \in \tau_X\}$$

Entonces, $(X/\underset{q}{\sim}, \tau_{X/\underset{q}{\sim}}) \approx (Y, \tau_q)$.

Proposición 4.5. Sea (X,τ_X) un espacio topológico y Y un espacio cocientado por X por $q:(X,\tau_X) \to Y$, entonces $F \subset Y$ es cerrado en τ_q si y solo si $q^{-1}(F)$ es cerrado en τ_X.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si F es cerrado en τ_q se tiene que $q^{-1}(F)$ es cerrado en τ_X ya que q es continuo.

($\Leftarrow$) Sea $F \subseteq Y$ tal que $q^{-1}(F)$ es cerrado en τ_X. P.D. F es cerrado en τ_q, es decir $F^c \in \tau_q$

$q^{-1}(F^c) = q^{-1}(F)^c \in \tau_X$ ya que por hipótesis $q^{-1}(F)$ es cerrado en τ_X. Así, $F^c \in \tau_q$

Por lo tanto, F es cerrado en τ_q.

Jueves, 29 de julio de 2021.

Espacio cociente y topología cociente

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\}$$

Además, las clases de equivalencia $\{[x]\}_{x \in X}$ forman una partición de X. Sobre $X/\sim$ definimos

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

sobreyectiva.

$$\tau/\sim = \{U \subseteq X/\sim : \pi^{-1}(U) \in \tau_X\}$$

donde τ_X es una topología sobre X.

$\tau_{X/\sim}$ es la topología más grande definida en $X/\sim$ tal que deja continua la proyección canónica.

Definición 4.6 Sea $f: X \to Y$ una función de X en Y. Decimos que f es compatible con la relación de equivalencia $\sim$ definida en X si

$(\forall x, y \in X)$ tal que $(x \sim y)$ entonces $(f(x) = f(y))$ en Y.

Con esto, podemos definir una función de $X/\sim$ en Y de la siguiente forma:
Como π es sobreyectiva y f compatible

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\bar{f} = \bar{f}([x]) = f(x)"'] & \end{tikzcd}$$

Como $\bar{f}$ está definida en un espacio cociente tenemos que mostrar que está «bien definida» Es decir, que si cambio de representantes, la clase de equivalencia de su imagen a partir de $\bar{f}$ no se altera.

Si $x \sim x'$ $\bar{f}([x]) = \bar{f}([x'])$; esto se tiene ya que f es compatible con la relación $\sim$.

Ejemplo $X = \mathbb{R}$, definimos la siguiente relación de equivalencia

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x \sim y$ ssi $x - y = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$[x] = \{ x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$

$Y = \mathbb{R}^2$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto ((\cos(x), \operatorname{sen}(x))$$

Para poder definir
$$\bar{f}: \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{R}^2$$
$$[x] \to \bar{f}([x]) = f(x)$$

tenemos que mostrar que f es compatible con $\sim$. Sea $x, x' \in \mathbb{R}$ tal que $x \sim x'$.
P.D. $f(x) = f(x')$

Como $x \sim x'$, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$x - x' = 2k\pi$$
$$x = 2k\pi + x'$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (\cos(x), \operatorname{sen}(x)) \\ &= (\cos(x - 2k\pi), \operatorname{sen}(x - 2k\pi)) \\ &= (\cos(x'), \operatorname{sen}(x')) \\ &= f(x') \end{aligned}$$

y así, $f(x) = f(x')$. Así, podemos definir sin ningún problema. $\bar{f}$

Ejemplos.
Sean $X = [0,1] \times [0,1]$ $\sim_1$ $(x, y) \sim (x', y')$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones

1) $(x, y) = (x', y')$ 2) $y = y'$ y $|x - x'| = 1$

Es claro que $\sim_1$ es reflexiva. P.D. Es simétrica.
Si la condición (1) se verifica, entonces automáticamente $\sim_1$ es simétrica y si la condición (2) se verifica, entonces

$$y = y' \Leftrightarrow y' = y \quad \text{y} \quad |x - x'| = 1 \Leftrightarrow |x' - x| = 1$$

Por lo tanto, $(x', y') \sim (x, y)$. P.D. $\sim_1$ es transitiva

$$(x,y) \sim (x', y') \quad y \quad (x', y') \sim (\hat{x}, \hat{y})$$

P.D. $(x,y) \sim (\hat{x}, \hat{y})$.

Supongamos que $(x,y) \sim (x', y')$ está relacionado con (1) y $(x', y') \sim (\hat{x}, \hat{y})$ con (2)

Como $x = x'$ y $y = y'$ tenemos que

$$y = \hat{y} \quad y \quad |\hat{x} - x| = 1$$

Si $\quad y = y' \quad y \quad |x - x'| = 1 \qquad$ P.D. $(x,y) \sim (\hat{x}, \hat{y})$

$\quad\quad y' = \hat{y} \quad y \quad |\hat{x} - x'| = 1$

$y = \hat{y} \quad |x - x'| = 1 \quad y \quad |x' - \hat{x}| = 1$

En primer lugar, note que si $x \in [0,1]$ y $x' \in [0,1]$, entonces $(x = 1$ y $x' = 0) \lor (x = 0$ y $x' = 1)$

En efecto, si $x \in]0,1[$, y $x' \in]0,1[$, entonces

$$|x - x'| = 1$$

si $x < x'$

$$0 < x < x' < 1 \Rightarrow x' - x < 1 - x < 1 \Rightarrow |x' - x| < 1$$

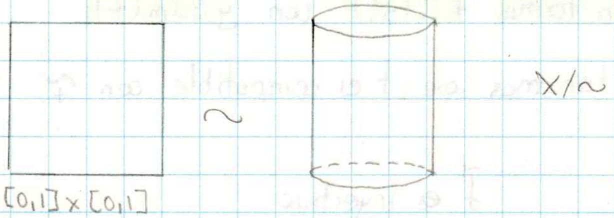
Así, se tiene lo que queríamos demostrar

$|x' - x| = 1 \quad y \quad |x' - \hat{x}| = 1$

$x' = 1$ y $x = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0 \qquad \hat{x} = x$

$x' = 0$ y $x = 1 \Rightarrow \hat{x} \qquad \hat{x} = x$

Así, $(x,y) \sim (\hat{x}, \hat{y})$ a partir de la relación (1)



(Ejemplo 2) $[0,1] \times [0,1] \sim_2$ $(x,y) \sim (x', y')$ si se verifica alguna de las siguientes condiciones

(1) $(x,y) \sim (x', y')$

(2) $y + y' = 1 \quad \max\{x, x'\} = 1 \quad y \quad \min\{x, x'\} = 0$

Con esta relación de equivalencia sobre X se puede construir el $X/\sim_2$ que es la banda de Moebius.

(Ejemplo 3) $X = [0,1] \times [0,1]$

$(x,y) \sim_3 (x', y')$ si verifica las siguientes condiciones

1) $(x,y) \sim (x', y')$

2) $y + y' = 1$, $\min\{x, x'\} = 0$ y $\max\{x, x'\} = 1$

3) $x = x'$, $\min\{y, y'\} = 0$ y $\max\{y, y'\} = 1$

El espacio $X/\sim_3$ es conocido como la botella de Klein.

Proposición 4.7. Toda relación de equivalencia induce una partición del conjunto. Recíprocamente toda partición del conjunto induce una relación de equivalencia.

Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una partición de X
P.D. Existe $\sim$ una relación de equivalencia en X tal que $\{[x]\}_{x\in X} = \{C_i\}_{i\in I}$
Consideremos $x\sim y$ si existe $j\in I$ tal que x y $y\in C_j$

$x\sim y$., en efecto ya que $X=\bigcup_{i\in I} C_i$. Así, existe $j\in I$ tal que $x\in C_j$

$x\sim y \Leftrightarrow y\sim x$ fácil

$x\sim y$, $y\sim z$. P.D. $x\sim z$
Note que si $C_i\cap C_j\neq\emptyset \Rightarrow C_i=C_j$. Así

si $x\sim y$ si existe $k\in I$ tal que $x,y\in C_k$
si $y\sim z$ si existe $j\in I$ tal que $y,z\in C_j$

Como $y\in C_k$ y $y\in C_j$, tenemos que $C_j=C_k$. Así $x,z\in C_k$. Por lo tanto $x\sim z$.

$$\{[x]\}_{x\in X}=\{C_i\}_{i\in I}$$

Sea $[x]=\{y\in X: y\sim x\}$ P.D. Existe $j\in I$ tal que $[x]=C_j$

$x\in X$, existe $j\in I$ tal que $x\in C_j$ P.D. $[x]=C_j$

Si $y\in[x] \Rightarrow$ Existe $k\in I$ tal que $x,y\in C_k$ Como $x\in C_j$ y $x\in C_k\Rightarrow C_j=C_k$
Así, $y\in C_j$.
Si $z\in C_j$, tenemos que $x,z\in C_j$. Por lo tanto, $x\sim z \Leftrightarrow z\in[x]$.

Definición 4.8 Sea $f: X\to Y$ una función de X en Y. Sobre X definimos la siguiente relación de equivalencia

$$x \underset{f}{\sim} y \quad \text{si} \quad f(x)=f(y)$$

Los fibrados de f son los conjuntos de la forma $f^{-1}(\{y\})$ con $y\in \mathrm{Im}(f)$

Observación: Sobre esta última definición tenemos que f es compatible con $\underset{f}{\sim}$ trivialmente

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X/\underset{f}{\sim} \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ es inyectivo
si f es sobreyectivo $\bar{f}$ es una biyección

Proposición 4.9 Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) dos espacios topológicos. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en X y $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ una función compatible con $\sim$, tenemos que

1) f es continua si y solo si $\bar{f}$ es continua
2) si f es abierta, entonces $\bar{f}$ es abierta
3) si f es cerrada, entonces $\bar{f}$ es cerrada

Demostración:

Espacio cociente

$$\begin{tikzcd} (X,\tau_X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & (Y,\tau_Y) \\ (X/\sim, \tau/\sim) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Deseamos mostrar que $\bar{f}$ es continua si y solo si f es continua.
Supongamos que $\bar{f}$ es continua. P.D f es continua

Notemos que $f=\bar{f}\circ\pi$

Clase - viernes 30 de julio de 2021

$$f(x) = \bar{f}(\pi(x)) = \bar{f}([x]) = f(x)$$

Así, al ser la composición de dos funciones continuas $(\bar{f}\pi)$ tenemos que f es continua

($\Leftarrow$) Supongamos que f es continua. P.D. $\bar{f}$ es continua
Sea U un abierto en τ_Y. P.D. $\bar{f}^{-1}(U)$ es abierto en $\tau/\sim$.
Por definición de $\tau_{X/\sim}$. P.D. $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(U))$ es abierto en τ_X

$$(\bar{f} \circ \pi)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$$

Como f es continua por hipótesis, tenemos que

$$(\bar{f} \circ \pi)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \in \tau_X.$$

Así, $\bar{f}^{-1}(U) \in \tau_{X/\sim}$.

(Parte 2)
($\Rightarrow$) Supongamos que f es abierto. P.D. $\bar{f}$ es abierta.
Sea $U \in \tau_{X/\sim}$, como π^{-1} es continua, entonces

$$\pi^{-1}(U) \in \tau_X$$

y, puesto que f es abierta

$$f(\pi^{-1}(U)) \in \tau_Y$$

Como $\bar{f}(U) = \overbrace{f(\pi^{-1}(U))}^{*}$, se tiene que al ser π continua y f abierto, tenemos que $\bar{f}(U) \in \tau_Y$
(Demostración $*$)
($\subseteq$) Sea $[x] \in U \subset X/\sim$, como f es compatible con $\sim$

$$\bar{f}([x]) = f(x) \qquad \text{como} \quad x \in \pi^{-1}\{[x]\}$$

tenemos que $\bar{f}([x]) \in f(\pi^{-1}(U))$.
($\supseteq$) Sea $x \in \pi^{-1}(U)$, entonces $\pi(x) = [x] \in U$

$$f(x) = \bar{f}([x]).$$

Como $[x] \in U$, se tiene que

$$f(x) \in \bar{f}([U]).$$

(Parte 3) Análogo, tomando complementos.

Definición 4.10
Sea X un conjunto no vacío provisto de una relación de equivalencia $\sim$. Sea $A \subseteq X$, el conjunto saturado de A es la unión de todas las clases de equivalencia de elementos de A

$$Sa(A) = \bigcup_{x \in A} [x] \subseteq X$$

Observación
El conjunto saturado de A se puede ver de la siguiente forma

$$Sa(A) = \pi^{-1}(\pi(A)).$$

con: $\pi : X \longrightarrow X/\sim$
$\quad x \longmapsto \pi(x) = [x]$

2) La definición del conjunto saturado nos permite saber cuando la proyección canónica es abierta o cerrada. Para explicar más en detalle esta observación, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.11.
Sea (X, τ_X) un espacio topológico sobre el cual se define una relación de equivalencia, entonces tenemos lo siguiente:

- $\pi:(X, \tau_X) \to (X/\sim, \tau_{X/\sim})$ es abierta si y solo si $Sa(A)$ es abierto para todo $A \in \tau_X$
- $\pi:(X, \tau_X) \to (X/\sim, \tau_{X/\sim})$ es cerrada si y solo si $Sa(B)$ es cerrado para todo $B \in \tau_X$

Demostración
$(\Rightarrow)$ Supongamos que π es abierta. P.D. $\forall A \in \tau_X$ $Sa \in \tau_X$
Como $Sa = \pi^{-1}(\pi(A))$, tenemos que al ser π abierta $\pi(A)$ es abierto en $\tau_{X/\sim}$, por continuidad de π, tenemos que

$$\pi^{-1}(\pi(A)) \in \tau_X$$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $Sa(A) \in \tau_X$. P.D. π es una aplicación abierta.
Sea $A \in \tau_X$, P.D $\pi(A) \in \tau_{X/\sim}$. $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(\pi(A)) \in \tau_X$
Por hipótesis, tenemos que

$$Sa(A) = \pi^{-1}(\pi(A)) \in \tau_X$$

Por tanto, $\pi(A) \in \tau_{X/\sim}$.

* Para el caso de cerrados la demostración es análoga.

Capítulo 5: Axiomas de separación.

Definición 5.1. Sea (X, τ_X) un espacio topológico no vacío. Diremos que X satisface el axioma de separación Q_0 si para cualesquier par de elementos distintos x y y es posible encontrar un abierto que a «x» y no a «y» o bien contenga a «y» y no a «x»

En otras palabras X es Q_0 si

$$\forall x, y \quad (x \neq y) \quad \exists\, U \in \tau_X \text{ tal que } \quad Card(U \cap \{x, y\}) = 1$$

Ejemplos
- $X = \mathbb{R}$, $\tau_X = \tau_{indis}$ (X, τ_X) es un espacio topológico que no es Q_0
- $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid 1 \in U\} \cup \{\emptyset\}$ (X, τ_X) si es Q_0, en efecto, si $x \neq y$, tomando $U = \{1, x\}$, entonces $x \in U \in \tau_X$ y además $y \notin U$
- Si (X, τ_X) es un espacio de Hausdorff entonces es Q_0

Definición 5.2. Sea (X, τ_X) un espacio topológico no vacío, diremos que X admite el axioma de separación Q_1 si para cualquier par de elementos de X, x, y distintos, existen vecindades U_x y U_y de x y y respectivamente, tales que

$$y \notin U_x \quad y \quad x \notin U_y$$

Ejemplos
- Un espacio topológico indiscreto no es Q_1
- Un espacio de Hausdorff es Q_1
- $X = \mathbb{R}$ $\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : 1 \in U\} \cup \{\emptyset\}$ (X, τ) es Q_2

Supongamos que (X, τ_X) es un espacio topológico tal que todo singletón es cerrado $(\{x\})$

① ¿ (X, τ_X) $\Rightarrow$ X es Q_0? ② ¿ (X, τ_X) $\Rightarrow$ X es Q_1?

③ X es Q_0 $\Rightarrow$ $\{x\}$ es cerrado ④ X es Q_1 $\Rightarrow$ $\{x\}$ es cerrado.

③ Falso. Consideremos $(\mathbb{R}, \tau)$ con $\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid 1 \in U\} \cup \{\emptyset\}$ $\{1\} \in \tau_X$ es abierto y $\{1\}$ no es cerrado ya que $\{1\}^c = \mathbb{R} \setminus \{1\} \notin \tau_X$

① Sea (X, τ_X) tal que $\{x\}$ es cerrado en τ_X $\forall x \in X$. P.D. X es Q_0.
Sea $x \neq y$, P.D. Existe $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Como $\{y\}$ es cerrado, $\{y\}^c$ es abierto en τ_X, tomando

$$U = \{y\}^c$$

tenemos que $x \in U$ y $y \notin U$

② $x \neq y$, existe $U_x = \{y\}^c$ y $U_y = \{x\}^c$, entonces $x \in U_x$ y $y \notin U_x$, $y \in U_y$ y $x \notin U_y$

Proposición 5.3. Sea (X, τ_X) un espacio topológico, entonces X admite el axioma de separación Q_1 si y solo si para todo $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado.

Demostración:
$\Rightarrow$ Supongamos que X es Q_1. P.D $\forall x \in X$ $\{x\}$ es cerrado.
Sea $x \in \{x\}$. P.D. $\{x\}^c$ es abierto.
Sea $y \in \{x\}^c$. P.D. Existe $U_y \in \tau_X$: $y \in U_y \subset \{x\}^c$

Como $y \in \{x\}^c$ $y \neq x$. Como (X, τ_X) es Q_1, existe U_x y $U_y \in \tau_X$ tales que

$$x \in U_x \text{ y } y \notin U_x \quad \text{y} \quad y \in U_y \text{ y } x \notin U_y$$

Como $x \notin U_y$ tenemos que $y \in U_y \subset \{x\}^c$. Así, $\{x\}^c$ es abierto.

Observación
Si (X, τ_X) es un espacio topológico que admite el axioma de separación Q_1, tenemos que X es Q_0.

Definición 5.4 Sea (X, τ_X) un espacio topológico, diremos que X admite el axioma de separación Q_2 si X es de Hausdorff

Proposición 5.5 Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Si (X, τ_X) es Q_2 entonces es Q_1.

Observación La recíproca es falsa

Demostración (5.5)
Si X es Q_2 entonces para todo $x, y \in X$ $x \neq y$, existen $U_x \in \tau_X$ y $U_y \in \tau_X$ tal que

$$x \in U_x \text{ y } y \in U_y \quad \text{con} \quad U_x \cap U_y = \emptyset$$

Así, $x \notin U_y$ y $y \notin U_x$.

Clase • martes 3 de agosto de 2021

Observación.
Si (X, τ_X) es un espacio topológico con el axioma de separación Q_1 esto no implica que (X, τ_X) admita la propiedad Q_2 (Hausdorff)

Ejemplo.
Sea (X, τ_X) un espacio topológico con X un conjunto infinito y τ es la topología cofinita

$\tau := \{A \subseteq X : A^c$ es finito$\} \cup \{\emptyset\}$, entonces (X, τ) admite el axioma de separación Q_1 ya que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado pues $\{x\}^c$ es abierto en τ.

Por lo tanto (X, τ) es Q_1 pero (X, τ) no admite el axioma de separación Q_2. En efecto, supongamos que para todo x, y con $x \neq y \in X$, existe $U_x \in \tau_x$ y $U_y \in \tau_x$ tal que

$$x \in U_x \quad y \quad y \in U_y$$

$$U_x \cap U_y = \emptyset$$

Entonces, como $U_x, U_y \in \tau$ se tiene que U_x^c y U_y^c son conjuntos finitos. Además $U_y \subseteq U_x^c$ y $U_x \subseteq U_y^c$. Así, U_x y U_y son conjuntos finitos. Por lo tanto

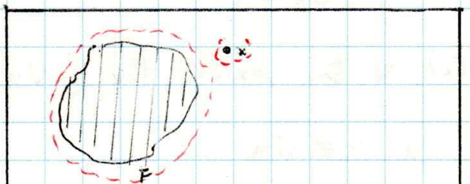
$$X = U_y \cup U_y^c$$

sería la unión de conjuntos finitos, lo que implica que X es finito. Pero esto es absurdo por nuestra hipótesis.

Definición 5.6.
Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Se dice que X admite el axioma de separación Q_3 si para cualquier cerrado $F \subset X$ y cualquier $x \in F^c$ existen dos abiertos U_F y U_x tal que

$$x \in U_x \quad y \quad F \subseteq U_F$$

$$U_x \cap U_F = \emptyset$$



Observación
① ¿Si (X, τ_X) es $Q_3 \Rightarrow Q_1$?
② ¿Si (X, τ_X) es $Q_3 \Rightarrow Q_2$?
③ ¿$Q_2 \Rightarrow Q_3$?
④ ¿$Q_2 \Rightarrow Q_3$?

Las preguntas anteriores son falsas.
Deber: Dar los contraejemplos.

Observación
- Existen espacios topológicos con el axioma Q_3 que no implican que el singleton $\{x\}$ sean cerrados. Así, Q_3 no implica ni Q_1 ni Q_2.

- Si (X, τ_X) es Q_3 y Q_1 entonces es Q_2 (Hausdorff)

- Si (X, τ_X) es Q_2 entonces es Q_1 pero no necesariamente Q_3.

Definición 5.7
Sea (X, τ_X) un espacio topológico, decimos que (X, τ_X) es un espacio topológico regular si (X, τ_X) admite los axiomas de separación Q_1 y Q_3

Observación
- Un espacio topológico regular es un espacio de Hausdorff. En efecto, como (X, τ_X) es T_1 se tiene que para todo $x \in X$ $\{x\}$ es cerrado y además, usando el axioma de separación Q_3 tenemos que tomando $F = \{x\}$ cerrado y $y \neq x$ se tiene que, existen U_F y $U_y \in \tau_X$ tales que

$$x \in U_F \quad y \quad y \in U_y \qquad U_F \cap U = \emptyset$$

Proposición 5.8
Sea (X,τ_X) un espacio topológico con el axioma de separación Q_3 y $Y\subset X$, entonces (Y,τ_Y) es Q_3.

Demostración:
Supongamos que para todo $F\subset X$ cerrado y para todo $x\in F^c$, existe $U_F\in\tau$ y $V_x\in\tau$ tales que

$$F\subseteq U_F \quad y \quad x\in U_x \quad y \quad U_F\cap U_x=\emptyset$$

P.D (Y,τ_Y) es Q_3.
Sea $F\subset Y$ cerrado en τ_Y y $y\notin F$ y $y\in Y$. P.D. Existe U_F y $V_y\in\tau_y$ tal que

$$F\subseteq U_F \quad y \quad y\in U_y \quad y \quad U_F\cap U_y=\emptyset$$

Sea $F\subset Y$ cerrado en τ_Y es decir

$$F=Y\cap E \quad \text{donde } E \text{ es cerrado en } \tau$$
$$y\notin F \quad y \quad y\in Y$$

Por lo tanto, $y\notin E$. Como (X,τ) es Q_3, entonces existe $U_E\in\tau$ y $\tilde{U}_y\in\tau$ tales que

$$E\subseteq U_E, \quad y\in\tilde{U}_y \quad \text{tal que} \quad U_E\cap\tilde{U}_y=\emptyset$$

Tomando $U_F=Y\cap U_E$ y $U_y=Y\cap\tilde{U}_y$ tenemos que $U_F\in\tau_y$ y $U_y\in\tau_y$

$$F=Y\cap E\subseteq Y\cap U_E=U_F. \qquad y\in U_y$$

$$F\subseteq U_F.$$

P.D. $U_F\cap U_y=\emptyset$. Notemos que

$$(Y\cap U_E)\cap(Y\cap\tilde{U}_y)=Y\cap(U_E\cap\tilde{U}_y)=Y\cap\emptyset=\emptyset$$

Proposición 5.9. Sea $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos Q_3, entonces $(\prod_{i\in I}X_i,\prod_{i\in I}\tau_i)$ es Q_3.

Demostración: Sea $F\subseteq\prod_{i\in I}X_i$ cerrado y en $\prod_{i\in I}\tau_i$ y consideramos $x=(x_i)_{i\in I}\in F$. Como F^c es abierto, existe

$$x\in Cyl(W_{i1},\dots,W_{in})\subseteq F^c \qquad \text{con } W=Cyl(W_{i1},\dots,W_{in})$$

Como para todo $i\in I$, (X_i,τ_i) es Q_3, se tiene que en particular, para todo $j\in\{1,\dots,n\}$ en particular para todo $j\in\{1,\dots,n\}$ (X_{ij},τ_{ij}) es Q_3. Es decir que existen $U_{x_{ij}}$ y $V_{x_{ij}}$ tales que

$$x_{ij}\in U_{ij} \quad y \quad W_{ij}^c\subseteq V_{x_{ij}} \qquad \text{para cada } j\in\{1,\dots,n\}$$

Definimos $U=Cyl(U_{x_{i1}},\dots,U_{x_{in}})\in\prod_{i\in I}\tau_i$ y $V=\bigcup_{j=1}^{n}Cyl(V_{x_{ij}})$. Tenemos que $x=(x_i)_{i\in I}\in U$ y además

$$F\subset W^c\subset V.$$

Por último, mostremos que

$$U\cap V=\emptyset$$

P.D. $F\subset V$. Supongamos que $F\not\subset\bigcup_{j=1}^{n}Cyl(V_{x_{ij}})$

Es decir que, existe $y=(y_i)_{i\in I}\in F$ tal que

$$y\notin\left(\bigcup_{j=1}^{n} Cyl(V_{x_{ij}})\right)$$

entonces, para todo $j\in\{1,\dots,n\}$ $\quad y_{ij}\notin V_{x_{ij}}$ $\quad W_{ij}^{c}\subseteq V_{x_{ij}}$ y

para todo $j\notin\{1,\dots,n\}$ $\quad y_{ij}\in W_{ij}$

$$y\in Cyl(W_{i_1},\dots,W_{i_n})\subseteq F^{c}$$

$$y\in F \quad y \quad y\in F^{c}$$

Y ultilizando un argumento similar se puede mostrar que

$$\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$$

Observación.
Los axiomas de separación Q_0, Q_1, Q_2 tambien se mantienen en la topología inducida en un subconjunto y en el espacio producto con la topología producto.

¿ Si $(X_i)_{i\in I}$ e.t. con Q_3 $\quad (\prod_{i\in I}X_i,\tau_{caj})$ es Q_3?

F cerrado en τ_{cajas} y $x\in F^{c}$, entonces existe $\prod_{i\in I}B_i^{x}$ tal que $x\in\prod_{i\in I}B_i^{x}\subset F^{c}$

$\forall i\in I$ $\quad B_i^{x}\in\tau_i$. Como $\forall i\in I$ $\quad \tau_i$ es Q_3, tenemos que existen $\mathcal{U}_i^{x}$ y $\mathcal{V}_i^{x}$ tales que

$$x_i\in\mathcal{V}_i^{x} \quad y \quad (B_i^{x})^{c}\subseteq\mathcal{V}_i^{x}$$

$$\mathcal{U}_i^{x}\cap\mathcal{V}_i^{x}=\emptyset$$

$$U=\prod_{i\in I}\mathcal{U}_i^{x}\in\tau_{caj}$$

Axiomas de separación.

Clase • jueves 5 de agosto de 2021

Corolario 5.10.
El producto arbitrario de espacios regulares es regular.

Teorema 5.11
Sea (X,τ_X) un espacio topológico no vacío. X admite la propiedad Q_3 si y solo si para cada punto $x\in X$ y cada abierto $W\in\tau_X$ tal que $x\in W$, entonces existe un abierto U tal que

$$x\in U\subseteq\overline{U}\subseteq W$$

Demostración:
Supongamos que (X,τ_X) en Q_3. P.D $\forall x\in X$ y $\forall W\in\tau_X : x\in W$ $\exists\mathcal{U}\in\tau_X$ tq $x\in\mathcal{U}\subset\overline{\mathcal{U}}\subset W$

Sea $x\in W$ y $W\in\tau_X$, Así, W^{c} es cerrado y $x\notin W^{c}$ por lo tanto como (X,τ) es Q_3, existen $\mathcal{U}_{W^c}\in\tau_X$ y $\mathcal{V}_x\in\tau_X$ tales que

$$W^{c}\subset\mathcal{U}_{W^c}, \quad x\in\mathcal{V}_x \quad y \quad \mathcal{U}_{W^c}\cap\mathcal{V}_x=\emptyset$$

Por lo tanto, $\mathcal{U}_{W^c}\subseteq\mathcal{V}_x^{c}$, entonces como $\mathcal{V}_x$ es abierto, entonces $\mathcal{V}_x^{c}$ es cerrado y por lo tanto $\overline{\mathcal{U}_{W^c}}\subseteq\mathcal{V}_x^{c}$. De la misma manera, se tiene que $\overline{\mathcal{V}_x}\subseteq\mathcal{U}_{W^c}^{c}$. Como $W^{c}\subseteq\mathcal{U}_{W^c}$, se tiene que

$$(\mathcal{U}_{W^c})^{c}\subseteq W.$$

Es decir que,

$$x \in \mathcal{V}_x \subseteq \overline{\mathcal{V}_x} \subseteq (\mathcal{U}_{W^c})^c \subseteq W \quad \Rightarrow \quad x \in \mathcal{V}_x \subseteq \overline{\mathcal{V}_x} \subseteq W,$$

lo que se quería demostrar.

($\Leftarrow$) Supongamos que para todo $x \in X$ y para todo $W \in \tau_X$ tal que $x \in W$, existe $\mathcal{U} \in \tau_X$ tal que $x \in \mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}} \subseteq W$.

Sea F un conjunto cerrado no vacío y $x \notin F$, P.D. Existe $\mathcal{U}_F$ y $\mathcal{V}_x \in \tau_X$ tales que $F \subseteq \mathcal{U}_F$, $x \in \mathcal{V}_x$ y $\mathcal{U}_F \cap \mathcal{V}_x = \emptyset$.

Como F^c es abierto y $x \in F^c$, por hipótesis, tenemos que existe $\mathcal{U} \in \tau_X$ tal que

$$x \in \mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}} \subseteq F^c$$

Consideramos $\mathcal{U}_F = (\overline{\mathcal{U}})^c$, entonces $F \subseteq \mathcal{U}_F$ es abierto y además

$$F \subset (\overline{\mathcal{U}})^c = \mathcal{U}_F,$$

tomando $\mathcal{V}_x = \mathcal{U}$, tenemos que que $x \in \mathcal{U}$ y $F \subseteq \mathcal{U}_F$; más aún se tiene que

$$\mathcal{V}_x \cap \mathcal{U}_F = \emptyset.$$

En efecto, si $z \in \mathcal{V}_x$ y $z \in \mathcal{U}_F$, tenemos que $z \in \mathcal{U}$ y $z \in (\overline{\mathcal{U}})^c$, de donde

$$z \in \mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}} \quad \text{y} \quad z \notin \overline{\mathcal{U}} \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

lo cual es absurdo y por lo tanto $\mathcal{U}_F \cap \mathcal{V}_x = \emptyset$. Así, (X, τ_X) es Q_3.

Observación.
Si (X, τ_X) es Q_3 (regular), entonces (X, τ_X) es Q_2 (Hausdorff)

Definición 5.12.
Sea (X, τ_X) no vacío, decimos que X admite el axioma de separación $Q_{3\frac{1}{2}}$ si para cualquier punto x y cualquier cerrado $A \subset X$, existe una función continua

$$f : (X, \tau_X) \longrightarrow ([0,1], \tau_{1.1})$$

tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. $\forall y \in A$.

Proposición 5.13.
Si (X, τ_X) es $Q_{3\frac{1}{2}}$, entonces es Q_3.

Demostración:
Supongamos que X es $Q_{3\frac{1}{2}}$, entonces para todo $A \subseteq X$ cerrado y para todo $x \in X$ tal que $x \notin A$, existe

$$f : X \longrightarrow [0,1]$$

continua tal que $f(x) = 0$ y para todo $y \in A$ $f(A) = 1$. P.D X es Q_3

Sea F un cerrado de X no vacío y $x \notin F$.
P.D. Existe $\mathcal{U}_F \in \tau_X$ y $\mathcal{V}_x \in \tau_X$ tales que

$$F \subseteq \mathcal{U}_F, \quad x \in \mathcal{V}_x \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_F \cap \mathcal{V}_x = \emptyset$$

Como $x \in Q_{3\frac{1}{2}}$, existe $f : (X, \tau_X) \longrightarrow ([0,1], \tau_{1.1})$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ $\forall y \in F$

Tomando $\mathcal{U}_F = f^{-1}(]\frac{1}{2},1])$ y $\mathcal{V}_x = f^{-1}([0,1/2[)$. Tenemos que $\mathcal{U}_F$ es abierto en τ_X ya que f es continua y $]\frac{1}{2},1]$ es abierto en $([0,1], \tau_{l.1})$, pues

$$]-1/2, 1] = [0,1] \cap]\tfrac{1}{2}, 4[$$

Similarmente, $\mathcal{V}_x$ es un abierto en τ_X.

$$F \subset \mathcal{U}_F \quad (\text{si } y \in F \quad f(y) = 1 \in]1/2, 1])$$

$$\mathcal{U}_F \cap \mathcal{V}_x = \emptyset$$

$$x \in \mathcal{V}_x \quad (f(0) \in [0, 1/2[)$$

Definición 5.14.
Sea (X, τ_X) un espacio topológico no vacío, diremos que X es un espacio topológico de Tychonoff (o completamente regular) si X es Q_1 y $Q_{3\,1/2}$.

Observación.
Si X es de Tychonoff, entonces es regular $(Q_{3\,1/2} \Rightarrow Q_3)$ Por tanto X es Q_3 y Q_1, así X es regular

· La recíproca es falsa. Es decir que si X es regular, no implica que X es de Tychonoff

Proposición 5.15.
Los siguientes enunciados son verdaderos.

1) Si (X, τ_X) es $Q_{3\,1/2}$ entonces para todo $A \subseteq X$, (A, τ_A) es $Q_{3\,1/2}$.
topología inducida

2) Si $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos que verifican cada uno el axioma $Q_{3\,1/2}$, entonces $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$ es un espacio topológico con el axioma de separación $Q_{3\,1/2}$

Demostración
Supongamos que (X, τ_X) es $Q_{3\,1/2}$; es decir para cualquier $x \in X$ y para cualquier $F \subseteq X$ cerrado tal que $x \notin A$, existe una función continua

$$f: (X, \tau_X) \longrightarrow ([0,1], \tau_{l.1})$$

tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in F$.

P.D. (A, τ_A) es $Q_{3\,1/2}$, es decir, para todo $x \in A$ y para cualquier $G \subseteq A$ cerrado, tal que $x \notin G$, existe una función continua

$$f: (A, \tau_A) \longrightarrow ([0,1], \tau_{l.1})$$

tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in G$.

Sean $x \in A$, y $G \subseteq A$ un cerrado cualesquiera. $x \notin G$ Como G es cerrado en A, existe H un cerrado en X tal que

$$G = A \cap H,$$

además, como $x \notin G$, entonces $x \notin H$ y puesto que (X, τ_X) es $Q_{3\,1/2}$, entonces existe una función continua

$$\tilde{f}: (X, \tau_X) \longrightarrow ([0,1], \tau_{l.1})$$

tal que $\tilde{f}(x) = 0$ y $\tilde{f}(y) = 1$ para todo $y \in H$. Tomando $f = \tilde{f}|_A$, tenemos que f es continua de A en $[0,1]$, (ya que es la restricción de una función continua) y además

$$f(x) = \tilde{f}(x) = 0$$

Clase. viernes 6 de agosto de 2021

Axiomas de separación

Definición 5.16 Sea (X,τ) un espacio topológico no vacío, decimos que admite el axioma de separación Q_4 si para A, B dos cerrados disjuntos existen U_A y U_B tal que

$$A \subseteq U_A, \qquad B \subseteq U_B \qquad y \qquad U_A \cap U_B = \emptyset.$$

Definición:
Decimos que (X,τ) es un espacio topológico normal si es Q_1 y Q_4.

Observación

- Si (X,τ) es normal, entonces (X,τ) es regular.

- Si X es Q_4 entonces se puede considerar $U=\{x\}$ (cerrado por Q_1) y $B=F$. Así, existe V_U y $V_B \in \tau$, tal que

$$U \subseteq V_U \qquad B \subset V_B \qquad U_U \cap V_B = \emptyset$$
$$x \in U \qquad B \in U_B \qquad V_U \cap V_B = \emptyset$$

Por lo tanto X verifica Q_3

¿La propiedad Q_4 es hereditaria?

En general, la proposición Q_4 no es hereditaria (Ejercicio)

Sin embargo, es débilmente «hereditaria»

Proposición 5.17
Sea (X,τ) un espacio topológico no vacío tal que verifique el axioma de separación Q_4. Sea $F \subseteq X$ es un conjunto cerrado, entonces (F, τ_F) es Q_4.

Demostración.
Sea F un cerrado en τ. P.D (F,τ_F) es Q_4.
Es decir, si consideramos B y $\widetilde{B}$ subconjuntos no vacíos cerrados y disjuntos de τ_F, P.D

$$\text{Existe } U_B \in \tau_F \quad y \quad U_{\widetilde{B}} \in \tau_F \quad tq \quad B \subseteq U_B,\ \widetilde{B} \subseteq U_{\widetilde{B}} \quad y \quad U_B \cap U_{\widetilde{B}} = \emptyset$$

Como B es cerrado en τ_F, existe un cerrado $K \in \tau_X$ tal que

$$B = F \cap K$$

y análogamente como $\widetilde{B}$ es cerrado en τ_F existe $\widetilde{K}$ cerrado tal que

$$B = F \cap \widetilde{K}.$$

Como F es cerrado, entonces B y $\widetilde{B}$ son cerrados en τ_X y como (X,τ) es Q_4, existen V_B y $V_{\widetilde{B}}$ en τ_X tales que

$$B \subseteq V_B, \qquad \widetilde{B} \subseteq V_{\widetilde{B}} \qquad y \qquad V_B \cap V_{\widetilde{B}} = \emptyset$$

tomando

$$U_B = F \cap V_B$$
$$U_{\widetilde{B}} = F \cap V_{\widetilde{B}}$$

tenemos que

y por otro lado

$$\tilde{f}(y) = f(y) = 1 \qquad \forall y \in G$$

Demostración (Parte 2)

Supongamos que para todo $i \in I$ (X_i, τ_i) es $Q_{3 1/2}$. P.D. $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i \in I} \tau_i)$ es $Q_{3 1/2}$

Sea $F \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ un cerrado, y $x \notin F$, como F es cerrado, F^c es abierto, existe $W^x = Cyl(W_{i_1}, \dots, W_{i_n})$ tal que

$$x \in W^x \subseteq F^c$$

Como $x \in W^x$, entonces para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ $x_{ij} \in W_{ij}$

Como (X_i, τ_i) es $Q_{3 1/2}$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que existen $(f_{ij})_{j \in \{1,\dots,n\}}$ funciones continuas, definidas como

$$f_{ij} : (X_{ij}, \tau_{ij}) \longrightarrow ([0,1], \tau_{1.1})$$

tal que $f_{ij}(x_{ij}) = 0$ y $f_{ij}(W_{ij}^c) = 0$. Por otro lado, definimos

$$g_{ij} : \left(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \tau_i\right) \longrightarrow ([0,1], \tau_{1.1})$$

$g_{ij} = f_{ij} \circ \pi_{ij}$ donde

$$\pi_{ij} : \left(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \tau_i\right) \longrightarrow (X_{ij}, \tau_{ij})$$

$$(x_i)_{i \in I} = x \longmapsto \pi_{ij}(x) = x_{ij}$$

g_{ij} es continua al ser la composición de dos funciones continuas. Si $k \notin \{i_1, \dots, i_n\}$, definimos la función

$$\tilde{f}_k : (X_k, \tau_k) \longrightarrow ([0,1], \tau_{1.1})$$
$$x_k \longmapsto \tilde{f}_k(x_k) = 1$$

$\tilde{f}_k$ es continua. Así,

$$\tilde{g}_k : \left(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \tau_i\right) \longrightarrow ([0,1], \tau_{1.1})$$

con $\tilde{g}_k = \tilde{f}_k \circ \pi_k$. $\tilde{g}_k$ es continua

$$f : \left(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \tau_i\right) \longrightarrow ([0,1], \tau_{1.1})$$

$$f((x_i)_{i \in I}) =$$

$$= \prod_{i \in I} \varphi_i(x), \qquad \text{donde}$$

$$\varphi_i = g_i \quad \text{si} \quad i \in \{i_1, \dots, i_n\}$$

$$\varphi_i = \tilde{g}_i \quad \text{si} \quad i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$$

Así, f es continua al ser multiplicación de funciones continuas y además

$$f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(y) = 1 \qquad \forall y \in F$$

$\mathcal{U}_B$ y $\mathcal{U}_{\widehat{B}}$ son abiertos en τ_F tal que

$$B \subseteq \mathcal{U}_B \quad \text{y} \quad \widehat{B} \subseteq \mathcal{U}_{\widehat{B}}$$

y además

$$\mathcal{U}_B \cap \mathcal{U}_{\widehat{B}} = (F \cap \mathcal{V}_B) \cap (F \cap \mathcal{V}_{\widehat{B}}) = F \cap (\mathcal{V}_B \cap \mathcal{V}_{\widehat{B}}) = \emptyset$$

Por tanto, (F, τ_F) es $\mathbb{Q}_4$

Observación: ¿Qué pasa con el producto de espacios topológicos $\mathbb{Q}_4$?

Teorema 5.18

Sea (X, τ_X) un espacio topológico, entonces es $\mathbb{Q}_4$ si y solo si para cada subconjunto $F \subseteq X$ cerrado y cada vecindad W de F existe un abierto $\mathcal{U} \in \tau_X$ tal que

$$F \subset \mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}} \subset W$$

(W es vecindad de F si existe $\hat{\mathcal{U}} \in \tau$ tal que $F \subseteq \hat{\mathcal{U}} \subseteq W$)

Demostración

$\Rightarrow$ Supongamos que (X, τ) es $\mathbb{Q}_3$, P.D. Para cada $F \subseteq X$ cerrado y para cada W vecindad de F, existe un abierto tal que

$$F \subset \mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}} \subseteq W.$$

Sea F un cerrado y W una vecindad de F, cualquiera. Sin pérdida de generalidad supongamos W abierto $F \subset W$ y W abierto, entonces

$$W^c \text{ es cerrado} \quad \text{y} \quad W^c \cap F = \emptyset$$

Como X es $\mathbb{Q}_4$, entonces existen $\mathcal{V}_{W^c}$ y $\mathcal{V}_F$ abiertos tales que

$$F \subseteq \mathcal{V}_F \quad \text{y} \quad W^c \subseteq \mathcal{V}_{W^c} \quad \text{con} \quad \mathcal{V}_F \cap \mathcal{V}_{W^c} = \emptyset$$

Además

$$(\mathcal{V}_{W^c})^c \subset W \qquad \mathcal{V}_F \subset (\mathcal{V}_{W^c})^c$$

$$\overline{\mathcal{V}_F} \subseteq (\mathcal{V}_{W^c})^c$$

Así

$$F \subseteq \mathcal{V}_F \subseteq \overline{\mathcal{V}_F} \subseteq W.$$

($\Leftarrow$) P.D (X, τ) es $\mathbb{Q}_4$, consideremos F y G cerrados en (X, τ) disjuntos. P.D. existen $\mathcal{U}_F$ y $\mathcal{U}_G$, con $F \subseteq \mathcal{U}_F$, $G \subseteq \mathcal{U}_G$ y $\mathcal{U}_F \cap \mathcal{U}_G = \emptyset$.

G^c es abierto en τ_X y $G \subseteq F^c$. Así, G^c es una vecindad de F, utilizando la hipótesis, tenemos que existe $\mathcal{U} \in \tau_X$ tal que $F \subseteq \mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}} \subseteq G^c$. Tomando

$$\mathcal{U}_F = \mathcal{U} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_G = \overline{\mathcal{U}}^c,$$

tenemos que

$$F \subseteq \mathcal{U}_F, \quad G \subseteq \mathcal{U}_G.$$

y además $\mathcal{U}_F \cap \mathcal{U}_G = \emptyset$.

Por lo tanto, X es $\mathbb{Q}_4$.

Clase • martes 10 de agosto de 2021

Axiomas de separación

Observación:
Con la última proposición (5.18), podemos demostrar lo siguiente:

(X, τ_X) es normal si y solo si es $\mathbb{Q}_1$ y para todo F, G cerrados disjuntos, existen dos abiertos $\mathcal{U}_F$ y $\mathcal{U}_G$ tales que

$$F \subseteq \mathcal{U}_F, \qquad G \subseteq \mathcal{U}_G \qquad y \qquad \overline{\mathcal{U}_F} \cap \overline{\mathcal{U}_G} = \emptyset.$$

Demostración: $\Rightarrow$
X es normal, entonces X es $\mathbb{Q}_1$ y $\mathbb{Q}_4$.
Utilizando la proposición (5.18) tenemos que para todo C cerrado, para toda vecindad W_C de C, existe $\mathcal{U}_C \in \tau$ tal que

$$C \subseteq \mathcal{U}_C \subseteq \overline{\mathcal{U}_C} \subseteq W_C.$$

Sean F, G; dos conjuntos cerrados disjuntos.
P.D. Existen $\mathcal{U}_F$ y $\mathcal{U}_G$ abiertos tales que

$$F \subseteq \mathcal{U}_F, \qquad G \subseteq \mathcal{U}_G \qquad y \qquad \overline{\mathcal{U}_F} \cap \overline{\mathcal{U}_G} = \emptyset.$$

Como $F \cap G = \emptyset$, se tiene que $F \subseteq G^c$ con G^c abierto. Se tiene que G^c es una vecindad de F. Utilizando la proposición 5.18, existe $\tilde{\mathcal{U}}_F \in \tau$ tal que

$$F \subseteq \tilde{\mathcal{U}}_F \subseteq \overline{\tilde{\mathcal{U}}_F} \subseteq G^c.$$

Análogamente, existe $\tilde{\mathcal{U}}_G$ tal que

$$G \subseteq \tilde{\mathcal{U}}_G \subseteq \overline{\tilde{\mathcal{U}}_G} \subseteq F^c.$$

Tomando $\mathcal{U}_F = \tilde{\mathcal{U}}_F$ y $\mathcal{U}_G = \tilde{\mathcal{U}}_G$, tenemos que

$$F \subseteq \mathcal{U}_F, \qquad G \subseteq \mathcal{U}_G, \qquad y \text{ más aún } \qquad \overline{\tilde{\mathcal{U}}_F} \cap \overline{\tilde{\mathcal{U}}_G} = \emptyset$$

$\Leftarrow$) Supongamos que X es $\mathbb{Q}_1$ y además verifica que, para todo F, G cerrados disjuntos, existen $\mathcal{U}_F, \mathcal{U}_G \in \tau$ tales que

$$F \subseteq \mathcal{U}_F, \qquad G \subseteq \mathcal{U}_G; \qquad \overline{\mathcal{U}_F} \cap \overline{\mathcal{U}_G} = \emptyset$$

P.D. X es $\mathbb{Q}_4$.
Sean G, F cerrados, por hipótesis tenemos que existen $\mathcal{U}_G$ y $\mathcal{U}_F$ abiertos tales que

$$G \subseteq \mathcal{U}_G, \qquad F \subseteq \mathcal{U}_F \qquad y \qquad \overline{\mathcal{U}_F} \cap \overline{\mathcal{U}_G} = \emptyset$$

Entonces, como $\mathcal{U}_G \cap \mathcal{U}_F \subseteq \overline{\mathcal{U}_G} \cap \overline{\mathcal{U}_F} = \emptyset$. Así, X es $\mathbb{Q}_4$.

Teorema 5.19 - Lema de Urysohn -
Sea X un espacio $\mathbb{Q}_4$, supongamos que F, G son dos subconjuntos cerrados de X disjuntos. Entonces existe una función

$$f: (X, \tau_X) \longrightarrow ([0,1], \tau_{|\cdot|})$$

continua, tal que

$$f(F)=\{0\} \quad y \quad f(G)=\{1\}.$$

Esta función recibe el nombre de función de Urysohn del par (F,G).

Demostración:
En primer lugar, consideremos $P=[0,1]\cap\mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los racionales. Como P es un conjunto numerable, podemos considerar

$$P=\{r_n : n=0,1,\dots\}$$

donde $r_0=0$ y $r_1=1$. El siguiente paso es construir, por inducción sobre n, una sucesión de conjuntos abiertos $\{\mathcal{U}_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumplan lo siguiente

(1) $F\subseteq\mathcal{U}_0$ y $\mathcal{U}_1\subseteq G^c$
(2) Si $r<s$, con $r,s\in\mathbb{N}$, entonces $\overline{\mathcal{U}_r}\subseteq\mathcal{U}_s$.

Como X es un espacio topológico $\mathbb{Q}_4$, utilizando la (proposición 5.18), tenemos que existe un abierto tal que

$$F\subseteq\mathcal{U}\subseteq\overline{\mathcal{U}}\subseteq G^c$$

Definimos $\mathcal{U}_0=\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_1=G^c$. Claramente, $\{\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_1\}$ verifican las propiedades (1) y (2). Supongamos por inducción que los abiertos $\mathcal{U}_{r_0},\mathcal{U}_{r_1},\dots,\mathcal{U}_{r_{n-1}}$ ya están construidas y verifican las condiciones (1) y (2).
Faltaría construir $\mathcal{U}_{r_n}$. Para ello, consideremos

$$r=\max\{r_k : k<n,\ r_k<r_n\},$$

$$s=\min\{r_k : k<n,\ r_k>r_n\}.$$

Por hipótesis de inducción $(r<s)$, tenemos que

$$\overline{\mathcal{U}_r}\subseteq\mathcal{U}_s.$$

Aplicando la proposición 5.18, tenemos que existe $\mathcal{V}$ un abierto tal que

$$\overline{\mathcal{U}_r}\subseteq\mathcal{V}\subseteq\overline{\mathcal{V}}\subseteq\mathcal{U}_s.$$

Tomando $\mathcal{U}_{r_n}=\mathcal{V}$, tenemos que $\{\mathcal{U}_{r_0},\dots,\mathcal{U}_{r_n}\}$ verifican las propiedades (1) y (2).
De esta forma, podemos construir una sucesión de abiertos $\{\mathcal{U}_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que verifican (1) y (2).

El siguiente paso de la demostración es definir la función deseada

$$f(x)=\begin{cases}\inf\{r\in P : x\in\mathcal{U}_r\}, & \text{si } x\in G^c\\ f(x)=1, & \text{si } x\in G.\end{cases}$$

P.D. $f(G)=\{1\}$ y $f(F)=0$.

Por definición, se tiene que $f(G)=\{1\}$. Si $x\in G$, entonces $x\in\mathcal{U}_0=\mathcal{U}_{r_0}=\mathcal{U}$ y por tanto

$$f(x)=0.$$

Así, $f(F)=0$.

Para terminar la demostración, necesitamos verificar la continuidad de f.
Para ello, basta mostrar que $\forall\alpha\in\,]0,1[$

$f^{-1}([0,\alpha[)$ y $f^{-1}(]\alpha,1])$ son abiertos.

Así, notemos que $f(x)<a$ si y solo si existe $q\in P$ tal que

$$x\in \mathcal{U}_q \quad y \quad q<a.$$

$$\text{P.D. } f^{-1}([0,a[) = \bigcup_{q<p} \mathcal{U}_q \in \tau_x.$$

En efecto,

$$f(x) = \text{Inf}\{r\in P : x\in \mathcal{U}_r\} < a, \qquad x\in G^c$$

si y solamente si, existe $q\in P$ tal que $x\in \mathcal{U}_q$ y $f(x)=q<a$.
Por lo tanto,

$$f^{-1}([0,\alpha[) = \bigcup_{p<\alpha} \mathcal{U}_q \in \tau_x$$

Faltaría mostrar que $f^{-1}(]\alpha,1])\in \tau_x$.

Si $f(x)\in]\alpha,1]$, entonces $f(x)>\alpha$ si y solo si existe $q\in P$ tal que

$$x\in \mathcal{U}_q \quad y \quad q>\alpha.$$

$$\text{Inf}\{r\in P : x\in \mathcal{U}_r\} > a.$$

Recordemos la hipótesis (2) de $\{\mathcal{U}_r\}_{r\in \mathbb{N}}$, si $r<s$, entonces

$$\overline{\mathcal{U}_r} \subseteq \mathcal{U}_s \iff \mathcal{U}_s^c \subseteq (\overline{\mathcal{U}_r})^c$$

Por lo tanto, $x\notin \mathcal{U}_q$, para algún $q\in P: q>\alpha$.

$\forall r\in]\alpha,q[$ con $r\in P$ y $x\notin \overline{\mathcal{U}_r}$

Así, podemos decir que $f(x)>\alpha$ si y solo si existe $q\in P$ tal que $q>\alpha$ y $x\notin \overline{\mathcal{U}_q}$
Por lo tanto

$$f^{-1}(]\alpha,1]) = \bigcup_{q>a} \left((\overline{\mathcal{U}_q})^c\right) \in \tau_x$$

Con esto, hemos concluido la demostración de la continuidad de f.

Corolario 5.20
Si X es un espacio topológico normal, entonces X es un espacio de Tychonoff.

Demostración:
X es normal si y solo si es $\mathbb{Q}_1$ y $\mathbb{Q}_4$.

Sea F un cerrado de τ_x y $x\in F^c$, utilizando el (teorema 5.19), ya que X es $\mathbb{Q}_4$, existe una función continua

$$f(X,\tau_x) \longrightarrow ([0,1],\tau_{(1)})$$

continua tal que

$$f(\{x\})=0 \qquad y \qquad f(F)=1.$$

Observación:
En general si (X, τ_X) es un espacio de Tychonoff no implica que (X,τ) sea normal.
(Ejercicio)

En el caso de espacios métricos el lema de Urysohn se puede verificar de manera más simple de la siguiente forma.

Proposición 5.21
Sea (X,d) un espacio métrico, $F, G \subseteq X$ cerrados disjuntos, entonces existe una función

$$f:(X, \tau_X) \longrightarrow ([0,1], \tau_{|\cdot|})$$

continua tal que

$$f^{-1}(\{0\}) = F \qquad y \qquad f^{-1}(\{1\}) = G.$$

Demostración:
En primer lugar, note que dado $A \subseteq X$ cerrado

$$\begin{aligned} d_A : X &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto d_A(x) = d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y) \end{aligned}$$

d_A es continua. En efecto, para $x, y \in X$ con $x \neq y$

$$\begin{aligned} d_A(y) = \inf_{z\in A} d(z,y) &\leq \inf_{z\in A} \{ d(z,x) + d(x,y) \} \\ &= d(x,A) + d(x,y). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d_A(y) \leq d_A(x) + d(x,y) \qquad y \qquad d_A(x) \leq d_A(y) + d(x,y),$$

de esta manera

$$| d_A(x) - d_A(y) | \leq d(x,y).$$

Así, $d_A(\cdot)$ es continua; más aún es uniformemente continua.

Considerando F, G cerrados disjuntos, podemos definir

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{d_F(x)}{d_F(x) + d_G(x)}. \end{aligned}$$

P.D. f es continua.
Es claro que f está bien definida para todo $x \in X$, ya que F, G son cerrados disjuntos, así $d_F(x) + d_G(x) > 0$ por lo tanto f es continua al ser la composición de funciones continuas

$f^{-1}(\{0\}) = F$

$x \in f^{-1}(\{0\}) \qquad f(x) = 0$

$d_F(x) / (d_F(x) + d_G(x)) = 0 \iff d_F(x) = 0$ si y solo si $x \in \overline{F} = F$

Si $x \in f^{-1}(\{1\})$, entonces $d_F(x) + d_G(x) = d_F(x)$ si y solo si $d_G(x) = 0$

y así, si y solo si $x \in \overline{G} = G$.

Clase · jueves 12 de agosto de 2021

Axiomas de separación

Proposición 5.22.
Sea (X, τ) un espacio topológico Q_1, supongamos que para cada cerrado $F \subseteq X$ y para cada vecindad W de F, existe una colección numerable de conjuntos abiertos $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n \qquad y \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \overline{W_n} \subseteq W,$$

entonces (X, τ) es un espacio topológico normal

Demostración
P.D. (X, τ) es un espacio topológico normal
P.D. (X, τ) es Q_4 y Q_1

Como F y G son cerrados y $F \cap G = \emptyset$, tenemos que $F \subseteq G^c$, como G^c es abierto, tenemos que G^c es una vecindad de F. Utilizando nuestras hipótesis, tenemos que existe $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de abiertos tales que

$$F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \qquad y \qquad \overline{U_n} \subseteq G^c$$

Análogamente, podemos encontrar una familia numerable de abiertos $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$G \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \qquad y \qquad \overline{V_n} \subseteq F^c$$

Por otra parte, podemos considerar lo siguiente, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$W_n = U_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \right)^c \qquad y \qquad O_n = V_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i} \right)^c,$$

entonces es fácil ver que para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n y O_n son abiertos y además como para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{U_n} \subseteq G^c \qquad y \qquad \overline{V_n} \subseteq F^c$$

tenemos que $\overline{U_n} \cap G = \emptyset$ y $\overline{V_n} \cap F = \emptyset$. Así, podemos asegurar que

$$F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n = U_F \qquad y \qquad G \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n = U_G$$

Para demostrar que (X, τ) es Q_4, basta probar que $U_F \cap U_G = \emptyset$.
Por absurdo, supongamos que

$$U_F \cap U_G \neq \emptyset.$$

Así, existe $x \in U_F$ y $x \in U_G$ y por lo tanto, existen n y m en $\mathbb{N}$ tales que

$$x \in W_n \qquad y \qquad x \in O_m.$$

Sin pérdida de generalidad, asumamos que $n \geq m$; así,

$$x \in U_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{v_i} \right)^c \qquad \text{y} \qquad x \in V_m \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} \overline{u_i} \right)^c.$$

$V_m \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$; por definición de W_n, tenemos que

$$V_m \subseteq (W_n)^c.$$

Además, $O_m \subseteq V_m$, tenemos que $O_m \subseteq (W_m)^c$ y, por lo tanto

$$O_m \cap W_n = \emptyset.$$

pero esto es absurdo pues $x \in O_m \cap W_n$. Por lo tanto, (X, τ_x) es Q_4 y más aún es normal.

Teorema 5.23
Sea (X, τ_x) un espacio topológico regular, si (X, τ) es segundo contable $(T2)$, entonces (X, τ_x) es normal.

Demostración.
Sea (X, τ_x) un espacio topológico regular, segundo contable. P.D. (X, τ_x) es normal.

Sea F un conjunto cerrado no vacío y W una vecindad de F. Como (X, τ_x) es 2^{do} contable, existe β una base de τ_x numerable.

Como (X, τ_x) es Q_1 y Q_3 tenemos que para cada $x \in F$ podemos encontrar un abierto V_x tal que

$$x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq W.$$

Como β es base, existe $\beta_x \in \beta$ tal que $x \in \beta_x \subseteq V_x$, evidentemente

$$\overline{\beta_x} \subseteq W.$$

Consideremos $\{\beta_x\}_{x \in F}$, como $\{\beta_x\}_{x \in F} \subseteq \beta$ y β es numerable, entonces se tiene que $\{\beta_x\}_{x \in F}$ es numerable. Podemos aplicar la proposición 5.22, para concluir que (X, τ_x) es normal

$$F \subseteq \bigcup_{x \in F} \beta_x \qquad \text{y} \qquad \text{para todo } x \in F \quad \overline{\beta_x} \subseteq W$$

Observación:
El recíproco es falso.

Teorema 5.24. - Metrizabilidad de Uryshon -
Sea (X, τ_x) un espacio topológico regular con base númerable, entonces (X, τ_x) es metrizable.

«Esquema de demostración»
Con estas hipótesis, se puede «construir» una familia de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : (X, \tau_x) \longrightarrow ([0,1], \tau_{|\cdot|})$$

continuas y que separan puntos. (ie. $\forall x \neq y \in X$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq f_m(y)$)

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{+\infty} 1/2^i \, |f_i(x) - f_i(y)|$$

d es una métrica en X. Se puede mostrar que $\tau_d \approx \tau_x$.

Definición 5.25
Sea (X,τ_X) un espacio topológico. diremos que (Y,τ_Y) es un extensor absoluto respecto a X ($Y\in AE(X)$) si para cualquier subconjunto cerrado $A\subseteq X$ y para cualquier función continua

$$f:(A,\tau_A)\to(Y,\tau_Y)$$

existe una función

$$F:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$$

tal que para todo $a\in A$, $f(a)=F(a)$.

En este caso, F es conocida como una extensión continua de f.

Observación
Si C es una clase de espacios topológicos (por ejemplo, e.t. normales, etc.) se dice que Y es un extensor absoluto para la clase C ($Y\in AE(C)$) si $Y\in AE(X)$ $\forall x\in \mathcal{C}$

Teorema 5.26 - Tietze - Urysohn -
Sea (X,τ_X) un espacio topológico; entonces $(Y,\tau_Y)=([-1,1],\tau_{|\cdot|})$ es un extensor absoluto respecto a X si y solo si (X,τ_X) es un espacio topológico normal.
$(Y,\tau_Y)=([-1,1],\tau_{|\cdot|})\in AE(\mathcal{C}n)$, donde $\mathcal{C}n$ es la clase de espacios topológicos normales.

Capitulo 6: Conexidad

Espacios conexos
Desde un punto de vista intuitivo la idea de un espacio topológico conexo es la de un espacio hecho de un solo pedazo.

Ejemplo: Usando el teorema del valor medio de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si suponemos que $A\subseteq\mathbb{R}$ es a la vez abierto y cerrado o que $\{A,A^c\}$ es una partición abierta de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{1}_A:(\mathbb{R},|\cdot|)\to\{0,1\}\subseteq\mathbb{R}$$

es continua si $fr(A)=\emptyset$.
Entonces cualquier abierto de $\{0,1\}$ con la topología discreta su imagen inversa es abierta

$$\mathbb{1}^{-1}(\{0\})\in\tau_{|\cdot|} \quad \text{y} \quad \mathbb{1}^{-1}(\{1\})\in\tau_{|\cdot|},$$

entonces, usando el T.V.I. se tiene que $\mathbb{1}_A$ es constante en $\mathbb{R}$. Así, se tiene que $A=\mathbb{R}$ ó $A=\emptyset$. Esto por que $(\mathbb{R},|\cdot|)$ es conexo.

Estas ideas se pueden generalizar en los espacios conexos.

1) En (X,τ_X) conexo, los únicos abiertos y cerrados a la vez son X y $\emptyset$.
2) Si (X,τ_X) es conexo, y $f:(X,\tau_X)\to(\{0,1\},\tau_{dis})$ continua entonces f es constante.

Definición 6.1
Sea (X,τ_X) un espacio topológico, diremos que (X,τ_X) es disconexo si existen A, B no vacíos, abiertos tales que

$$X=A\cup B \quad \text{y} \quad \emptyset=A\cap B.$$

Definición 6.2.
Diremos que (X,τ_X) es conexo si (X,τ_X) no es disconexo.

Observación:

- Si (X, τ_X) es disconexo, entonces existen $A, B \in \tau_X$ no vacíos tales que

$$A \cup B = X \quad y \quad A \cap B = \emptyset$$

con $A, B \subsetneq X$. Así, $\{A, B\}$ es una partición abierta no trivial de X.
- A, B son abiertos y cerrados a la vez
- $A = B^c$ y $B = A^c$
- (X, τ_X) es conexo si y solo si los únicos abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.
- (X, τ_X) es conexo si y solo si la única partición abierta de X es la trivial.

Clase - viernes 13 de agosto de 2021

Definición 6.3

Sea (X, τ_X) un espacio topológico $A \subseteq X$, decimos que A es un subconjunto conexo de X si (A, τ_A) es un espacio topológico conexo.

Proposición 6.4.

Sea (X, τ_X) un espacio topológico, se tiene que A es conexo en X si y solo si la existencia de dos abiertos disjuntos $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ de (X, τ_X) tal que $A \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ implica que $A \subseteq \mathcal{O}_1$ v $A \subseteq \mathcal{O}_2$

Demostración:

Supongamos que (A, τ_A) es un espacio topológico conexo. Además, consideremos $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2 \in \tau_X$ tales que $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ con

$$A \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2.$$

Como $A \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ y $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$, podemos considerar

$$V_1 = A \cap \mathcal{O}_1 \quad y \quad V_2 = A \cap \mathcal{O}_2.$$

$\{V_1, V_2\}$ son una partición abierta de (A, τ_A). Como A es conexo, tenemos que

$$V_1 = \emptyset \quad v \quad V_2 = A$$

Si $V_1 = \emptyset$, entonces $V_2 = A \cap \mathcal{O}_2 = A$ y por lo tanto

$$A \subseteq \mathcal{O}_2.$$

Análogamente, si $V_2 = \emptyset$, entonces

$$A \subseteq \mathcal{O}_1.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que existen dos abiertos disjuntos $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ de (X, τ_X) tal que $A \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ implica que $A \subseteq \mathcal{O}_1$ v $A \subseteq \mathcal{O}_2$.

Por absurdo; supongamos que A es disconexo. Así, existen υ_1, υ_2 en τ_A tal que

$$\upsilon_1 \neq \emptyset, \quad \upsilon_1 \neq A, \quad \upsilon_2 \neq \emptyset, \quad \upsilon_2 \neq A, \quad \upsilon_1 \cap \upsilon_2 = \emptyset \quad y \quad \upsilon_1 \cup \upsilon_2 = A.$$

y además

$$V_1 = A \cap W_1 \text{ con } W_1 \in \tau_X \quad y \quad V_2 = A \cap W_2 \text{ con } W_2 \in \tau_X$$

por lo tanto

$$V_1 \cap V_2 = A \cap (W_1 \cup W_2) = A \quad y \quad \emptyset = V_1 \cap V_2 = A \cap (W_1 \cap W_2)$$

Supongamos que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Si consideramos

$$\tilde{V}_1 = W_1 \setminus W_2 \qquad y \qquad \tilde{V} = W_2 \setminus W_1$$

Como $A \cap (W_1 \cap W_2) = \emptyset$, entonces

$$A \cap \tilde{V}_1 = A \cap V_1 \qquad y \qquad A \cap \tilde{V}_2 = A \cap V_2$$

$$\emptyset = A \cap (\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2) \Rightarrow \tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2 = \emptyset$$

$$A \subseteq \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2$$

X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X

- Otra forma

Como $A \cap (W_1 \cap W_2) = \emptyset$

$$\begin{cases} A \subseteq (W_1^c \cup W_2^c) \\ A \subseteq (W_1 \cup W_2) \end{cases} \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \emptyset$$

$A \subseteq (W_1 \setminus W_2) \cup (W_2 \setminus W_1)$

Como $(W_1 \setminus W_2)$ y $(W_2 \setminus W_1)$ son disjuntos, entonces tenemos que

$$A \subseteq (W_1 \setminus W_2) \qquad y \qquad A \subseteq (W_2 \setminus W_1).$$

Si $A \subseteq W_1 \cap W_2^c$, entonces

$$A \subseteq W_2^c \Rightarrow A \cap W_2 = \emptyset = V_2. \qquad \Rightarrow\Leftarrow$$

Por otra parte, si $A \subseteq W_2 \cap W_1^c$, entonces $A \subseteq W_1^c$; así

$$A \cap W_1 = \emptyset \Rightarrow U_2 = \emptyset$$

Así si $A \cap (W_1 \cap W_2) = \emptyset$ y por lo tanto $W_1 \cap W_2 = \emptyset$

De esta manera

① $A \subseteq W_1$, $A \subseteq W_2$
② $A \cap W_1 = A$ y $A \cap W_2 = \emptyset \Rightarrow\Leftarrow$
③ $A \cap W_2 = A$ y $A \cap W_1 = \emptyset \Rightarrow\Leftarrow$

Por lo tanto, (A, τ_A) es conexo

Proposición 6.5

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A es conexo
- Si $X = A \cup B$, A, B abiertos no vacíos, entonces $A \cap B \neq \emptyset$
- Si $X = F \cup G$, F, G cerrados no vacíos, entonces $F \cap G \neq \emptyset$
- Si $X = A \cup B$, A, B abiertos disjuntos, entonces $\emptyset = A$ ∨ $\emptyset = B$
- Si $X = F \cup G$, F, G cerrados disjuntos, entonces $F = \emptyset$ ∨ $G = \emptyset$

Proposición 6.6.

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, y $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, entonces X es conexo si y solo si X es un intervalo en $\mathbb{R}$.

Demostración

Supongamos que $X = \mathbb{R}$ es un intervalo. P.D. (X, τ_X) es conexo.

Utilizando el literal (2) de la (proposición 6.5). Sean A, B abiertos en (X, τ_X) tal que

$X = A \cup B$ P.D. $A \cap B \neq \emptyset$.

Podemos considerar $a \in A$ y $b \in B$ tal que $a < b$. Consideramos

$$\mu = \sup\{x \in A : x < b\},$$

entonces $\mu \in \overline{A}^{\tau_X}$. Si $\mu \in A$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon[\subseteq A.$$

Así, $\mu < \mu + \varepsilon \in A$ lo cual contradice la definición de μ. Así, $\mu \in B$, como B es abierto, y $\mu \in \overline{A}$, se tiene que

$$A \cap B \neq \emptyset$$

lo que muestra que X es conexo.

$\Rightarrow$ Supongamos que (X, τ_X) es conexo. P.D X es un intervalo.

Supongamos por el absurdo que X no es un intervalo, así existen $a, b \in X$ con $a < b$ y así, existe $z \in]a, b[$ tales que

$$z \notin X.$$

Tomemos,

$$W_z^1 =]-\infty, z] \cap X \quad \text{y} \quad W_z^2 =]z, +\infty[\cap X$$

de donde W_z^1 y W_z^2 son abiertos en τ_X no vacíos y además

$$W_z^1 \cap W_z^2 = \emptyset \quad \text{y} \quad W_z^1 \cup W_z^2 = X$$

Así, se concluye que X es disconexo; pero esto es absurdo pues X es conexo. Así, X es un intervalo.

Proposición 6.7

Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ continua. Si $A \subseteq X$ es conexo, entonces $f(A)$ es conexo en (Y, τ_Y)

Observación

Si (X, τ_X) es conexo, entonces $f(X)$ es conexo en (Y, τ_Y)

Clase. martes 17 de agosto de 2021

(Demostración 6.7)

Supongamos que $f(X) = A \cup B$ con $A, B \in \tau_{f(X)}$, entonces

$$f^{-1}(A) \quad \text{y} \quad f^{-1}(B) \quad \text{son abiertos de } \tau_X$$

tal que $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Como X es conexo, tenemos que

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset.$$

Después tenemos que

$$f(f^{-1}(A \cap B)) \subseteq A \cap B$$

Como $f(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B))\neq\emptyset$ tenemos que

$$A\cap B\neq\emptyset.$$

Lo cual prueba que $f(X)$ es conexo.

Corolario 6.8
Sea $f(X,\tau_X)\longrightarrow(\mathbb{R},|\cdot|)$ una función continua donde (X,τ_X) es conexo, entonces si f toma los valores y_1 y $y_2\in\mathbb{R}$, ella toma todos los valores intermedios

Demostración.
Como (X,τ_X) es un espacio topológico conexo, entonces $f(X)$ es conexo en $\mathbb{R}$ ya que f es continua. Por lo tanto, $f(X)$ es un intervalo y además y_1 y y_2 $(y_1<y_2)\in f(X)$. Por lo tanto $[y_1,y_2]\subseteq f(X)$

Teorema 6.9
Sea (X,τ_X) un espacio topológico y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos conexos de X. Supongamos que existe $i_0\in I$ tal que

$$\forall j\in I \qquad A_{i_0}\cap A_j\neq\emptyset,$$

entonces $\bigcup_{i\in I}A_i$ es conexo.

Demostración:
Consideremos $A=\bigcup_{i\in I}A_i$. Supongamos que existan dos abiertos $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ tales que

$$A\subseteq\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2. \qquad \text{P.D.} \quad A\subseteq\mathcal{O}_1 \quad \vee \quad A\subseteq\mathcal{O}_2$$

Como $A_{i_0}\subseteq A\subseteq\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2$ y además A_{i_0} es conexo, tenemos que

$$A_{i_0}\subseteq\mathcal{O}_1 \qquad \text{o} \qquad A_{i_0}\subseteq\mathcal{O}_2$$

Si $A_{i_0}\subseteq\mathcal{O}_1$, tenemos que

$$A_j\cap A_{i_0}\subseteq A_j\cap\mathcal{O}_1 \qquad \forall j\in I.$$

Como por hipótesis tenemos que para todo $j\in I$, $A_j\cap A_{i_0}\neq\emptyset$, se tiene que

$$A_j\cap\mathcal{O}_1\neq\emptyset \qquad \forall j\in I$$

Y como para todo $j\in I$ $A_j\subseteq\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2$ y además $A_j\cap\mathcal{O}_1\neq\emptyset$ utilizando el hecho de que A_j es conexo para todo $j\in I$, se sigue que

$$A_j\subseteq\mathcal{O}_1 \qquad \forall j\in I$$

Y así, $A\subseteq\mathcal{O}_1$. Análogamente, se tiene el caso cuando $A_{i_0}\subseteq\mathcal{O}_2$

Corolario 6.10.
Sea (X,τ_X) un espacio topológico y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos conexos, si

$$\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset,$$

entonces $\bigcup_{i\in I}A_i$ es conexo

Demostración: Ejercicio.

Proposición 6.11. Sea (X,τ_X) un espacio topológico y $A\subseteq X$ un conjunto conexo, supongamos que existe $B\subseteq X$ tal que

$$A\subseteq B\subseteq \overline{A},$$

entonces B es conexo. En particular, si A es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

Demostración:
En primer lugar, mostremos que si $x\notin A$ y $x\in\overline{A}$, entonces

$$A_x = A\cup\{x\}$$

es conexo. Consideremos $F\subseteq A_x$ tal que F sea abierto y cerrado a la vez en (A_x,τ_{A_x}).
P.D

$$F=A_x \quad \text{ó} \quad F=\emptyset$$

Si F es abierto y cerrado en (A,τ_A), entonces

$$A\cap F=\emptyset \quad \text{ó} \quad A\cap F = A$$

ya que A es conexo. Si $A\cap F=\emptyset$, entonces $F\subseteq A\cup\{x\}$. lo que implica que

$$F=\emptyset \quad \text{ó} \quad x\in F.$$

Como F es abierto en τ_{A_x} y $x\in F$, entonces $F\subseteq A\cup\{x\}$, de donde F es una vecindad de x. Si $y\in F$, entonces $y\notin A$ y $y=x$.

Por lo tanto $x\notin\overline{A}$ lo cual contradice nuestra hipótesis

Si $A\cap F=A$, entonces $x\in F$ ya que $x\in\overline{A}$

$$\overline{F\cap A}^{\tau_{A_x}} \subset \overline{F}^{\tau_{A_x}}\cap\overline{A}^{\tau_{A_x}}$$

$$\overline{A}^{\tau_{A_x}} \subseteq \overline{F}^{\tau_{A_x}}\cap\overline{A}^{\tau_{A_x}}$$

$$x\in\overline{A}^{\tau_{A_x}} \Rightarrow x\in\overline{F}^{\tau_{A_x}}\cap\overline{A}^{\tau_{A_x}}$$

Como F es cerrado y abierto en (A_x,τ_{A_x}), tenemos que $x\in F$

$$F\cap A = A \Rightarrow A\subseteq F$$

$$x\in F \Rightarrow \{x\}\subseteq F$$

$$A\cup\{x\}\subseteq F$$

Pero por hipótesis, $F\subseteq A\cup\{x\}$. Así, $F=A\cup\{x\}=A_x$. Si $x\in\overline{A}$ y $x\notin A$ se tiene que $A\cup\{x\}$ es un conjunto conexo

$$B=\bigcup_{\substack{x\in B\\ x\notin A}} A\cup\{x\} \qquad \text{como } \forall x\in B_n \quad x\notin A$$

$$\bigcap_{\substack{x\in B\\ x\notin A}} A\cup\{x\}\neq\emptyset,$$

tenemos que B es conexo.

Observación.

- Hemos demostrado que si A es conexo, entonces $\bar{A}$ también lo es
- En el caso del interior del conjunto conexo no se tiene la implicación, es decir que si A es conexo eso no implica que $Int(A)$ sea conexo.

Ejemplo:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ de la forma

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$A = \bar{B}((1,0),1) \cup \bar{B}((-1,0),1)$$

A es conexo ya que $\bar{B}((1,0),1)$ y $\bar{B}((-1,0),1)$ son conjuntos conexos, al ser convexos y además $\bar{B}((1,0),1) \cap \bar{B}((-1,0),1) \neq \emptyset$ ya que

$$(0,0) \in \bar{B}((1,0),1) \cap \bar{B}((-1,0),1).$$

Por otro lado, $Int(A) = B((0,1),1) \cup B((-1,0),1)$ que no es un conjunto conexo pues

$$B((1,0),1) \quad y \quad B((-1,0),1)$$

son abiertos y cerrados en $(Int(A), \tau_{Int(A)})$

Definición 6.12.

Sea (X, τ_X) un espacio topológico y $x \in X$, definimos la componente conexa del elemento x como el conexo más grande que contiene a x, lo notaremos $C(x)$

$$C(x) = \bigcup_{\substack{x \in C^x \\ C^x \text{ conexo}}} C^x$$

Observación

- Si $x, y \in X$ tal que existe un conexo C tal que $x, y \in C$, entonces $C(x) = C(y)$, $y \in C(x)$ y $x \in C(y)$
- Si $C(x) = C(y)$, entonces existe C un conjunto conexo tal que $x, y \in C$

Proposición 6.13

Las componentes conexas sobre un espacio topológico en general son una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son las componentes conexas. Así, las componentes conexas forman una partición de X

Clase • jueves 14 de agosto de 2021

Observación

- Si (X, τ_X) es un espacio topológico conexo, entonces la única componente conexa es el espacio

Proposición 6.14

Sea (X, τ_X) un espacio topológico (X, τ_X) conexo si y solo si toda función continua de f de (X, τ_X) en $(\{0,1\}, \tau_{dis})$ es constante

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que (X, τ_X) es conexo y $f: (X, \tau_X) \to (\{0,1\}, \tau_{dis})$ continua. P.D. f es constante

Como $\{0\}, \{1\}$ son abiertos en τ_{dis} tenemos que $\{f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\})\}$ es una partición abierta de X. Como X es es conexo, la única partición abierta es la partición trivial

$\{X, \emptyset\}$. Así, $f^{-1}(\{0\}) = X$ v $f^{-1}(\{1\}) = X$
En ambos casos la función f es constante

($\Leftarrow$) Supongamos que toda aplicación

$$f: (X, \tau_X) \to (\{0,1\}, \tau_{dis})$$

continua es constante. P.D. (X, τ_X) es un espacio topológico conexo.
Consideramos $A \subseteq X$, es claro que $\{A, A^c\}$ es una partición de X. Supongamos que $\{A, A^c\}$ es una partición abierta de X. P.D. $\{A, A^c\}$ es la partición trivial

Considerando la indicatriz del conjunto A, $\mathbb{1}_A$ definida como

$$\mathbb{1}_A : (X, \tau_X) \to (\{0,1\}, \tau_{dis})$$

$$y \mapsto \mathbb{1}_A(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in A \\ 0 & \text{si } y \notin A, \end{cases}$$

entonces como A abierto y cerrado a la vez tenemos que $Fr(A) = \emptyset$, así $\mathbb{1}_A$ es continua
Por hipótesis, la indicatriz de $\mathbb{1}_A$ es constante y por lo tanto

$$\mathbb{1}_A = 1 \quad \text{v} \quad \mathbb{1}_A = 0$$

- Si $\mathbb{1}_A = 1$, entonces $A = \mathbb{1}^{-1}(\{1\}) = X$ y por lo tanto $\{A, A^c\}$ es la partición trivial
- Si $\mathbb{1}_A = 0$, entonces $A^c = \mathbb{1}^{-1}(\{0\}) = X$ y por lo tanto $\{A, A^c\}$ es la partición trivial.

Teorema 6.15
Sean $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de espacios topológicos y $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$ el espacio producto asociado con la topología producto $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$ es un espacio topológico conexo si y solo si para todo $i \in I$ (X_i, τ_i) es un espacio topológico conexo.

Observación
- Con las hipótesis anteriores tenemos que $(\prod_{i\in I} X_i, \tau_{caj})$ no es necesariamente conexo a pesar de que para todo $i\in I$ (X_i, τ_i) sea conexo.
- Si $(\prod_{i\in I} X_i, \tau_{caj})$ es conexo, entonces para todo $i \in I$ (X_i, τ_i) es conexo.

Demostración (Teorema 6.15)
($\Rightarrow$) Supongamos que $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$ es un espacio topológico conexo. P.D. $\forall i \in I$ (X_i, τ_i) es un e.t. conexo. Sea $j \in I$, cualquiera. Como

$$P_j : (\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i) \to (X_j, \tau_j)$$

$$x = (x_i)_{i\in I} \mapsto p(x) = x_j$$

es continua se tiene que $P_j(\prod_{i\in I} X_i)$ es conexo ya que $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$ es un espacio topológico conexo.

$$P_j(\prod_{i\in I} X_i) = X_j$$

Así, X_j es un espacio topológico conexo.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\forall i \in I$, (X_i, τ_i) es conexo. P.D. $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$ es conexo
Para esta demostración, vamos a proceder en dos etapas
- Caso finito: Para este caso, basta con mostrar lo siguiente. Si (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) son espacios topológicos conexos. P.D $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ es un espacio topológico conexo

Consideramos $f:(X_1\times X_2, \tau_{X_1}\times\tau_{X_2}) \longrightarrow (\{0,1\}, \tau_{dis})$ continua. P.D. f es constante

Supongamos que f no es constante. Además, recordemos las funciones parciales de f. Sea $x_1\in X_1$

$$f_{x_1}: X_2 \longrightarrow \{1,0\}$$
$$x_2 \longmapsto f_{x_1}(x_2) = f((x_1,x_2))$$

y para $x_2\in X_2$, definimos

$$f_{x_2}: X_1 \longrightarrow \{1,0\}.$$
$$x_1 \longmapsto f_{x_2}(x_1) = f((x_1,x_2))$$

Como f no es constante, se tiene que f_{x_1} o f_{x_2} no son constantes para algún $x_1\in X_1$ o $x_2\in X_2$.
Supongamos que f_{x_1} no es constante. Como f_{x_1} es una función continua (ya que es una aplicación parcial de una función continua) de $(X_2,\tau_2)\longrightarrow(\{0,1\},\tau_{dis})$ y no es constante, esto implica que (X_2,τ_2) no es conexo. lo cual contradice nuestra hipótesis.

El caso f_{x_2} no constante es análogo.

Así, hemos probado que $(X_1\times X_2, \tau_1\times\tau_2)$ es un espacio topológico conexo. Por lo tanto, se sigue el resultado para el caso finito.

- Caso infinito

En este caso mostraremos que la única componente conexa es todo el espacio

Sea $x=(x_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}X_i$, consideramos $J\subseteq I$ finito, entonces definimos

$$X_J(x) = \{\, y=(y_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}X_i : \forall j\in I\setminus J \quad y_j = x_j \,\}$$

El conjunto $X_J(x)$ es homeomorfo al producto finito $\prod_{j\in J}X_j$

Así $X_J(x)$ es conexo en $(\prod_{i\in I}X_i, \prod_{i\in I}\tau_i)$ ya que $\forall i\in I$ (X_i,τ_i) es conexo, en particular $\forall j\in J$ (finito) (X_j,τ_j)

$$X_{f(x)} = \bigcup_{\substack{J\subseteq I\\ \text{finito}}} X_J(x)$$

$X_{f(x)}$ es conexo ya que $\forall J\subseteq I$ finito $x=(x_i)_{i\in I}\in X_J(x)$. Además, sabemos que $\overline{X_{f(x)}}$ es conexo.
P.D. $X_{f(x)}$ es denso en $(\prod_{i\in I}X_i, \prod_{i\in I}\tau_i)$.

Sea $y\in\prod_{i\in I}X_i$ y $\mathcal{V}_y$ vecindad abierta de y para la topología producto. P.D. $X_{f(x)}\cap\mathcal{V}_y\neq\emptyset$

Como $\mathcal{V}_y$ es una vecindad abierta de y, existe $W=C_{y_1}(W_j : j\in\hat{J})$ con $\hat{J}\subseteq I$ finito tal que

$$y\in W\subset\mathcal{V}_y$$

Consideremos $z=(z_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}X_i$ definido como

$$z_i = y_i \quad \text{si } i\in\hat{J}$$
$$z_i = x_i \quad \text{si } i\in I\setminus\hat{J}$$

Por lo tanto, $z\in W$ y $z\in X_{\hat{J}}(x)$. Como $X_{\hat{J}}(x)\subset X_{f(x)}$ tenemos que $W\cap X_{f(x)}\neq\emptyset$

$$W \cap X_{f(x)} \subseteq U_y \cap X_{f(x)}$$

Así, $X_{f(x)}$ es denso en $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$. Por lo tanto,

$$\overline{X_{f(x)}} = \prod_{i\in I} X_i$$

Lo que implica que la única componente conexa es $\prod_{i\in I} X_i$. Así $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I}\tau_i)$ es un espacio topológico conexo.

- Espacios conexos por arcos

Definición 6.16. - Camino-
Sean (X, τ_X) un espacio topológico. x y $y \in X$. llamaremos camino o arco que una a x y y a toda aplicación continua

$$\gamma : ([0,1], \tau_{[0,1]}) \longrightarrow (X, \tau_X)$$

tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$

Definición 6.17 - Conexo por camino-
Sea (X, τ_X) un espacio topológico, decimos que $A \subseteq X$ es conexo por arcos (o por caminos) si $\forall x, y \in A$ existe un camino o arco $\gamma : [0,1] \to X$, tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

Clase • viernes 20 de agosto
Preguntas.
- Si x y y pertenecen a C donde C es conexo, entonces $C(x) = C(y)$.

Así,

$$x \in C \subseteq C(y) \Rightarrow x \in C(y)$$

Si $y \in C \subseteq (x) \Rightarrow y \in C(x)$. Si $z \in C(x)$ entonces debemos mostrar que $z \in C(y)$.

Conexo por arcos
Recordemos que A es conexo por arcos si para todo $x, y \in A$ con $x \neq y$, existe un camino $\gamma : ([0,1], \tau_{[0,1]}) \to (A, \tau)$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

Ejemplo: Si (E, τ_E) es un espacio topológico vectorial ((E, τ_E) es un espacio topológico y $(E, +, \cdot)$ es un espacio vectorial)

$$\oplus \; E \times E \to E \qquad\qquad \odot \; E \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$
$$(a,b) \mapsto a \oplus b \qquad\qquad (x, \lambda) \mapsto x \odot \lambda$$

Si $C \subseteq E$ es convexo, entonces C es conexo por arcos. En efecto, si $x, y \in C$

$$\gamma : ([0,1], \tau_{[0,1]}) \to (C, \tau_C)$$
$$t \mapsto \gamma(t) = (1-t)x + ty.$$

Es claro que γ es continua. $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$, además $\gamma([0,1]) \subseteq C$.

Todo conjunto convexo es conexo por arcos, en particular $B(a,r)$ en espacios normados

Proposición 6.18.
Sea (X, τ) un espacio topológico, y $C \subseteq X$, entonces si C es conexo por arcos, entonces C es conexo.

Demostración:
Supongamos que existen U y $V \in \tau_C$ tales que $C = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$

Sea $x \in \mathcal{U}$ y $x \notin \mathcal{V}$ y $y \in \mathcal{V}$ tal que $y \notin \mathcal{U}$. Como C es conexo por arcos, tenemos que existe un camino que une a x y y; es decir existe

$$\gamma : ([0,1], \tau_{|\cdot|}) \longrightarrow (C, \tau_C)$$

Continuo tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Como γ es continua se tiene que

$\gamma([0,1])$ es conexo en $C = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, de donde $\gamma([0,1]) \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

Por lo tanto, usando la proposición 6.4 se tiene que

$$\gamma([0,1]) \subseteq \mathcal{U} \quad \vee \quad \gamma([0,1]) \subseteq \mathcal{V}.$$

- Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\gamma([0,1]) \subseteq \mathcal{U}$ y así $y \in \mathcal{U}$, lo cual es absurdo. Así, C es conexo.

«Otra manera»

Supongamos que C es conexo por arcos y $a \in C$, fijo. Así, para todo $b \in C$, existe γ_a^b un camino que une a y b. Así

$$\gamma_a^b([0,1]) \subseteq C.$$

Tomando

$$\bigcup_{b \in C} \gamma_a^b([0,1]) = C$$

y dado que $\bigcap_{b \in C} \gamma_a^b([0,1]) \neq \emptyset$ ya que para todo $b \in C$ $a \in \gamma_a^b([0,1])$ y además para todo b $\gamma_a^b([0,1])$ es conexo en C. De esta manera, se concluye que

$$\bigcup_{b \in C} \gamma_a^b([0,1]) = C$$

es conexo.

Observación

- En general la recíproca es falsa es decir que si A es conexo, eso no implica que A sea conexo por arcos
- Sabemos que si A es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo, no obstante, si A es conexo por arcos, eso no implica que $\overline{A}$ sea conexo por arcos

El siguiente ejemplo ilustra las observaciones anteriores

$$A \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad A = \{(x, \operatorname{sen} 1/x) : x > 0\}$$

Entonces A es conexo por arcos ya que dado $(x_1, \operatorname{sen}(1/x_1))$ y $(x_2, \operatorname{sen}(1/x_2))$ y tomemos

$$\gamma : ([0,1], \tau_{|\cdot|}) \longrightarrow (A, \tau_A)$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = (tx_1 + (1-t)x_2, \operatorname{sen}(1/(tx_1 + (1-t)x_2)))$$

$\gamma(0) = (x_1, \operatorname{sen}(1/x_1))$ y $\gamma(1) = (x_2, \operatorname{sen}(1/x_2))$

$$\overline{A} = A \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

$\bar{A}$ no es conexo por arcos pero si es conexo. Ya que, tomando $(0,1) \in \bar{A}$ no existe un camino o función continua que una dicho punto con cualquier punto de A.

$\bar{A}$ es conexo pero no por arcos, A es conexo por arcos pero $\bar{A}$ no es conexo por arcos.

Proposición 6.19.
La definición de conexo por arcos nos da una relación de equivalencia en el espacio topológico

Demostración
Sean $x, y \in (X, \tau_X)$. Decimos que x está relacionado con y si existe un camino que los una.
P.D. es una relación de equivalencia.

- $x \sim x$. En efecto, consideremos $\mathbb{1}_A : [0,1] \to (X, \tau_X)$ $t \to \mathbb{1}_A(x) = x$. función constante

- $x \sim y$ P.D $y \sim x$. Por hipótesis existe

$$\gamma(t) : [0,1] \to X$$

tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. tomando $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ definida como $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$, entonces $\tilde{\gamma}(0) = y$ y $\tilde{\gamma}(1) = x$.

- $x \sim y$ y $y \sim z$ P.D $x \sim z$.

Existen $\gamma_1 : [0,1] \to X$ tal que $\gamma_1(0) = x$ y $\gamma_2(1) = z$, además $\gamma_2 : [0,1] \to X$ tal que $\gamma_2(0) = y$ y $\gamma_2(1) = z$. Así, definimos

$$\gamma_3 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

De esta manera $\gamma_3(0) = \gamma_1(0) = x$ y $\gamma_3(1) = \gamma_2(1) = z$.
Más aún γ_3 es continua ya que

$$\lim_{t \to 3^+} \gamma_3(t) = \lim_{t \to 3^-} \gamma_3(t) = y$$

Esta relación de equivalencia está asociada a una clase de equivalencia llamada componente conexa por arcos

Definición 6.20
Sean (X, τ_X) y $x \in X$, llamaremos la componente conexa por arcos al siguiente conjunto

$$\hat{C}(x) = \{ y \in X : \text{Existe un camino que una a } x \text{ y } y \}.$$

Observación:
Con la relación de equivalencia anterior, tenemos que

$$[x] = \hat{C}(x).$$

Las componentes conexas por arcos no son necesariamente conjuntos cerrados. Esto difiere de las componentes conexas

Proposición 6.21
Sea (X,τ_X) se tiene lo siguiente:

1) Las componentes conexas son una partición cerrada del espacio.

2) Las componentes conexas por arcos son únicamente una partición del espacio

3) La componente conexa por arcos de «x» es el conjunto conexo por arcos más grande que contiene a x.

Demostración:
Faltaría únicamente mostrar lo siguiente

(1) • las componentes conexas son cerradas
(2) • las componentes conexas por arcos son el conjunto más grande que contiene al elemento

(1) Es automático ya que

$$\mathcal{C}(x) = \bigcup_{\substack{x\in C \\ C \text{ conexo}}} C \,, \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathcal{C}(x)} \subseteq \bigcup_{\substack{x\in C \\ C \text{ conexo}}} C$$

y puesto que $C(x) \subseteq \overline{C(x)}$. se sigue que $C(x)$ es cerrado.

2) Si llamamos $\hat{C}(x)$ la componente conexa por arcos de «x», entonces

«Ideas»
$\{A_i\}_{i\in I}$ conexo por arcos

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \text{ es conexo por arcos}$$

si $x,y \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists j,k \in I$

$x \in A_j$, $y \in A_k$ $\quad \exists z \in A_j \cap A_k$

$z \sim x$ y $z \sim y \Rightarrow x \sim y$

$\exists i \in I$ tq $\forall i \in I$ $\quad A_i \cap A_{j_0} \neq \emptyset$

$x \in A_k$ y $y \in A_j$ $\quad x \sim z$

$\exists\ z \in A_k \cap A_{j_0}$ $\quad z \sim y$

$\exists\ \hat{z} \in A_j \cap A_{j_0}$

$z \sim \hat{z}$

Clase • martes 24 de Agosto de 2021

Espacios conexos por arcos.

Recordemos que si (X,τ_X) es un espacio topológico. Podemos definir, dado $x \in X$, $\hat{C}(x)$ como el conexo más grande que contiene a x.

P.D

$$\hat{C}(x) = \bigcup_{\substack{x\in \hat{C} \\ \hat{C} \text{ conexo por arcos}}} \hat{C}_x$$

Para mostrar que $\hat{\mathcal{C}}(x) = \bigcup_{\substack{x \in \hat{C} \\ \hat{C} \text{ conexo por arcos}}} \hat{C}_x$ tenemos que mostrar lo siguiente.

Proposición 6.22.
Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios conexos por arcos en (X, τ_X) tal que existe $j_0 \in I$ tal que $\forall i \in I$ $A_i \cap A_{j_0} \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexa por arcos.

Demostración
Sea x y $y \in \bigcup A_i$. P.D. Existe un camino que conecta a x y a y.

Como $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, entonces existe $j \in I$ tal que $x \in A_j$, de la misma manera, existe $k \in I$ tal que $y \in A_k$. Como $A_j \cap A_{j_0} \neq \emptyset$, existe $z \in A_j \cap A_{j_0}$, de la misma manera, existe $\hat{z} \in A_k \cap A_{j_0}$.

Como x y $z \in A_j$, tenemos que existe γ un camino que conecta a x y z. De la misma manera, existe γ_2 un camino que conecta a $\hat{z}$ y y.

Además, como $\hat{z}$ y $z \in A_{j_0}$, se tiene que existe γ_3 un camino que conecta a $\hat{z}$ y z. Por lo tanto, se tiene que

$$x \underset{CA}{\sim} z \quad y \quad z \underset{CA}{\sim} \hat{z} \quad \text{además} \quad \hat{z} \underset{CA}{\sim} y,$$

entonces $z \underset{CA}{\sim} y$ y por transitividad $x \underset{CA}{\sim} y$. Es decir, existe un camino δ tal que conecta a y y x. Por lo tanto, la unión

$$\bigcup_{i\in I} A_i$$

es un conjunto conexo por arcos.

- La proposición 6.22 implica que las componentes conexas $\hat{\mathcal{C}}(x) = \bigcup_{\substack{x \in \hat{C}_x \\ C_x \text{ conexo por arcos}}} \hat{C}_x$
- Tenga en cuenta que las componentes conexas por arcos en general no son cerradas

Esa característica es una diferencia con respecto a las componentes conexas que siempre son cerradas

Espacios Localmente Conexos y conexos por arcos

Definición 6.23 -localmente conexo-
Sea (X, τ_X) un espacio topológico, decimos que X es localmente conexo si X admite una base de vecindades conexas

Es decir: $\forall x \in X$ $\forall \mathcal{V}_x \in \mathcal{V}(x)$ $\exists \mathcal{O}_x \in \tau_X$ tal que $\mathcal{O}_x$ conexo y $x \in \mathcal{O}_x \subseteq \mathcal{V}_x$

Definición 6.24 - localmente conexo por arcos-
Decimos que (X, τ_X) es un espacio localmente conexo por arcos si para todo elemento de X existe una base de vecindades conexa por arcos.

Es decir: $\forall x \in X$ $\forall \mathcal{V}_x \in \mathcal{V}(x)$ $\exists \mathcal{W}_x \in \tau_X$ tal que $\mathcal{W}_x$ sea conexo por arcos y $x \in \mathcal{W}_x \subseteq \mathcal{V}_x$.

Observación
- Si (X, τ_X) es un espacio localmente conexo por arcos, entonces (X, τ_X) es un espacio localmente conexo.
- Si (X, τ_X) es un espacio localmente conexo, entonces ¿las componentes conexas son abiertas?

En efecto, en primer lugar, notemos que las componentes conexas son una partición cerrada de X.

- $\{C_x\}_{x\in X}$ es una partición cerrada
- $C(x)$ es cerrado $\quad U_{x\in X} C(x) = X$ y si $x, y \in X$, se tiene que $C(x) = C(y)$
  - $C(x) \cap C(y) = \emptyset$

P.D. $\forall x \in X$ $(C(x))^c$ es cerrado

- $\forall z \in C(x)$ $\quad \exists V_z \in V(z)$ tal que $\quad z \in V_z \subseteq C(x)$

Sea $z \in C(x)$, tenemos que $C(x) = C(z)$. Por otro lado, como (X, τ_x) es localmente conexo, entonces existe V_z una vecindad conexa de z,

$$z \in V_z \subseteq C(z) \Leftrightarrow z \in V_z \subseteq C(x),$$

lo cual muestra que $C(x)$ es abierto.

Si X es localmente conexo. se tiene que las componentes conexas son conjuntos abiertos y cerrados.

~~Si X es localmente conexo, entonces X es conexo si y solo si para todo x C(x)=X~~

~~Por tanto, si X es un espacio localmente conexo, entonces X es conexo.~~

⑤ Si (X, τ_x) es un espacio localmente conexo por arcos, entonces las componentes conexas por arcos son conjuntos cerrados y abiertos

Demostración
En efecto, si $z \in \hat{C}(x)$ componente conexa por arcos de «x». P.D. $\exists V_z \in V(z)$ tq $z \in V_z \subseteq \hat{C}(x)$.
Como $\hat{C}(x) = \hat{C}(z)$ ya que $z \in \hat{C}(x)$, tenemos que al ser (X, τ_x) localmente conexo por arcos, existe V_z conexa por arcos tal que

$$z \in V_z \subseteq \hat{C}(z) = \hat{C}(x)$$

Por tanto, las componentes conexas por arcos son abiertas
P.D. Las componentes conexas por arcos son cerradas.

Sea $y \in (\hat{C}(x))^c$, por tanto $\quad y \notin \hat{C}(x) \Rightarrow \hat{C}(x) \cap \hat{C}(y) = \emptyset$.

Así, $\hat{C}(y) \in (\hat{C}(x))^c$, y como $\hat{C}(y)$ es un conjunto abierto (ya que (X, τ_x) es ELCA) tenemos que $y \in \hat{C}(y) \subseteq (\hat{C}(x))^c$. Así, $(\hat{C}(x))^c$ es abierto, y por lo tanto $\hat{C}(x)$ es cerrado.
Así, si (X, τ_x) es un ELCA, las componentes conexas por arcos son abiertas y cerradas

⑥ Si (X, τ_x) es conexo $\not\Rightarrow$ (X, τ_x) es E.L.C. (ejercicio)

⑦ Si (X, τ_x) es E.L.C $\Rightarrow$ (X, τ_x) es conexo (ejercicio)

⑧ Si (X, τ_x) es conexo por arcos $\not\Rightarrow$ (X, τ_x) E.L.C.A

⑨ Si (X, τ_x) es E.L.C $\not\Rightarrow$ (X, τ_x) es conexo por arcos

Proposición 6.25
Si (X, τ_X) es un espacio topológico conexo y E.L.C.A, entonces X es conexo por arcos

Demostración:
Sea $x \in X$, entonces por lo anterior $\hat{C}(x)$ componente conexa por arcos de X es un conjunto abierto y cerrado (X es E.L.C.A). Además por hipótesis tenemos que (X, τ_X) es conexo entonces los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son X y $\emptyset$.

Así, para todo $x \in X$ $\hat{C}(x) = X$, lo que implica que (X, τ_X) es un espacio conexo por arcos.

Capítulo 7: Espacios topológicos compactos

Definición 7.1.
Sea (X, τ_X) un espacio topológico, sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos abiertos, decimos que $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de X si

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Definición 7.2
Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X, decimos que el recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ admite un subrecubrimiento finito si existe $J \subseteq I$ finito tal que

$$\bigcup_{j \in J} U_j = X$$

donde $\{U_j\}_{j \in J}$ es una subfamilia de $\{U_i\}_{i \in I}$

Definición 7.3
Sea (X, τ_X) un espacio topológico, decimos que (X, τ_X) es un espacio compacto si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.

Clase • jueves 26 de agosto de 2021

Proposición 7.4.
(X, τ_X) es un espacio topológico compacto si y solo si toda familia de cerrados de intersección vacía admite una subfamilia finita con intersección vacía.

Si $\{F_i\}_{i \in I}$ es una familia de cerrados tal que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, entonces existe $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$

Demostración
Sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia tal que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, entonces $\bigcup_{i \in I} F_i^c = X$, se tiene que $\{F_i^c\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de X. Como (X, τ_X) es compacto, se tiene que existe $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcup_{j \in J} F^c = X$ y por lo tanto

$$\bigcap_{j \in J} F^c = \emptyset$$

($\Leftarrow$) Análogamente se tiene el resultado

Proposición 7.5.
Sea (X, τ_X) un espacio topológico compacto, toda sucesión decreciente de cerrados no vacíos $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tiene una intersección no vacía.

Demostración

Por absurdo, si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, se tiene que, gracias al hecho de que (X,τ_X) es compacto, existe $J\subseteq\mathbb{N}$ finito tal que

$$\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$$

tomando $N = \max\{j : j\in J\}$, tenemos que

$$F_N = \bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset.$$

Así, existe una contradicción.

Observación.

Se puede generalizar la proposición 7.5 si suponemos únicamente el conjunto indexado con una relación de orden total

I es un conjunto con una relación de orden $(F_i)_{i\in I}$ una sucesión decreciente.

Definición 7.6.

Sea (X,τ_X) un espacio topológico decimos que $A\subset X$ es un conjunto compacto si (A,τ_A) es un espacio topológico compacto

Proposición 7.7.

Sean (X,τ_X) un espacio topológico y $Y\subseteq X$, Y es un conjunto compacto si y solo si para toda familia de abiertos de X, $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que

$$Y\subseteq\bigcup_{i\in I} U_i$$

existe una subfamilia finita $\{U_{i_1},\dots,U_{i_j}\}$ tal que $Y\subseteq\bigcup_{k=1}^{j} U_{i_k}$

Demostración

Si Y es compacto y $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de X tal que $Y\subseteq\bigcup_{i\in I} U_i$

Por lo tanto

$$V_i = Y\cap \mathcal{U}_i$$

es un abierto en (Y,τ_Y). Así, $\{V_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de Y, como Y es compacto, se tiene que existe $J\subseteq I$ finito tal que

$$\bigcup_{j\in J} V_j = Y$$

Por lo tanto, $Y\subseteq\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que si $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de X tal que

$$Y\subseteq\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i,$$

entonces existe $J\subseteq I$ finito, tal que $\bigcup_{j\in J} U_j\supset Y$, P.D. (Y,τ_Y) es compacto;

Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de Y en τ_Y, tal que

$$\bigcup_{i\in I} V_i = Y$$

Como $\forall i\in I$, $V_i = Y\cap\mathcal{U}_i$ con $\mathcal{U}_i\in\tau_X$, para todo $i\in I$

Así, por hipótesis existe $J \subseteq I$ finito tal que

$$\mathcal{Y} \subseteq \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j$$

si y solo si

$$Y = \bigcup_{j\in J} V_j$$

Por lo tanto, (Y, τ_Y) es compacto.

Proposición 7.8

Sea (X, τ_X) un espacio topológico compacto, $A \subseteq X$ cerrado, entonces A es compacto.

Demostración

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de τ_X tal que $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, así como A^c es abierto, entonces

$$A^c \cup \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i = X$$

es un recubrimiento abierto de X. Así, como X es compacto, entonces $\{A_i, A^c\}_{i\in I}$ admite un subrecubrimiento finito tal que

$$A^c \cup \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j = X.$$

Caso 1: Como $A \cap A^c = \emptyset$ y $A^c \cup \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j = X$, se tiene que

$$A \subseteq \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j.$$

Caso 2:

$$\bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j = X \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j.$$

Ejemplos:

- Si $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio normado de dimensión finito, entonces $A \subseteq X$ es compacto si y solo si A es cerrado y acotado.
- Si $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio normado de dimensión finita, si $A \subseteq X$ es compacto, A es cerrado y acotado.
- Si (X, τ_X) es un conjunto finito, entonces X es compacto.

En efecto, F es acotado y cerrado ya que si $x \in F$, tenemos que

$$(\exists m \in \mathbb{N} \text{ tq } x = 1/m) \vee (x = 0)$$

Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = 1/m$, entonces

$$x \in V_x \cap F \neq \emptyset \quad \text{si} \quad x = 0$$

como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, se tiene que $V_x \cap F \neq \emptyset$

(Por recubrimientos)

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de F

$$F \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \qquad \mathcal{U}_i \in \tau_X$$

$\exists j \in I$ tal que $0 \in \mathcal{U}_j$ como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

· $\exists n_j \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_j$ $1/n \in \mathcal{U}_j$.

Así, solo un número finito de elementos de F no estarían en $\mathcal{U}_j$

$F \setminus \mathcal{U}_j$ es un conjunto finito, por lo tanto. Además

$$F \setminus U_j = \bigcup_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} \mathcal{U}_i$$

Como $\{U_i\}_{\substack{i\in I\\ j\neq i}}$ es un recubrimiento abierto de $F\setminus\mathcal{U}_j$, tenemos que existe $K \subseteq I$ finito tal que

$$j \notin K \quad y \quad F\setminus \mathcal{U}_j \subseteq \bigcup_{k\in K} \mathcal{U}_k$$

$$F = U_j \cup (F\setminus\mathcal{U}_j) \subset \bigcup U_k \cup U_j$$

Por lo tanto, F es compacto

· $\mathbb{R}$ no es compacto

En efecto, $\{]n-1, n+1[\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto que no admite ningún subrecubrimiento finito

Proposición 7.9.

Sean (X,τ_X) un espacio topológico separado. $A\subseteq X$ compacto, si $x \notin A$, entonces existen dos abiertos disjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}_x$ tales que

$$A \subseteq \mathcal{U} \quad y \quad x \in \mathcal{V}_x$$

Demostración

Sea $a\in A$, como $a\neq x$, existen $\mathcal{V}_x^a$ y $\mathcal{U}_a \in \tau_X$ tales que

$$\mathcal{V}_x^a \cap \mathcal{U}_a = \emptyset$$

$$x \in \mathcal{V}_x^a \quad y \quad a \in \mathcal{U}_a \qquad (*)$$

Así,

$$A \subseteq \bigcup_{a\in A} \mathcal{U}_a, \text{ donde } \mathcal{U}_a \text{ verifica } (*)$$

Como A es compacto, existen $\{a_1, \dots, a_n\} \in A$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{a_i}$$

tomando $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{a_i}$ y $\mathcal{V}_x = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{V}_x^{a_i}$, tenemos que $x\in\mathcal{V}_x$ y $A\subseteq\mathcal{U}$

Más aún, tenemos que

$$\mathcal{V}_x \cap \mathcal{U} = \emptyset.$$

En efecto, si $z \in \mathcal{V}_x$ y $z \in \mathcal{U}$, entonces

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad z \in \mathcal{V}_x^{a_i} \quad y \quad z \in \mathcal{U}_{a_j} \qquad \text{con } j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\mathcal{V}_x^{a_j} \cap \mathcal{U}_{a_j} \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \Leftarrow$$

Proposición 7.10
Sea (X, τ_X) un espacio topológico separado, $A \subseteq X$ es compacto, entonces A es cerrado.

P.D. A^c es abierto

$$x \in A^c \Rightarrow x \notin A.$$

Así, usando (7.a), tenemos que existe $\mathcal{V}_x$ y $\mathcal{U}$ tal que

$$x \in \mathcal{V}_x \quad y \quad A \subseteq \mathcal{U} \quad \text{con } \mathcal{V}_x \cap \mathcal{U} = \emptyset$$

de donde $\mathcal{V}_x \subseteq A^c$. Así, A^c es abierto y A cerrado.

Proposición 7.11
Sea (X, τ_X) un espacio topológico compacto y separado, entonces X es regular

Demostración
Recordemos que (X, τ_X) es regular si X es Q_1 y Q_3.
Así, puesto que (X, τ_X) es separado (Hausdorff), entonces es Q_1, y dado que es compacto, por la proposición anterior, se sigue que si $F \subseteq X$ es cerrado, F es compacto.
Además, por la (proposición 7.9) $\forall x \in A^c$, existe $\mathcal{U}_F$ y $\mathcal{V}_x$ tales que

$$F \subseteq \mathcal{U}_F \quad y \quad x \in \mathcal{V}_x \quad \text{con} \quad \mathcal{U}_F \cap \mathcal{V}_x = \emptyset$$

Así, (X, τ_X) es Regular.

Clase · viernes 27 de agosto de 2021

Ejercicio 1
Sea (X, τ_X) es un espacio topológico. Consideremos A y B dos subconjuntos de X tal que B sea conexo. Supongamos que $B \cap A \neq \emptyset$ y $B \cap A^c \neq \emptyset$. Muestre que B corta a $fr(A)$.

Demostración (Primer intento)
Supongamos que B no corta a $fr(A)$, es decir $B \cap fr(A) = \emptyset$. Por definición, sabemos que

$$fr(A) = \overline{A} \setminus int(A) = \overline{A} \cap int(A)^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

Así, se sigue que $B \cap fr(A) = B \cap \overline{A} \cap int(A)^c = B \cap \overline{A} \cap \overline{A^c} = \emptyset$, no obstante

$$B \cap A \neq \emptyset \quad y \quad B \cap \overline{A^c} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad B \cap \overline{A} \neq \emptyset \quad y \quad B \cap \overline{A^c} \neq \emptyset$$

así

$$B \cap \overline{A} \cap \overline{A^c} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

Clase · martes 31 de agosto de 2021

Compacidad

Proposición 7.12 Sea (X,τ_X) un espacio topológico, si X es compacto, entonces X es normal

Demostración
Puesto que X es regular, entonces es Q_1. Por lo tanto, faltaría mostrar que X es Q_4.
Consideremos A y B conjuntos cerrados disjuntos, como X es regular, se tiene que para todo $b\in B$, existe $\mathcal{V}_b \in \mathcal{V}(b)$ y $\mathcal{U}_b \in \tau_X$ tales que

$$\mathcal{U}_b \cap \mathcal{V}_b = \emptyset$$

y además $b\in \mathcal{V}_b$ y $A \subseteq \mathcal{U}_b$. Así, $\{\mathcal{V}_b\}_{b\in B}$ es un recubrimiento abierto de B, como B es cerrado y X compacto, entonces B es compacto. Así, existe $\{b_1,\dots,b_n\} \in B$ tal que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}_{b_i}.$$

Por otro lado, tomando $U_A = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{b_i}$ y $\mathcal{U}_B = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}_{b_i}$, se tiene que $A \subseteq U_A$ y $B \subseteq U_B$ y además $\mathcal{U}_A \cap \mathcal{V}_B = \emptyset$. Así, (X,τ_X) es Q_4 lo que implica que X es normal

Teorema: 7.13. Sea (X,τ_X) un espacio compacto de Hausdorff, entonces X es normal.

Demostración: Ejercicio

Proposición 7.14. Sea (X,τ_X) un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) (X,τ_X) es compacto
ii) Si β_X es una base de τ_X, entonces todo recubrimiento de X con elementos de β_X posee un subrecubrimiento finito
iii) Existe alguna base $\widehat{\beta}_X$ de τ_X tal que todo recubrimiento abierto de X a partir de elementos de $\widehat{\beta}_X$ posee un subrecubrimiento abierto finito.

Demostración:

(1) ⇒ (2) Automático Puesto que X es compacto.
(2) ⇒ (3) Automático
(3) ⇒ (1)
Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X, mostremos que admite un subrecubrimiento finito. Como $\widehat{\beta}_X$ es una base de τ_X sabemos que

$$\forall i \in I, \text{ existe } \{\widehat{B}_j\}_{j\in J_i} \in \widehat{\beta}_X \text{ tal que } \mathcal{U}_i = \bigcup_{j\in J_i} \widehat{B}_j,$$

entonces

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} \widehat{B}_j = X$$

Si consideramos

$$\mathcal{H} = \bigcup_{i\in I} J_i,$$

tenemos que $\{\widehat{B}_\beta\}_{\beta\in \mathcal{H}}$ es un recubrimiento abierto de X con elementos de $\widehat{\beta}_X$

Por hipótesis, existe $\{\widehat{B}_{\beta_1},\ldots,\widehat{B}_{\beta_n}\}$ tal que

$$\widehat{B}_{\beta_j} \subset U_{\beta_j} = \bigcup_{k\in J_{\beta_j}} \widehat{B_k}$$

y además $X = \bigcup_{j=1}^{n} \widehat{B}_{\beta_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{\beta_j}$. Así, $\{\mathcal{U}_i\}$ admite un subrecubrimiento finito. Por lo tanto, X es compacto.

La siguiente proposición relaciona las funciones continuas y la imagen de conjuntos compactos.

Proposición 7.15
Sea (X,τ_X) y (Y,τ_Y) dos espacios topológicos y f una función tal que $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ continua.

- Si $A\subseteq X$ es compacto, entonces $f(A)$ es compacto en τ_Y.

Demostración:
Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $f(A)$, es decir

$$f(A)\subseteq \bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i \qquad \mathcal{U}_i\in\tau_Y$$

$$A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{U}_i)$$

Se tiene, por continuidad, que $\{f^{-1}(\mathcal{U}_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de A. Como A es compacto, existe $\{\mathcal{U}_{i_1},\ldots,\mathcal{U}_{i_n}\}$ tal que

$$A\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(\mathcal{U}_{i_j}) \qquad \text{Así,} \qquad f(A)\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f(f^{-1}(\mathcal{U}_{i_j}))\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{i_j}$$

Por lo tanto, $f(A)$ es compacto.

Observación:
Si $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$, es una función tal que envía compactos en compactos, eso no implica que f sea continua.

Ejemplo $\quad A\subseteq X \qquad fr(A)\neq\emptyset$

$$\mathbb{1}_A : X\to\{[0,1],\tau_{dis}\}$$

envía compactos pero $\mathbb{1}_A$ no es continua en $\mathbb{1}_A$.

Observación
Sea (X,τ_X) y (Y,τ_Y) tal que sean homeomorfos, es decir, φ biyectiva, φ bicontinua

$(\Rightarrow)$ $A\subseteq X$ compacto, entonces $f(A)$ compacto

$(\Leftarrow)$ $\quad \varphi^{-1}:(Y,\tau_Y)\to(X,\tau_X)$

$$\varphi(A)\mapsto\varphi^{-1}(\varphi(A)) \quad \text{es compacta}$$

$$\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$$

Por lo tanto, es compacto.

Por lo tanto, la compacidad es una propiedad topológica

Proposición 7.16.
Sean (X, τ_X) y $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ tal que (X,τ_X) es compacto, (Y,τ_Y) es de Hausdorff, f continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración
Puesto que f es continua y biyectiva, entonces existe f^{-1}. Así basta probar que f^{-1} es continua.
Recordemos que se tiene los siguientes enunciados equivalentes

i) f es un homeomorfismo
ii) f es continua, biyectiva y abierta
iii) f es continua, biyectiva y cerrada.

Por lo tanto, resta probar que f es cerrada.
Sea A un conjunto no vacío cerrado de X, como $A \subseteq X$ y A cerrado, y X es compacto, entonces A es compacto, así $f(A)$ es compacto en (Y,τ_Y) y como (Y,τ_Y) es compacto y (Y,τ_Y) es de Hausdorff, entonces $f(A)$ es cerrado.

Corolario 7.17.
Sea X un conjunto no vacío sobre el cual se definen dos topologías τ_1, τ_2 tales que (X,τ_1) es compacto, (X,τ_2) es un espacio de Hausdorff y $\tau_2 \subseteq \tau_1$, se tiene que τ_2 es una topología equivalente a τ_1.

Demostración:
Como $\tau_2 \subseteq \tau_1$ se tiene que Id es continua

$$Id:(X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$$

utilizando la proposición 7.16, se tiene que la identidad es un homeomorfismo entre (X,τ_1) y (X,τ_2) es decir, τ_1 y τ_2 son topologías equivalentes en X.

Proposición 7.18.
Sea (X,τ_X) un espacio topológico compacto y supongamos que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, existe

$$f_n:(X,\tau_X) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$$

continua tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ separe puntos en X, entonces (X,τ_X) es metrizable.

Demostración:
Recordemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones continuas de (X,τ_X) en $(\mathbb{K},|\cdot|)$ separa puntos si para todo $x \neq y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_{n_0}(x) \neq f_{n_0}(y)$$

Consideremos

$$\begin{aligned} d: X\times X &\to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} |\tilde{f}_i(x) - \tilde{f}_i(y)| \end{aligned}$$

donde $\tilde{f}_i = f_i / C_i$, entonces para todo $i \in I$ $|\tilde{f}_i(x)| < 1$, donde $C_i(x) = \sup_{x\in X} |f(x)|$

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < 2\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}\right) < +\infty.$$

Como f_n separa puntos en X, se tiene que $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también separa puntos en X. Así, es fácil demostrar que d es una métrica en X. Para demostrar que (X,τ_d) es equivalente a (X,τ_X) utilizaremos el corolario 7.17.

Así como (X, τ_X) es compacto, $(X, \tau d)$ es de Hausdorff, faltaría mostrar que $\tau d \subseteq \tau_X$, así podríamos concluir que $\tau d \approx \tau_X$.

Clase • jueves 2 de septiembre de 2021

Sea $x \in X$ y $r > 0$. P.D $Bd(x,r) = \{ y \in X : d(x,y) < r \}$ es abierto en τ_X

Si $y \in Bd(x,r)$, $\exists V_y \in \mathcal{V}(y)$ para la topología τ_X $V_y \subseteq Bd(x,r)$.

Si $z \in V_y$

$$\begin{aligned} d(z,x) &\leq d(z,y) + d(y,x) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} |f_i(z) - f_i(y)| + d(y,x) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} |f_i(z) - f_i(y)| + \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} |f_i(z) - f_i(y)| + d(x,y) \\ &\leq \underset{\text{vecindad}}{\text{como tome la}} + \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i-1}} + d(x,y) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} |f_i(z) - f_i(y)| + \varepsilon + d(y,x) \\ &\leq \underbrace{\hat{\varepsilon} N}_{\text{caracteización de } V_y} + \varepsilon + d(x,y) \end{aligned}$$

$f_i = \tilde{f}_i$

$V_y = \bigcap_{i=1}^{\tilde{N}} f_i^{-1}(B_{\mathbb{K}}(f(y), \hat{\varepsilon}))$ $V_y \in \tau_X$ ya que $(f_i)_{i \in I}$ es continua de (X, τ_X) en $(\mathbb{K}, |\cdot|)$

$\hat{\varepsilon} N = \frac{1}{2} s$, $\varepsilon = \frac{1}{2} s$ $s = r - d(x,y)$

En primer lugar, como $\sum_{i=1} 1/2^{i-1}$ es convergente, se tiene que $\varepsilon = 1/2 s$, existe $N_s \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=N_s+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i-1}} < \frac{1}{2} s$$

Tomando

$$V_y = \bigcap_{i=1}^{N_s} f_i^{-1}\left(B_{\mathbb{K}}\left(f_i(y), \tfrac{1}{2N_s} s\right)\right)$$

P.D $V_y \subseteq Bd(x,r)$

Si $z \in V_y$ se tiene que $z \in \bigcap_{i=1}^{N_s} f_i^{-1}\left(B_{\mathbb{K}}\left(f_i(y), \tfrac{1}{2N_s} s\right)\right)$

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(y,z) + d(x,y) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} |f_i(y) - f_i(z)| + d(x,y) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} |f_i(y) - f_i(z)| + \sum_{i=N_s+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} |f_i(y) - f_i(z)| + d(x,y) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \left(\frac{1}{2N_s} s\right) + \sum_{i=N_s+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i-1}} + d(x,y) \end{aligned}$$

$$< \frac{s}{2N_s} + \frac{1}{2}s + d(x,y) = s + d(x,y) = r$$

Así, $\tau_d \subseteq \tau_X$. Por lo tanto, utilizando el corolario 7.17 tenemos que $\tau_d \approx \tau_X$. Así, (X,τ_X) es metrizable

Definición 7.19.
Sea (X,τ_X) un espacio topológico y $A \subseteq X$, decimos que A es relativamente compacto, si $\overline{A}$ es compacto en (X,τ_X).

Ejemplo

- Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado de dimensión finita, entonces A es relativamente compacto si y solo si A es acotado.

- Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado de dimensión finitia, entonces si A es relativamente ~~acota~~ compacto, entonces A es acotado.

En general, si (X,d) es un espacio métrico A es relativamente compacto en τ_d entonces A es acotado

Sea $A \subseteq (X,d)$, A es acotado si $\delta(A) < +\infty$

$$\delta(A) = \underset{x,y\in A}{d(x,y)}$$

Como $\overline{A}$ es compacto, en (X,d), se puede mostrar que $\overline{A}\times\overline{A}$ es compacto en $X\times X$ con $\tau_d \times \tau_d$. Así, utilizando que

$$d: X\times X \longrightarrow (\mathbb{R}^+, |\cdot|)$$

es continua, se tiene que $d(\overline{A}\times\overline{A})$ es compacta en $(\mathbb{R}^+, |\cdot|)$ es decir que $d(\overline{A}\times\overline{A})$ es acotada y cerrada, por lo tanto

$$\delta(A) \leq \delta(\overline{A}) \leq +\infty$$

Proposición 7.20
Sea (X,τ_X) un espacio topológico, entonces la unión finita de compactos es compacta.

Demostración
Bastaría mostrar lo siguiente:
Si A_1 y A_2 son conjuntos compactos en (X,τ_X) P.D $A_1 \cup A_2$ es compacto

Sea $\{O_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $A_1 \cup A_2$, así

$$A_1 \cup A_2 \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$$

$$A_1 \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i \quad \text{y} \quad A_2 \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$$

Como A_1 y A_2 son compactos, tenemos que

$$A_1 \subseteq \bigcup_{j\in J} O_j \quad \text{y} \quad A_2 \subseteq \bigcup_{k\in K} O_k$$

Tomando $S = J \cup K$, finito, tenemos que $A_1 \cup A_2$ es compacta.

Observación

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de compactos tal que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ y además (X,τ_X) es separado o de Hausdorff, tenemos que

$$\bigcap_{i\in I} A_i$$

es compacta.

En efecto como $\forall i\in I$, A_i es cerrado (ya que (X,τ_X) es separado) y $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto cerrado no vacío, tenemos que

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j \qquad \text{con } j\in I$$

Es un cerrado dentro de un conjunto compacto. Por lo tanto, $\bigcap_{i\in I} A_i$ es compacto.

- La anterior es válida si asumimos que X tiene el axioma de separación α_1

- Si (X,τ_X) es únicamente es un espacio topológico y A_1 y A_2 compactos, se tiene o no $A_1\cap A_2$ es compacto, $A_1\cap A_2\neq\emptyset$ (Falso)

- Si $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de compactos tal que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ se tiene o no que $\bigcap_{i\in I} A_i$ es compacto. (Falso)

Contraejemplos, ejercicio

Definición 7.21

Sea (X,τ_X) un espacio topológico $A\subseteq X$, decimos que A es secuencialmente compacto si toda sucesión de A, admite una subsucesión que converge en A

Es decir, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$, existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $x\in A$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$$

en (X,τ_X).

Observación:

Análogamente que antes, diremos que $A\subseteq X$ es relativamente secuencialmente compacta. Es decir, que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $x\in\bar{A}$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$$

Ejemplos

Se verá que en espacios métricos, A es secuencialmente compacto, si y solamente si A es compacto.

Observación:

- Sabemos que si (X,τ_X) es compacto y A es cerrado, entonces A es compacto
- Si (X,τ_X) es separado, $A\subseteq X$ compacto, entonces A es cerrado

¿Se puede tener las proposiciones análogas para S. compacto?

¿Si A es secuencialmente compacto, entonces $\bar{A}=[A]$?

3) ¿Si A_1 y A_2 son s. compactos, $A_1 \cup A_2$ son s. compactos?

Respuesta 1.

Si (X, τ_X) es secuencialmente compacto,

A es cerrado entonces A es secuencialmente compacto, en efecto si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, como X es secuencialmente compato. existe $x \in X$ y $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x$$

Así, $x \in [A] \subseteq \bar{A} = A$, por lo tanto A es secuencialmente compacto

- Si X es s. compacto y A es s. cerrado, $[A] = A$, entonces A es s. compacto.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, como X es secuencialmente compacto, existe $x \in X$ y $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x$$

Así, $x \in [A] = A$.

Por lo tanto, A es secuencialmente compacto

- Supongamos que (X, τ_X) es separado

$A \subseteq X$ s. compacto, entonces ¿A cerrado? ¿A secuencialmente cerrado?

Si $A \subseteq X$, secuencialmente compacto

P.D. A es s. cerrado.

$[A] = A$. Siempre se tiene que $A \subseteq [A]$. P.D. $[A] \subseteq A$.

Sea $x \in [A]$, entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

Por otro lado, como A es secuencialmente compacto, tenemos que existe $(x_n)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de (x_n) que converge en A, por la unicidad del límite (X, τ_X) es separado) de donde $x \in A$. Así, A no es cerrado

- Si A es secuencialmente compacto, no implica que A es cerrado.

Respuesta 3

A_1, A_2, secuencialmente compacto. $A_1 \cup A_2$ secuencialmente compacto

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_1 \cup A_2$ P.D Existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una s. sucesión convergente

$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A_1\}$

$n_2 = \min\{n \in \mathbb{N}, n > 1 : x_n \in A_1\}$

$\vdots$

$n_k = \min\{n \in \mathbb{N} : n_k > n_{k-1} : x_n \in A_1\}$

tomemos $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una s. sucesión de A_1, entonces como A_1 es s. compacto, tenemos que existe una nueva s. sucesión (que la notaremos de la misma forma) tal que converge en A_1. Por lo tanto (x_{n_k}) es una subsucesión que convergen en $A_1 \cup A_2$

Así, $A_1 \cup A_2$ es secuencialmente compacto.

Clase • jueves 9 de septiembre de 2021

Definición 7.22

Sea (X, τ_X) un espacio topológico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X. Diremos que $x\in X$ es un valor adherente de la sucesión si para toda $V_x \in \mathcal{V}(x)$, el conjunto $\{n\in\mathbb{N} : x_n \in V_x\}$ es un conjunto infinito.

Ejemplos

- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un valor adherente

En efecto, si $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es la subsucesión convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Por lo tanto, para toda $V_x\in\mathcal{V}(x)$, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $k\geq k_0$ $x_{n_k}\in V_x$. Por tanto, el conjunto

$$\{k\in\mathbb{N} : x_{n_k}\in V_x\}$$

es infinito. Así, x es un valor adherente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- La sucesión $(-1)^n$, por lo dicho anteriormente, (-1) y (1) son valores adherentes de la sucesión $(-1)^n$.

Observaciones

- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un valor adherente, eso no implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea convergente
- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en (X, τ_X) tal que admita un valor adherente eso no implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente

Definición 7.23

Sea (X, τ_X) un espacio topológico, decimos que (X,τ_X) admite la propiedad de Bolzano-Weisstraes (B-W) si toda sucesión de X admite un valor adherente.

Observación

- Si (X, τ_X) es un espacio secuencialmente compacto, admite la propiedad B-W
- Si (X, τ_X) es un espacio topológico compacto, entonces X admite la propiedad de (B-W)

Lema 7.24

Sea (X, τ_X) un espacio de Hausdorff (separado) y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X. Si consideramos $A = \{x_n : n\in\mathbb{N}\}$, entonces

$$\overline{A} = A \cup \{\text{valores adherentes de } x_n\}.$$

En particular, si A no admite valores adherentes, A es cerrado.

Demostración.

Es claro que $A\cup\{\text{valores adherentes}\}\subseteq\overline{A}$. Sea $x\in\overline{A}$ y $x\notin A$.
P.D $x\in\{\text{valores adherentes}\}$
Supongamos por absurdo que existe $x\in\overline{A}$, $x\notin A$ tal que

$$x\notin\{\text{valores adherentes}\}$$

Entonces existe $\hat{V}_x\in\hat{\mathcal{V}}(x)$ tal que

$$\{n\in\mathbb{N} : x_n\in\hat{V}_x\}$$

es finito. Es decir que $A\cap\hat{V}_x = \{x_{n_1},\dots,x_{n_k}\}$ Como (X,τ_X) es un espacio topológico de Hausdorff, entonces para todo $i\in\{1,\dots,k\}$, existe V_i^x vecindad abierta de x tal que $x_{n_i}\notin V_i^x$. Tomando $U^x = V_x^1\cap V_x^2\cap\cdots\cap V_k^x$. U^x es una vecindad de x al ser intersección finita de vecindades y además

$$A \cap \mathcal{U}^* = \emptyset.$$

Por lo tanto, $x \notin \overline{A}$, lo cual es absurdo.

Observación

Si consideramos (X, τ_X) un espacio topológico con ~~la propiedad~~ el axioma de separación C_{I}, entonces el lema 7.24 es válido.

Proposición 7.25 de Hausdorff

Todo espacio topológico (X, τ_X) compacto, admite la propiedad (B-W)

Demostración:

Supongamos que existe (X, τ_X) un espacio topológico compacto que no admita la propiedad B-W, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que no admite valores adherentes

Definimos, para todo $p \in \mathbb{N}$ fijo,

$$A_p := \{x_n : n \geq p\}$$

Por hipótesis A_p es cerrado para todo $p \in \mathbb{N}$, (lema 7.24).

Además

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p = \emptyset$$

En efecto, si suponemos por absurdo que $a \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p$.

P.D! a es un valor adherente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lo cual sería absurdo.

Sea $\mathcal{U}_a \in \mathcal{V}(a)$, entonces, como para todo $p \in \mathbb{N}$ $a \in A_p$, se sigue que, existe $n_p \in \mathbb{N}$, con $n_p \geq p$, tal que $a = x_{n_p}$, en particular

$$\{k \in \mathbb{N} : x_k \in V_a\}$$

lo cual contradice nuestra hipótesis. Se tiene que $\{A_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ es una familia de cerrados no vacía tal que

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p = \emptyset$$

Como (X, τ_X) es compacto, existe $\{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{p_i} = \emptyset$$

Además, por definición

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{p_i} = A_{p_{máx}}$$

donde $p_{máx} = \{p_1, \dots, p_n\}$. Por lo tanto, $A_{p_{máx}} = \emptyset$, lo cual es absurdo

Observación

Hemos demostrado que

- Si (X, τ_X) es secuencialmente compacto, entonces admite la propiedad de B-W.
- Si (X, τ_X) es separado (o C_{I}) y compacto, entonces X admite la propiedad de B-W
- Las recíprocas en espacios topológicos generales son falsos.

- Si (X,τ_X) es compacto, entonces no necesariamente es secuencialmente compacto.
- Si (X,τ_X) es secuencialmente compacto, no necesariamente (X,τ_X) es compacto.

Proposición 7.26.
Sea (E,d) un espacio métrico, los siguientes enunciados son equivalentes:
i) E es compacto
ii) E es secuencialmente compacto
iii) E admite la propiedad B-w
iv) E es completo y precompacto

Definición 7.27
Sea (E,d) un espacio métrico, entonces decimos que $A\subseteq E$ es precompacto si para todo $\varepsilon>0$ existe un número finito de elementos de $\{x_{1_\varepsilon},\dots,x_{n_\varepsilon}\}\subseteq A$ tal que

$$A\subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(x_i,\varepsilon)$$

Lema. 7.28.
Sea (E,d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E, los siguientes enunciados son equivalentes

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un valor adherente
ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente en (E,d)

Demostración
ii) $\Rightarrow$ i) Trivial
i) $\Rightarrow$ ii)
Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un valor adherente en (E,d) es decir, existe $x\in E$ tal que $V_x\in\mathcal{V}(x)$ $\{n\in\mathbb{N}: x_n\in V\}$ es infinito $\}$.

En particular, $B(x,1/n)$ con n fijo

$$A_n=\{k\in\mathbb{N}: x_k\in B(x/1/n)\}$$

es infinito, consideramos

$$N_1=A_1,\qquad N_2=A_2\setminus N_1\qquad\dots\qquad N_n=A_n\setminus N_{n-1}$$

Así, podemos considerar $n_1=\min\{n\in N_1\}$, $n_2=\min\{n\in N_2\},\dots, n_k=\min\{n\in N_k\}$, por lo tanto, para todo $k\in\mathbb{N}$

$$x_{n_k}\in B(x,1/k),$$

es decir, $d(x_{n_k},x)<1/k$, tomando el límite cuando $k\to+\infty$

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k},x)=0$$

Así, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x. Lo que muestra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente.

Observación
Si suponemos (X,τ_X) es un espacio topológico con la propiedad T_1, entonces el lema 7.28 es válido.

Demostración (7.26)
Por el lema (7.28), nos resta mostrar que E es compacto si y solo si E es secuencialmente compacto si y solo si es precompacto y completo.

(a) $\Rightarrow$ (b) Usanto la proposición 7.25 y el lema 7.28
(b) $\Rightarrow$ (c)
Supongamos que (E,d) es un espacio métrico secuencialmente compacto, P.D. E es completo y precompacto

P.D. E es completo
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. P.D. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Como (E,d) es secuencialmente compacto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente. Por lo tanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y admite una subsucesión convergente. Lo cual implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

P.D. (E,d) es precompacto

Supongamos por el absurdo que (E,d) no es precompacto,
Por absurdo, supongamos que E no es precompacto, así, existe $\hat{\varepsilon}>0$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ y para todo $\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq E$, tal que

$$E \neq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\hat{\varepsilon})$$

Tomando $x_1\in E$ fijo, sabemos que $E\neq B(x_1,\hat{\varepsilon})$, es decir que $x_2\notin E$ tal que $x_2\notin B(x_1,\hat{\varepsilon})$ $(d(x_1,x_2)>\hat{\varepsilon})$. Así mismo, $E\neq \bigcup_{i=1}^{2} B(x_i,\hat{\varepsilon})$ y por lo tanto existe $x_3\in E$ tal que $x_3\notin \bigcup_{i=1}^{3} B(x_i,\hat{\varepsilon})$ $(d(x_3,x_2)\geq\hat{\varepsilon}$ y $d(x_3,x_1)\geq\hat{\varepsilon})$.

Así, podemos construir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$

$$x_n\notin \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i,\hat{\varepsilon})$$

Por lo tanto, para todo $n,m\in\mathbb{N}$

$$d(x_n,x_m)\geq\hat{\varepsilon}.$$

Lo cual implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no admite ninguna subsucesión convergente.

Ahora, mostremos que (c) $\Rightarrow$ (b), para después mostrar que (c) y (b), $\Rightarrow$ (a)

Supongamos que (E,d) es completo y precompacto. P.D. (E,d) es secuencialmente compacto.

Clase · viernes 10 de septiembre de 2021

Demostración
Sea (E,d) un espacio métrico tal que (E,d) completo y precompacto.
P.D. Es secuencialmente compacto.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de E. P.D. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente

Como E es precompacto, tomando $\varepsilon=1$ existe un número finito de bolas de radio 1 tal que su unión es igual a E. Así, existe una bola de radio 1 notada como B_1 tal que contiene un número infinito de elementos de (x_n). Tomando

$$N_1=\{n\in\mathbb{N}^*: x_n\in B_1\}$$

tenemos que N_1 es un conjunto infinito de naturales. Con el mismo razonamiento tenemos que existe una bola de radio 1/2 notada como B_2 tal que contiene un número infinito de elementos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tomando

$$N_2=\{n\in N_1: x_n\in B_n\}$$

Así, podemos construir una sucesión de conjuntos infinitos de naturales $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de bolas tal que verifican lo siguiente:

$$\forall k\in\mathbb{N} \qquad N_k \subseteq N_{k-1} \subset \cdots \subset N_2 \subset N_1$$

y que para todo $n\in\mathbb{N}$ B_n, es una bola abierta de radio $1/n$. Tomando

$$n_1 = \inf\{n\in N_1\}$$

$$n_2 = \inf\{n\in N_2\}\setminus\{n_1\}$$

$$\vdots$$

$$n_k = \inf\{n\in N_2\}\setminus\{n_{k-1}\}$$

Así, logro construir una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. P.D. $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, tomando $j\geq i$, se tiene que n_j pertenece a $N_j \subseteq N_i$ y $n_i\in N_i$. Es decir que x_{n_j} y x_{n_i} pertenecen a la bola B_i, donde B_i es la bola de radio $1/i$

$$d(x_{n_j}, x_{n_i}) \leq d(x_{n_j}, z) + d(z, x_{n_i})$$

$$< \frac{2}{i}$$

donde z es el centro de la bola B_i. Así, hemos demostrado que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Utilizando el hecho de que E es completo, tenemos que (x_{n_k}) es convergente en E.

Por último, mostremos que
(b) y (c) $\Rightarrow$ (a).

En primer lugar, mostremos que

$$\exists\delta>0 \text{ tal que } \forall x\in E \quad \exists i_x\in I \text{ tal que } B(x,\delta)\subseteq U_i$$

Recordemos que estamos tomando $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de E.

Por absurdo, supongamos que es falso, es decir que $\forall\delta>0$ $\exists x_\delta\in E$ tal que $\forall i\in I$ $B(x_\delta,\delta_i)\nsubseteq U_i$. En particular, si $\delta=1/n$, existe $x_n\in E$ tal que $\forall i\in I$

$$B(x_n, 1/n)\subseteq U_i \qquad \forall i\in I$$

Tomando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión con la propiedad anterior, tenemos que al ser E, secuencialmente compacto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente; es decir, existe (x_{n_k}) y $x\in E$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$$

Como $x\in E$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto, de E, detenemos que existe $i_0\in I$ tal que $x\in U_{i_0}$ y como U_{i_0} es abierto, existe $r_{i_0}>0$ tal que $B(a, r_{i_0})\subseteq U_{i_0}$. Tomando k suficientemente grande, tal que

$$\frac{1}{n_k} < \frac{1}{2r_{i_0}}$$

tenemos que $B(x_{n_k}, 1/n_k)\subseteq U_{i_0}$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, existe

$\delta>0$ tal que para todo $x\in X$, existe $i_x \in I$ tal que $B(x,\delta)\subset \beta i_x$

Como E es precompacto, existen $\{y_1,\dots,y_n\}\in E$ tal que

$$E=\bigcup_{p=1}^{n}(B_{y_p},\delta)$$

Además, utilizando que para todo $p\in\{1,\dots,k\}$ existe $i_p\in I$ tal que $B(y_p,\delta)\subseteq \mathcal{U}_{i_p}$.
tenemos que

$$E=\bigcup_{p=1}^{k}\mathcal{U}_{i_p}.$$

Así, $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ admite un subrecubrimiento finito.

Corolario 7.29.
Sea (E,d) un espacio métrico completo, los siguientes enunciados son equivalentes.
i) $A\subseteq E$ es relativamente compacto;
ii) $A\subseteq E$ es relativamente secuencialmente compacto;
iii) A es precompacto

Demostración
(i) $\Leftrightarrow$ (ii) evidente

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Como $\bar{A}$ es compacto, se tiene que todo recubrimiento abierto de $\bar{A}$ admite un subrecubrimiento abierto, en particular el de las bolas abiertas.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que A es precompacto, P.D. $\bar{A}$ es secuencialmente compacto

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$. P.D. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una sucesión convergente.
El razonamiento es análogo al que hicimos en la proposición

Teorema de Arzela - Ascoli
Consideremos (K,τ_K) un espacio topológico separado y compacto, y consideramos (X,τ_X) un espacio topológico, definimos

$$\mathcal{C}(K,X)=\{f:(K,\tau_K)\rightarrow(X,\tau_X) \text{ continuas}\}$$

En particular, si suponemos que K es un espacio métrico compacto (K,d) y (X,d_X) un espacio métrico, en particular podemos definir una métrica en $\mathcal{C}(K,X)$, de la siguiente manera.

$$f,g\in\mathcal{C}(K,X) \qquad d_\infty(f,g)=\max_{x\in K} d_X(f(x),g(x))$$

Es fácil mostrar que $d_\infty(\cdot,\cdot)$ es una métrica en $\mathcal{C}(K,X)$. Por tanto, sobre $\mathcal{C}(K,X)$ podemos considerar la topología inducida por d_∞, notada por τ_{d_∞} $(\mathcal{C}(K,X),d_\infty)$ espacio métrico

Si además (X,d_X) es completo, entonces $(\mathcal{C}(K,X),d_\infty)$ es completo. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $\mathcal{C}(K,X)$, es decir $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $p,q\geq n_0$

$$d_\infty(f_p,f_q)<\varepsilon$$

$$\sup_{x\in K} d_X(f_p(x),f_q(x))<\varepsilon$$

con $x\in K$

$\forall p,q \geq n_0 \quad d_X(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$

$\forall x \in K \quad (f_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (X, d_X). Como X es completo, $\exists f(x)$ tal que

$$\lim_{p\to\infty} f_p(x) = f(x)$$

Así, podemos definir

$$f: K \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto f(x) = \lim_{p\to\infty} f_p(x)$$

f es una función. P.D. f es continua y $\lim_{p\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$

Sea $x\in K$ $\quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

P.D. $\quad \lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$.

En primer lugar, sabemos que, dado $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\forall p,q \geq n_0$ se tiene que

$$d_\infty(f_p, f_q) < \varepsilon$$

$$\sup_{x\in K} d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$$

Como K es compacto y d, f_p, f_q son continuas, tenemos que existe $\hat{x}\in K$ tal que

$$\sup_{x\in X} d(f_p(x), f_q(x)) = d_X(f_p(\hat{x}), f_q(\hat{x}))$$

Sea $y\in K$, tenemos que $p\geq n_0$, $q \geq n_0$

$$\begin{aligned} d_X(f_p(y), f(y)) &\leq d_X(f_p(y), f_q(\hat{x})) + d_X(f_q(\hat{x}), f(y)) \\ &\leq d_X(f_p(y), f_q(y)) + d_X(f_p(y), f_p(\hat{x})) \\ &\leq 1 + d_X(f_q(\hat{x}), f(y)) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Clase • Lunes 13 de septiembre de 2021

Teorema de Tyconoff - 7.30
Sea $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $\prod_{i\in I} X_i$ el espacio producto asociado a dicha familia, entonces $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I}\tau_i)$ es compacto si y solo si para todo $i\in I$ (X_i, τ_i) es un espacio topológico compacto.

Demostración
$\Rightarrow$ Supongamos que $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I}\tau_i)$ es un espacio topológico compacto.
P.D. $\forall i\in I$ (X_i, τ_i) es un espacio topológico compacto.

Como $p_i: (\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I}\tau_i) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$ es continua y $\prod_{i\in I} X_i$ es compacto en $\prod_{i\in I}\tau_i$ tenemos que

$$p_j\left(\prod_{i\in I} X_i\right) = X_i$$

Es compacto, para la topología τ_j, por lo tanto (X_j, τ_j) es un espacio topológico compacto.

$\Leftarrow$) Supongamos que para todo $i \in I$ (X_i, τ_i) es un espacio topológico compacto.

* Esta implicación, será dividida en dos partes, cuando $|I|$ es finita y cuando $|I|$ no es finita *

→ En este caso tanto la topología producto como la topología cajas coinciden. Así, es suficiente considerar $|I| = 2$.

Supongamos que (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) son dos espacios topológicos compactos. P.D. $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ es un espacio topológico.

Sea $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $X_1 \times X_2$

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$$

Sea $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, existe $j \in I$ tal que $(x_1, x_2) \in \mathcal{O}_j$. Así, existe $\omega_1 \in \tau_1$ y $\omega_2 \in \tau_2$ tales que

$$(x_1, x_2) \in \omega_1 \times \omega_2 \subset \mathcal{O}_{j_x}$$

Sea $x_2 \in X_2$, fijo, entonces

$$\bigcup_{x_1 \in X_1} \omega_1^{(x_1, x_2)} \times \{x_2\}$$

es un recubrimiento abierto de $X_1 \times \{x_2\} \approx X_1$. Como X_1 es un espacio topológico compacto, tenemos que $X_1 \times \{x_2\}$ es compacto. Por tanto, existe $N_{(x_2)} \in \mathbb{N}$ y $\{x_1^1, \dots, x_1^{N(x_2)}\} \in X_1$ tal que

$$X_1 \times \{x_2\} = \bigcup_{k=1}^{N(x_2)} \omega_1^{(x_1^k, x_2)} \times \{x_2\}$$

$$\omega(x_2) = \bigcap_{k=1}^{N(x_2)} \omega_2^{(x_1^k, x_2)}$$

es un abierto en τ_2. Así, $\{\omega(x_2)\}_{x_2 \in X_2}$ es un recubrimiento abierto de X_2.

$$X_2 = \bigcup_{x_2 \in X_2} \omega(x_2)$$

y, por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n\} \in X_2$ tales que verifican que

$$X_2 = \bigcup_{k=1}^{N} (x_2^k)$$

$$X_1 \times X_2 = X_1 \times \left(\bigcup_{k=1}^{N} \omega(x_2^k)\right) = \bigcup_{k=1}^{N} \left[\bigcup_{l=1}^{N(x_2^k)} \omega^1(x_1^l, x_2^k) \times \omega(x_2^k) \right]$$

$$\subseteq \bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{l=1}^{N(x_2^k)} \omega^1(x_1^l, x_2^k) \times \omega^2(x_1^l, x_2^k)$$

$$\subseteq \bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{l=1}^{N(x_2^k)} \mathcal{V}_i(x_1^l, x_2^k)$$

Por lo tanto,

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{l=1}^{N(x_2^k)} \mathcal{V}_i(x_1^l, x_2^k)$$

Así, $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$ admite un subrecubrimiento finito

- Caso $|I|$ no es finito

Este caso es un poco más delicado y necesitamos introducir nuevos conceptos.

Definición 7.31

Sea (X, τ_X) un espacio topológico, decimos que X tiene la propiedad de intersección finita si para cada subcolección finita $\{F_1, \dots, F_n\} \subset \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ es la familia de de cerrados $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$), se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$$

Teorema 7.32.

Sea (X_X, τ_X) un espacio topológico, X es compacto si y solo si toda familia $\mathcal{F}$ de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita, tiene intersección finita

$$X \text{ es compacto si y solo si } \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \neq \emptyset$$

$\mathcal{F}$ es una familia de cerrados con la propiedad de intersección

$\Rightarrow$) Supongamos que X es compacto

P.D. Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita, entonces

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$$

Por absurdo, supongamos que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} = \emptyset$, $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F^c = X$. Como X es un espacio topológico compacto tenemos el recubrimiento abierto $\{F^c\}_{F\in\mathcal{F}}$, ya que para todo $F \in \mathcal{F}$, F es cerrado, admite un subrecubrimiento finito. Es decir, $\exists \{F_{i_1}, \dots, F_{i_n}\} \in \mathcal{F}$ tal que

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k}^c = X \quad \text{es decir} \quad \bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} = \emptyset$$

lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita.

$\Leftarrow$)

Supongamos que para todo $\mathcal{F}$ familia de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita, su intersección es no vacía

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$$

P.D. X es compacto.

Sea $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. P.D. $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ admite un subrecubrimiento finito. Por el absurdo supongamos que no. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\{V_1, \dots, V_n\}$ elementos del recubrimiento abierto $\{V_i\}_{i\in I}$, tenemos que

$$X \neq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \iff \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i^c \neq \emptyset$$

Esto implica que la familia de cerrados $\{\mathcal{U}_i^c\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de intersección finita. Por lo tanto, utilizando nuestra hipótesis, tenemos que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i^c \neq \emptyset$.

Es decir, $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \neq X$ lo cual es absurdo pues $\{V_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto.

Definición 7.33.
Sea X un conjunto no vacío sobre el cual se define una relación $\leq$, diremos que $\leq$ es una relación de orden si

i) $x \leq x \quad \forall x \in X$ (reflexiva)
ii) si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $y = x$ (antisimétrica)
iii) $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$ (transitiva) $\quad \forall x, y, z \in X$

$(X, \leq)$ es llamado un conjunto parcialmente ordenado. Además, diremos que $(X, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado (cadena) si

$\forall x \in X \quad \forall y \in X$ se tiene que $\quad x \leq y \quad$ o $\quad y \leq x$.

Definición 7.34.
Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $a \in X$. Decimos que a es un elemento maximal de X si no existe ningún elemento $b \in X$ tal que $a \leq b$ y $b \neq a$

Definición 7.35
Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subset X$, decimos que x es una cota superior de A si para todo $a \in A \quad a \leq x$.

Lema 7.36.- Lema de Zorn-
Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado tal que para cualquier cadena $A \subseteq X$ se tiene que A posee ~~un~~ una cota superior, entonces X admite un elemento maximal

Lema 7.37
Sea (X, τ_X) un espacio topológico, $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos de X con la propiedad de intersección finita, entonces definimos

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \{ \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{F} \subset \mathcal{B} \text{ y } \mathcal{B} \text{ tiene la propiedad de intersección finita} \}$$

Entonces $(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}, \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado y además admite un elemento maximal.

Es decir existe $\mathcal{G} \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ $\begin{cases} \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \\ \mathcal{G} \text{ tiene la propiedad de intersección finita} \end{cases}$

$\mathcal{G}$ es un elemento maximal

Demostración
En primer lugar, note que $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ ya que $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Para utilizar el lema de Zorn, necesitamos mostrar que toda cadena de $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ admite una cota superior. Sea $\mathbb{B}$ una cadena de $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Es decir, $(\mathbb{B}, \subseteq)$ es un conjunto totalmente ordenado.
Sea $\mathcal{H} = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} \mathcal{B}$. P.D. $\mathcal{H}$ es una cota superior de $\mathbb{B}$

En primer lugar, P.D. $\mathcal{H} \in A_f$
Como para todo $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $f \subseteq B \subseteq \mathcal{H}$

P.D. $\mathcal{H}$ tiene la propiedad de intersección finita

Sea $(C_1, \ldots, C_n) \in \mathcal{H}$ P.D. $\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$,

Como para todo $i \in I$, $C_i \in \mathcal{H}$ $\exists B_i \in \mathcal{B}$ tal que $C_i \in B_i$. Como $\mathcal{B}$ es totalmente ordenado, existe B_k el máximo $k \in \{1, \ldots, n\}$ de $\{B_1, \ldots, B_n\}$. Así, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $C_i \in B_k$. Como cada B_k tiene la propiedad de intersección finita, tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$$

lo que muestra que $\mathcal{H} \in A_f$
Faltaría mostrar que $\mathcal{H}$ es una cota superior de $\mathcal{B}$

Sea $C \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{H} \subset C$ P.D $\mathcal{H} = C$

Como $C \in \mathcal{B}$ se tiene que

$$C \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \mathcal{H}$$

Por tanto, $\mathcal{H} = C$. Así, utilizando el lema de Zorn, tenemos que existe $G \in A_f$ tal que G es un elemento maximal A_f.

Clase. martes 14 de septiembre de 2021

Demostración (Continuación)

Notemos $X = \prod_{i \in I} X_i$ y consideremos f una familia de cerrados de X con la propiedad de intersección finita

P.D. $\bigcap_{F \in f} F \neq \emptyset$ (prop 7.32)

Por el lema 7.37 sabemos que existe $\mathcal{G}$ una familia de conjuntos con la propiedad de intersección finita tal que $f \subseteq \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ es maximal.

P.D. i) la intersección de cualquier número finito de elementos de $\mathcal{G}$, también pertenece a $\mathcal{G}$

ii) Si un conjunto $A \subset X$ interseca a la intersección de cualquier número finito de elementos de $\mathcal{G}$, entonces $A \in \mathcal{G}$.

Parte 1)
Sea $H = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ donde $G_i \in \mathcal{G}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. P.D. $H \in \mathcal{G}$. $H \neq \emptyset$. Además $\{H\} \cup \mathcal{G}$ es una familia de conjuntos con la propiedad de intersección finita y además

$$f \subset \{H\} \cup \mathcal{G}$$

Por la maximalidad de $\mathcal{G}$, tenemos que $\mathcal{G} = \{H\} \cup \mathcal{G}$, lo que implica que $H \in \mathcal{G}$.

Parte 2)
Sea $A \subseteq X$ tal que A ~~interseca cualquier intersecca~~ cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{G}$. P.D. $A \in \mathcal{G}$

$$\{A\} \cup \mathcal{G} \supset \mathcal{G}$$

$$\{A\} \cup \mathcal{G} \supset \mathcal{f}$$

P.D. $\{A\} \cup \mathcal{G}$ tiene la propiedad de intersección finita.

Sean $\{G_1, \dots, G_n\}$ elementos de $\mathcal{G}$. P.D. $A \cap \bigcap_{i=1}^{n} G_n \neq \emptyset$

Por hipótesis, A interseca cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{G}$. Así, $A \cap \bigcap_{i=1}^{n} G_i \neq \emptyset$
Utilizando la maximalidad de $\mathcal{G}$ se concluye que

$$\mathcal{G} \cup \{A\} = \mathcal{G} \iff A \in \mathcal{G}$$

Sea $i \in I$. $\quad \pi_i : X \longrightarrow X_i \quad$ (proyección canónica
$$x = (x_i)_{i \in I} \longmapsto \pi_i(x) = x_i$$

Definimos $\mathcal{H}_i := \{\overline{\pi_i(G)} \subset X_i : G \in \mathcal{G}\}$. P.D. $\mathcal{H}_i$ es una familia de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita.

Sea $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}$. P.D. $\bigcap_{j=1}^{n} \overline{\pi_i(G_j)} = \emptyset$. Como $\mathcal{G}$ tiene la propiedad de intersección finita, tenemos que

$$\bigcap_{j=1}^{n} G_j \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \overline{\bigcap_{j=1}^{n} G_j} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{j=1}^{n} \overline{G_j} \neq \emptyset$$

Por lo tanto, $\pi_i\left(\overline{\bigcap_{j=1}^{n} G_j}\right) \neq \emptyset$. Utilizando que π_i es continua $(\pi_i(\overline{A}) \subseteq \overline{\pi_i(A)})$, tenemos que

$$\overline{\pi_i\left(\bigcap_{j=1}^{n} G_j\right)} \subseteq \overline{\pi_i\left(\bigcap_{j=1}^{n} G_j\right)} \subseteq \overline{\bigcap_{j=1}^{n} \pi_i(G_j)} \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \overline{\pi_i(G_j)}$$

Como $\pi_i\left(\overline{\bigcap_{j=1}^{n} G_j}\right) \neq \emptyset$, tenemos que $\bigcap_{j=1}^{n} \overline{\pi_i(G_j)} \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{H}_i$ es una familia de conjuntos cerrados de X_i, que tiene la propiedad de intersección finita

Además, ultilizando que (X_i, τ_i) es un espacio topológico compacto, tenemos que la intersección de elementos de $\mathcal{H}_i$ es no vacía. Es decir, existe $x_i \in \bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{\pi_i(G)}$ (*)

Así, podemos considerar $x = (x_i)_{i \in I}$ tal que para todo $i \in I$ x_i verifique (*). Ahora mostremos que

$$x \in \bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{G}$$

Sin pérdida de generalidad, mostremos que para cualquier cilindro abierto que contenga a «x», se tiene que la intersección con $G \in \mathcal{G}$ es no vacía

$$\text{Sea } x \in \underbrace{Cyl(U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n})}_{\mathcal{U}} \; (\forall j \in \{1, \dots, n\} \; \pi_{\alpha_i}(x) = x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i} \quad U_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i})$$

P.D. $G \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \quad \forall G \in \mathcal{G}$

Notemos que para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ U_{α_j} es una vecindad de x_{α_j} y además que utilizando (*) U_{α_i} interseca a $\pi_{\alpha_i}(G)$ $\forall G \in \mathcal{G}$

Por lo tanto, $Cyl(U_{\alpha_i}) = \pi^{-1}_{\alpha_j}(U_{\alpha_j})$ interseca a cada uno de los elementos de $\mathcal{G}$. En particular.

$$Cyl(U_{\alpha_j}) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) \neq \emptyset$$

en $\{G_1,\ldots,G_n\}\in\mathcal{G}$. Por tanto, utilizando el literal ii) tenemos que para todo $j\in\{1,\ldots,n\}$ $Cyl(U_{\alpha_j})\in\mathcal{G}$.

Por lo tanto, utilizando el literal i) tenemos que

$$Cyl(U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_n})=\bigcap_{j=1}^{n}\pi_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})$$
$$=\bigcap_{j=1}^{n} Cyl(U_{\alpha_j})\in\mathcal{G}$$

Como $\mathcal{G}$ tiene la propiedad de intersección finita, tenemos que

$$Cyl(U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_n})\cap G\neq\emptyset \qquad \forall G\in\mathcal{G}$$

Así, $x\in\bigcap_{G\in\mathcal{G}}\overline{G}$ $\qquad \bigcap_{G\in\mathcal{G}}\overline{G}\neq\emptyset$

Por lo tanto, se sigue que

$$\emptyset=\bigcap_{G\in\mathcal{G}}\overline{G}\subset\bigcap_{G\in\mathcal{G}}G\subset\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F \qquad (\text{ya que } \mathcal{F}\subset\mathcal{G})$$

Así, se concluye que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F=\emptyset$, con lo cual se muestra que X es compacto.

Espacios localmente compactos.

Definición 7.38.

Sea (X,τ_X) un espacio topológico, decimos que X es un espacio localmente compacto si para $x\in X$ y para cada $\mathcal{U}_x$ vecindad de x, existe un abierto relativamente compacto tal que

$$x\in\mathcal{V}\subset\overline{\mathcal{V}}\subset\mathcal{U}_x.$$

Ejemplos: Si $(E,\|\cdot\|_E)$ es un espacio vectorial normado, tal que la dimensión de E sea finita, entonces $(E,\|\cdot\|_E)$ es un espacio localmente compacto

En efecto, si $x\in E$ y $\mathcal{U}_x$ una vecindad de x, entonces existe $r_x>0$ tal que $B(x,r_x)\subseteq\mathcal{U}_x$. Así, existe $s_x>0$ tal que

$$x\in B(x,s_x)\subseteq\overline{B(x,s_x)}=\overline{B}(x,s_x)\subset B(x,r_x)\subset\mathcal{U}_x$$

Donde $\overline{B}(x,s_x)$ es acotado y cerrado si y solo si $\overline{B}(x,s_x)$ es compacto (dimensión finita).

- Si $(E,\|\cdot\|_E)$ espacio normado de dimensión infinita $(E,\tau_{\|\cdot\|})$ no es localmente compacto si lo fuera $\overline{B}_E$ sería compacta si y solo si dimensión de E es finita. (Teorema de Riez) lo cual contradice nuestra hipótesis.

Observación

En general, tener una topología que sea localmente compacta nos permite mejorar ciertos resultados en análisis funcional.

Lo que se hace es construir una topología más pequeña que la topología $\tau_{\|\cdot\|}$ tal que esta topología sea localmente compacta.

Ejemplo: Las topologías débiles en espacios de Banach de dimensión infinita.

Proposición 7.39.
Sea (X,τ_X) un espacio topológico separado, X es localmente compacto si tiene una vecindad $\mathcal{U}_x$ es relativamente compacta

Demostración

$\Rightarrow$ Si X es localmente compacto entonces para cada $x \in X$, existe $\mathcal{U}_x$ una vecindad relativamente compacta.

$\Leftarrow$ Supongamos que para cada $x \in X$, existe $\mathcal{U}_x$ una vecindad de x, tal que $\overline{\mathcal{U}_x}$ es compacta.
P.D. X es localmente compacto.
Sea $\mathcal{V}_x \in \mathcal{V}(x)$. P.D. $\exists\, \mathcal{W}_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $\mathcal{W}_x$ es relativamente compacta y

$$x \in \mathcal{W}_x \subseteq \overline{\mathcal{W}_x} \subseteq \mathcal{V}_x .$$

En primer lugar, mostremos que $(\overline{\mathcal{U}_x}, \tau_{\overline{\mathcal{U}}_x})$

① $(\overline{\mathcal{U}_x}, \tau_{\overline{\mathcal{U}}_x})$ es un espacio topológico regular

② $(\mathcal{U}_x, \tau_{\mathcal{U}_x})$ es un espacio topológico regular

Como $(\mathcal{U}_x, \tau_{\mathcal{U}_x})$ es regular, se tiene que existe una vecindad abierta en $\tau_{\overline{\mathcal{U}}_x}$ tal que

$$x \in \mathcal{W} \subseteq \overline{\mathcal{W}} \subset \mathcal{U}_x \cap \mathcal{V}_x$$

donde $\overline{\mathcal{W}}$ es la clausura en $\tau_{\overline{\mathcal{U}}_x}$. Como $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}_x \cap \mathcal{V}_x$. Como $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}_x \cap \mathcal{V}_x$, $\mathcal{W}$ es abierto en $\tau_{\overline{\mathcal{U}}_x}$ se tiene que $\mathcal{W}$ es abierto en $\tau_{\mathcal{U}_x}$ lo que implica que $\mathcal{W}$ sea abierto en τ_X. Como X es separado $\overline{\mathcal{W}}$ es compacto, $\overline{\mathcal{W}}$ es cerrado en X y por tanto $\overline{\mathcal{W}}$ es también la clausura de $\mathcal{W}$ en τ_X. Así

$$x \in \mathcal{W} \subseteq \overline{\mathcal{W}} \subset \mathcal{V}_x$$

Así, (X,τ_X) es un espacio localmente compacto.