Teoría de Operadores Lineales Acotados

Contenido del curso

Evaluación

2 Parciales : 4 puntos
1 Microevaluaciones : 1 punto
1 Deberes : 1 punto

Capítulo 0: Nociones Topológicas

Definición 0.1. Sea $X \neq \emptyset$ y $\tau_X \subseteq \mathcal{P}(X)$, decimos que τ_X es una topología sobre X si
a) $X, \emptyset \in \tau_X$
b) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de τ_X, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau_X$
c) Si $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia finita de elementos de τ_X, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_X$.
Entonces, la dupla (X, τ_X) es conocida como un espacio topológico. Los elementos de τ_X son llamados conjuntos abiertos.

Ejemplos: i) Si (X, d) es un espacio métrico, entonces (X, τ_d) es un espacio topológico, donde $\tau_d = \{B(x,r) : x \in X \text{ y } r > 0\}$.
ii) Si $X \neq \emptyset$, $\tau_{dis} = \mathcal{P}(X)$
iii) Si $X \neq \emptyset$, $\tau_{indis} = \{X, \emptyset\}$

Definición 0.2: Sea $x \in X$ y (X, τ_X) un espacio topológico, decimos que $\mathcal{U}_x \subseteq X$ es una vecindad de x si existe $W_x \in \tau_X$ tal que

$$x \in W_x \subseteq \mathcal{U}_x$$

Definición 0.3. Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un punto interior de A si existe $\mathcal{U}_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$x \in \mathcal{U}_x \subseteq A$$

donde $\mathcal{V}(x) = \{\mathcal{V}_x : \mathcal{V}_x \text{ vecindad de } x\}$

Al conjunto de puntos interiores se lo conoce como interior de A y lo notamos $\text{Int}(A)$ o $\mathring{A}$.

Propiedades del interior

Sean $A \subseteq X$ y (X, τ_X) un e.t.

i) $\text{Int}(A) \subseteq A$
ii) $\text{Int}(\emptyset) = \emptyset$ y $\text{Int}(X) = X$
iii) $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$
iv) A es abierto si y solo si $A = \text{Int}(A)$
v) $A \subseteq B \Rightarrow \text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$
vi) $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$
vii) $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$
viii) $\text{Int}(A) = \bigcup \{B : B \text{ abierto contenido en } A\}$ (El interior es abierto más grande contenido en A)

Definición 0.4: Sean (X, τ_X) un e.t. y $F \subseteq X$, decimos que F es cerrado si $F^c \in \tau_X$.

Propiedades de los cerrados.

Si consideramos el conjunto de cerrados de X notado por $\mathcal{F}_X$, entonces:

i) $X, \emptyset \in \mathcal{F}_X$
ii) $\mathcal{F}_X$ es estable por intersecciones arbitrarias
iii) $\mathcal{F}_X$ es estable por uniones finitas

Definición 0.5. Sean (X, τ_X) un e.t. y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un punto de clausura o un punto adherente de A si

$$\forall \mathcal{V}_x \in \mathcal{V}(x) \qquad A \cap \mathcal{V}_x \neq \emptyset$$

Al conjunto de puntos de clausura de A o puntos de adherencia se lo nota por $\bar{A}$

Propiedades de la Clausura 0.5

i) $\bar{X} = X$, $\bar{\emptyset} = \emptyset$
ii) $A \subseteq \bar{A}$
iii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
iv) A es cerrado si y solo si $A = \bar{A}$
v) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$
vi) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$
vii) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$
viii) $\bar{A} = \bigcap \{F \text{ cerrado} : A \subseteq F\}$ (Cerrado más pequeño que contiene a A)

Definición 0.6. Sean (X, τ_X) un e.t. y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación o punto límite de A si

$$\forall V_x \in \mathcal{V}(x) \qquad A \cap (\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Al conjunto de puntos límites se lo conoce como derivado de A y se lo nota A'

Propiedades del derivado.

i) $\bar{A} = A' \cup A$
ii) A' en general no es cerrado
iii) A es cerrado si $A' \subseteq A$
iii) $(A')' \subseteq A'$ (En general no es cieto, se necesita T_0)
iv) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$
vi) $(A \cup B)' = A' \cup B'$
v) Si A es cerrado, A' es cerrado

Demostración (iii) (Intento)

Sea $x \in (A')'$, cualquiera. P.D. $x \in A'$, i.e., $\forall V_x \in \mathcal{V}_x \quad A \cap (\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Por absurdo, supongamos que $x \notin A'$, existe $\hat{\mathcal{V}}_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$(\hat{\mathcal{V}}_x \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \qquad [1]$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\hat{\mathcal{V}}_x$ es abierto; por otro lado,

$$(\hat{\mathcal{V}}_x \setminus \{x\}) \cap A' \neq \emptyset.$$

Luego, existe $y \in \hat{\mathcal{V}}_x$ tal que $y \in A'$ y así

$$\forall \mathcal{V}_y \in \mathcal{V}(y) \qquad (\mathcal{V}_y \setminus \{y\}) \cap A \neq \emptyset.$$

En particular, para $\hat{\mathcal{V}}_x \in \mathcal{V}(y)$, se tiene que

$$(\hat{\mathcal{V}}_x \setminus \{y\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Martes, 8 de noviembre de 2022

Definición 0.7. - Base - Sea (X, τ_X) un e.t. y $\mathcal{B}_X \subseteq \tau_X$. Decimos que $\mathcal{B}_X$ es una base de τ_X si todo abierto de τ_X puede verse como la unión arbitraria de elementos de $\mathcal{B}_X$

Ejemplo. Sea (X, τ_d) con τ_d la topología inducida por la métrica, entonces una base es

$$\mathcal{B}_d = \{B(x,r) ; x \in X \text{ y } r > 0\}$$

Definición 0.8. Ver Def 1.23 [1] **- Base de vecindades -** Sean (X, τ_X) un e.t. y $x \in X$. Decimos que $\mathcal{V}^x \subseteq \mathcal{V}(x)$ es una base de vecindades de x para la topología τ_X si

$$(\forall V_x \in \mathcal{V}(x))(\exists U_x \in \mathcal{V}^x) \text{ tal que } x \in U_x \subseteq V_x$$

Definición 0.9 - I-numerable - Sea (X, τ_X) un e.t. Decimos que (X, τ_X) es I-numerable si τ_X admite una base numerable.

Definición 0.10 - II-numerable - Sea (X, τ_X) un e.t. Decimos que (X, τ_X) es II-numerable si para todo $x \in X$ existe $\mathcal{V}^x$ una base de vecindades numerable.

Observación Se tiene que I-numerable implica II-numerable

Demostración: Ver Pág 16 [1]

Proposición 0.11. [Ejercicio] Sea (X, τ_d) un e.m. Entonces (X, τ_d) es I-numerable si y solo si (X, τ_d) es separable.

Definición 0.12. - Separable - Sea (X, τ_X) un e.t. Decimos que (X, τ_X) es separable si existe $\theta \subseteq X$ denso y numerable.

Definición 0.13. - Denso - Sea (X, τ_X) un e.t. Decimos que $D \subseteq X$ es denso si $\overline{D} = X$

Observación Si (X, τ_X) es II-numerable entonces para cada $x \in X$ existe $\mathcal{V}^x$ una base de vecindades de x numerable y además ordenadas decrecientemente por inclusión

Definición 0.14 - Convergencia - Sean (X, τ_X) un e.t., $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X y $x \in X$. Decimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x si

$$(\forall V_x \in \mathcal{V}(x))(\exists \hat{n} \in \mathbb{N}) \text{ tal que } x_n \in V_x \quad \forall n \geq \hat{n}$$

y lo notamos

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \quad \text{en } \tau_X$$

Observación En general, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite un límite este no es único.

Ejemplo: Sea (X, τ_{indis}) un e.t. Note que en este espacio toda sucesión es convergente.

Observación Si (X, τ_X) es un espacio T_2 (Hausdorff), entonces el límite es único.

Definición 0.15 - Separado - Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Decimos que (X, τ_X) es Hausdorff si

$$(\forall x, y \in X \mid x \neq y)(\exists V_x \in \mathcal{V}(x))(\exists V_y \in \mathcal{V}(y)) \text{ tal que } V_x \cap V_y = \emptyset$$

Observación: Si (X, τ_X) es un e.t. separado, entonces

- $(A')' \subseteq A'$
- A' es cerrado
- $\bigcap \{ \mathcal{V}^x \text{ vecindades cerradas de } x \} = \{x\}$
- $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$

Definición 0.16. - Clausura secuencial - Sean (X, τ_X) un e.t. y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un punto secuencial de A si existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$ en τ_X

El conjunto de puntos secuenciales se conoce como clausura secuencial de A y lo notaremos como $[A]$

Decimos que A es secuencialmente cerrado si $A = [A]$

Observación Sea (X, τ_X) un e.t.

i) $A \subseteq [A] \subseteq \overline{A}$
ii) Si (X, τ_X) es I-Numerable, entonces para todo $A \subseteq X$ $\overline{A} = [A]$

Viernes, 11 de noviembre de 2022.

Proposición 0.17. Sea (X, τ_X) un e.t. II-Numerable, entonces para todo $A \subseteq X$,

$$\overline{A} = [A]$$

Demostración

Como $[A] \subseteq \bar{A}$, basta probar que $\bar{A} \subseteq [A]$

Sea $x \in \bar{A}$ P.D. Existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$.

Como $x \in \bar{A}$, entonces

$$\forall V_x \in \mathcal{V}(x), \qquad A \cap V_x \neq \emptyset.$$

Luego, como (X, τ_X) es II-Numerable, entonces existe $(\mathcal{V}_x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades numerable y decreciente por inclusión, es decir que

$$\forall m > n \qquad \mathcal{V}_x^m \subseteq \mathcal{V}_x^n$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \mathcal{V}_x^n \cap A$, con lo que definimos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. P.D. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv. a x.

Sea $\mathcal{V}_x \in \mathcal{V}(x)$, cualquiera. Mostremos que existe $\hat{n} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq \hat{n}$, $x_n \in \mathcal{V}_x$.

Como U_x es una vecindad de x y $\{U_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de vecindades de x, entonces tenemos que existe $\hat{n} \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in U_x^{\hat{n}} \subseteq U_x$$

Así, tenemos que para todo $n \geq \hat{n}$

$$x_n \in \mathcal{V}_x^n \subset \mathcal{V}_x^{\hat{n}}.$$

Definición 0.18. Sea (X, τ_X) un espacio topológico y consideramos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X. Decimos que x es un valor adherente a la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$\forall V_x \in \mathcal{V}(x)$ entonces el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{V}_x\}$ es infinito.

Ejemplos.

a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente entonces el límite es un valor adherente de la sucesión

b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente.

c) Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado y de dimensión finita entonces

- Toda sucesión acotada admite un valor adherente
- Recíprocamente, toda sucesión que admite un valor adherente admite una subsucesión convergente y además es acotada.

d) Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado de dimensión infinita

Recordando el teorema de (Riez)

$$\bar{B}_E \text{ es compacta en } \tau_{\|\cdot\|_E} \text{ si y solo si } \dim E < +\infty$$

Tenemos que si $A \subseteq E$, A es acotado. Entonces no necesariamente las sucesiones de A admiten un valor adherente.

Si A es secuenciamente compacto entonces toda sucesión de A admite un valor adherente

Definición 0.19 Sea (X, τ_X) un e.t., decimos que (X, τ_X) tiene la propiedad de Bolzano - Weierestrass si toda sucesión de X admite un valor adherente.

Proposición 0.20 Sea (X, τ_X) un e.t. de Hausdorff y consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X. Si $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\bar{A} = A \cup \{\text{v.a. de la sucesión } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

Demostración

Es claro que

$$A \cup \{\text{v.a. de la sucesión } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

Sea $x \in \bar{A}$ y $x \notin A$. P.D. x es v.a. de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por absurdo, supongamos que existe $\hat{V}_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \hat{V}_x\} \text{ es finito,}$$

es decir que

$$\hat{V}_x \cap A = \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}\}.$$

Luego, como $x \notin A$, entonces $x \notin \{x_{n_1}, \dots, x_{n_p}\}$, es decir $x \neq x_{n_i}$ para todo $i=1,\dots,p$.
Como (X, τ_X) es Hausdorff, existen $V_i^x \in \mathcal{V}(x)$ y $W_i \in V(x_{n_i})$ tales que

$$V_i^x \cap W_i \neq \emptyset.$$

Tomando $\mathcal{U}^x = \left(\bigcap_{i=1}^{p} V_i^x \right) \cap \hat{V}_x$, notemos que

$$\begin{aligned} A \cap \mathcal{U}^x &= A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{p} V_i^x \right) \cap \hat{V}_x \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{p} V_i^x \right) \cap (A \cap \hat{V}_x) \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{p} V_i^x \right) \cap \{x_{n_1}, \dots, x_{n_p}\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

lo que contradice que $x \in \bar{A}$.

Proposición 0.21 Sea (X,d) un e.m. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un valor adherente.
b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente en (E,d).

Demostración

b) $\Rightarrow$ a) Trivial
a) $\Rightarrow$ b)
Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un valor adherente digamos $x \in X$. Como (X,d) es II-Numerable, entonces existe $\{V_x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decrecientes por la inclusión.

Para $k=1$, tomamos $N_1 = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in V_x^1\}$, luego $n_1 = \min N_1$, más aún para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos definir

$$N_n = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in V_x^n\}$$

y así

$$n_k = \min N_k \setminus N_{k-1}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$x_{n_k} \in V_x^k \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}$$

Finalmente, para $V_x^m \in \{V_x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cualquiera, existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{n_m} \in V_x^m$$

y más aún, para todo $i > m$ se tiene que

$$x_{n_i} \in V_x^i \subseteq V_x^{m}.$$

Compacidad en Espacios Topológicos.

Sea (X, τ_X) un e.t. y consideremos $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de τ_X. Decimos que $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X si

$$X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$$

Definición 0.22 - Compacto - Sea (X, τ_X) un e.t. decimos que (X, τ_X) es compacto si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.
Es decir que dado $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I} \in \tau_X$ tal que $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$, existe $J \subseteq I$ finito tal que

$$\bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_i = X$$

Observación También se puede definir compacidad de la siguiente manera (X,τ_X) es compacto si para todo $(F_i)_{i\in I}$ familia de cerrados tales que

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$$

Existe $J\subseteq I$ finito tal que

$$\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$$

Definición 0.23. - Conjunto Compacto - Sean (X,τ_X) un e.t. y $A\subseteq X$. Decimos que A es un conjunto compacto de X si (A,τ_A) es un e.t. compacto, con

$$\tau_A = \{A\cap \mathcal{O} : \mathcal{O}\in\tau_X\}$$

Observación $A\subseteq X$ es compacto si y solo si para todo $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}\in\tau_X$ tal que

$$A\subset \bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i$$

existe $\underbrace{J\subseteq I}_{\text{finito}}$ tal que

$$A\subseteq \bigcup_{j\in J}\mathcal{O}_j$$

Lunes, 21 de Noviembre de 2022.

Proposición 0.24 Sea (X,τ_X) un espacio topológico cerrado. Se tiene lo siguiente

a) $A\subseteq X$ es compacto, entonces A es cerrado.
b) Si (X,τ_X) es un e.t. compacto y $A\subseteq X$ cerrado, entonces A es compacto.

Demostración

a) Supongamos que A es compacto y A no es cerrado. Por tanto, existe $a\in\bar{A}$ tal que $a\notin A$. Como (X,τ_X) es separado entonces

$$\{a\} = \bigcap\{V^a : V^a \text{ vecindad cerrada de } a\}$$

de esta manera

$$A\cap\left(\bigcap_{\substack{V^a\in\mathcal{V}(a)\\ V^a \text{ cerrado}}} V^a\right) = \emptyset$$

Como A es compacto, se tiene que

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^a\right)\cap A = \emptyset$$

donde V_i^a es una vecindad cerrada de a. Tomando $W^a = \bigcap_{i=1}^n V_i^a$, se tiene que $W^a\in\mathcal{V}(a)$ y además

$$W^a\cap A = \emptyset$$

lo cual contradice que $a\in\bar{A}$.

b) Sea (X,τ_X) un e.t. compacto, $A\subseteq X$ cerrado. P.D. A es compacto. Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}\in\tau_X$ un recubrimiento abierto tal que

$$A\subseteq\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i$$

P.D. Existe $J\subseteq I$ finito tal que $A\subset\bigcup_{i\in J}\mathcal{U}_i$.
Como A es cerrado, entonces $\{\mathcal{U}_i, A^c\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X. Así, dado que X es compacto, existe $J\subseteq I$ tal que

$$A^c\cup\bigcup_{j\in J}\mathcal{U}_j = X$$

De esta manera, se sigue que

$$A \subset \bigcup_{j \in J} U_j$$

Observación: El literal b) de la proposición 0.24 se cumple para cualquier espacio topológico.

Proposición 0.25 Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f(X,\tau_X) \to (Y, \tau_Y)$. Si f es continua y $A \subset X$ compacto, entonces $f(A)$ es compacto.

Demostración Sea $A \subset X$ un conjunto compacto. P.D. $f(A)$ es compacto en (Y, τ_Y). Sea $\{W_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $f(A)$, entonces

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i \in I} W_i$$

luego

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} W_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(W_i).$$

Como f es continua $\{f^{-1}(W_i)\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de A. Así, como A es compacto, existe $J \subseteq I$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{j \in J} f^{-1}(W_j)$$

luego, se tiene que

$$f(A) \subseteq \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(W_j)) \subseteq \bigcup_{j \in J} W_j.$$

Por lo tanto, $f(A)$ es compacto.

En el caso particular de espacios métricos se tiene el siguiente corolario.

Corolario 0.26. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Se tiene las siguientes afirmaciones equivalentes

a) K es compacto en (X, d_X)

b) $\theta(K)$ es compacto en (Y, d_Y)

donde $\theta : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$

Definición 0.27 - Secuencialmente compacto - Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Decimos que X es un e.t. secuencialmente compacto, si toda sucesión de X admite una subsucesión convergente en τ_X.

Del mismo modo, podemos definir un conjunto secuencialmente compacto si toda sucesión de A admite una subsucesión convergente dentro de A (límite está en A)

Observación 1 Sea (X, d) un espacio métrico, las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) (X, d_X) es compacto

b) (X, d_X) es secuencialmente compacto

c) (X, d_X) tiene la propiedad B-W

d) (X, d_X) es completo y precompacto. (X, d) completo

$A \subseteq X$

A compacto

A s. compacto

A propiedad B-W

A cerrado y p. compacto

Recordemos que (X, d_X) es dicho precompacto si para todo $\varepsilon > 0$ existen $(x_1^\varepsilon, \dots, x_{n_\varepsilon}^\varepsilon) \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(x_i^\varepsilon, \varepsilon)$$

Observación 2: En el caso general se tiene que si (X, τ_X) es secuencialmente compacto entonces toda sucesión admite una subsucesión convergente, lo que implica que toda sucesión admite un valor adherente. Lo cual muestra que (X, τ_X) admite la propiedad B-W.

La recíproca es falsa.

Observación 4: En el caso general no existe ninguna implicación entre compacidad y secuencialmente compacto.

Proposición 0.28. Sea (X, τ_x) un e.t. separado y compacto, entonces (X, τ_x) admite la propiedad B-W.

Demostración

Supongamos que (X, τ_x) es separado, compacto y no admite la propiedad (B-W), es decir, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que no admite ningún valor adherente.

Definamos para $p \in \mathbb{N}$ fijo

$$A_p := \{ x_n : n \geq p \},$$

luego, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene valores adherentes, entonces A_p es cerrado.

P.D.

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p = \emptyset.$$

Por absurdo, supongamos que

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p \neq \emptyset,$$

así, existe $x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p$. P.D. x es valor adherente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $V^x \in \mathcal{V}(x)$ como

$$x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p$$

el conjunto $\{ n \in \mathbb{N} : x_n \in V^x \}$ es infinito. Notemos que

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad x \in A_p,$$

luego $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists n(p) \in \mathbb{N}$ tal que $n(p) > p$; así

$$x_{n(p)} = x$$

Lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto,

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p = \emptyset.$$

Como X es compacto, existe $\{1, \ldots, m\}$

$$A_{p_N} = \bigcap_{i=1}^{m} A_{p_i} = \emptyset$$

con $N = \max_{i=1,\ldots,m} \{p_i\}$

Definición 0.29. Sean (X, τ_x) un e.t. y $A \subset X$

a) Decimos que A es relativamente compacto si $\overline{A}$ es un conjunto compacto.
b) Decimos que A es relativamente secuencialmente compacto si $\overline{A}$ es secuencialmente compacto.

Observación a) Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un e.n. de dimensión finita.

Si $A \subseteq E$ es relativamente compacto si y solo si A es acotado.

b) Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un e.n. de dimensión infinita

$A \subseteq E$ relativamente compacto entonces A es acotado.

En espacios métricos se tiene las siguientes afirmaciones equivalentes.

a) $A \subseteq X$ es relativamente compacto
b) $A \subseteq X$ es relativamente secuencialmente compacto
c) $\overline{A}$ admite la propiedad B-W

d) A es precompacto. ((X,d) es completo)

Proposición 0.30 Sea (X,d) un espacio métrico completo y $A \subseteq X$. Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon \subseteq X$ compacto tal que

$$\forall x \in A \qquad d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \left(\text{con } d(x, K_\varepsilon) = \inf_{y \in K_\varepsilon} d(x,y) \right)$$

Entonces, A es relativamente compacto.

Demostración

P.D. A es precompacto. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existen $(x_1, \dots, x_n) \in E$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

Por hipótesis, sabemos que para $\varepsilon/2 > 0$, existe $K_{\varepsilon/2} \subset X$ tal que

$$\forall x \in A \qquad d(x, K_{\varepsilon/2}) < \varepsilon/2$$

Como $K_{\varepsilon/2}$ es compacto, entonces es precompacto y cerrado, entonces existe $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n \in X$ tal que

$$K_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\hat{x}_i, \varepsilon/2)$$

P.D. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\hat{x}_i, \varepsilon)$.

Sea $x \in K_\varepsilon$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $d(\hat{x}_i, x) < \varepsilon/2$.
Sea $y \in A$, entonces

$$\begin{aligned} d(y, \hat{x}_i) &\leq d(y, x) + d(x, \hat{x}_i) \\ &< d(y,x) + \varepsilon/2 \\ &< d(y, K_\varepsilon) + \varepsilon/2 = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Corolario 0.31 Sean $(E, \|\ \|_E)$ un e. Banach y $A \subseteq E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) A es relativamente compacto
b) A verifica lo siguiente:

i) A es acotado
ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe L_ε s.e.v. de E de dimensión finita tal que

$$\forall x \in A \qquad d(x, L_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Martes, 22 de Noviembre de 2022

Demostración (Corolario 0.31)

i) $\Rightarrow$ ii)

Si A es relativamente compacto, entonces $\bar{A}$ es compacto en $(E, \|\cdot\|_E)$, lo que implica que A es acotado.

P.D. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists L_\varepsilon$ s.e.v de dimensión finita$)$ $(\forall x \in A)$ $(d(x, L_\varepsilon) < \varepsilon)$

Como A es relativamente compacto, entonces es precompacto, es decir que para $\varepsilon > 0$, existen $(x_1^\varepsilon, \dots, x_n^\varepsilon) \in E$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(x_i^\varepsilon, \varepsilon)$$

Consideremos $L_\varepsilon = \operatorname{span}\{x_1^\varepsilon, \dots, x_n^\varepsilon\}$, luego $\dim(L_\varepsilon) < +\infty$.
Sea $x \in A$, entonces existe $j \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$ tal que

$$x \in B(x_j^\varepsilon, \varepsilon)$$

de esta manera $d(x, L_\varepsilon) \leq d(x, x_j) < \varepsilon$.

ii) ⇒ i) Sea $M>0$ tal que $A \subseteq B(0,M)$. Por otro lado, dado $\varepsilon>0$, existe L_ε s.e.v. de dimensión finita tal que

$$\forall x \in A \qquad d(x, L_\varepsilon) < \varepsilon$$

Tomando

$$K_\varepsilon = \bar{B}(0, M+\varepsilon) \cap L_\varepsilon = \{x \in L_\varepsilon : \|x\| \leq M+\varepsilon\} \qquad (L_\varepsilon, \|\cdot\|_\varepsilon) \Rightarrow (E, \|\cdot\|_E).$$

Note que $K_\varepsilon \subseteq L_\varepsilon$, como $\dim(L_\varepsilon) < +\infty$ y K_ε es acotado, entonces es compacto

P.D. $\forall x \in A \qquad d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Dado $x \in A$, existe $y \in L_\varepsilon$ tal que

$$d(x, L_\varepsilon) = \|x-y\| < \varepsilon$$

pues $\dim(L_\varepsilon) < +\infty$. Así, se tiene que

$$\|y\| \leq \|x-y\| + \|x\| < M+\varepsilon$$

luego

$$y \in K_\varepsilon \qquad d(x, K_\varepsilon) \leq \|x-y\| < \varepsilon$$

Usando la [Proposición 0.30] se sigue que A es relativamente compacto.

Observación Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y). Supongamos que A_X es compacto (respectivamente relativamente compacto) en τ_X y A_Y un compacto (recíprocamente relativamente compacto) en τ_Y. Entonces $A_X \times A_Y$ es un conjunto compacto (resp. relativamente compacto) en $\tau_X \times \tau_Y$

Definición 0.32. -Secuencialmente continua- Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos e.t. separados y $f:(X,\tau_X) \to (Y, \tau_Y)$. Decimos que f es secuencialmente continua en el punto $x \in X$, si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \to x$ en τ_X se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$$

Decimos que f es secuencialmente continua en X si es secuencialmente continua en todo punto de X.

Observación Si (X, d_X) y (Y, d_Y) son dos espacios métricos

$f: X \to Y$ es continua si y solo si f es secuencialmente continua

- Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f:(X,\tau_X) \to (Y, \tau_Y)$

⇒) Si f es continua entonces f es secuencialmente continua

En efecto, si $x \in X$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$. P.D. $f(x_n) \to f(x)$.
Consideremos $V_{f(x)}$ una vecindad abierta de $f(x)$ para la topología τ_Y.

P.D. Existe $N_{(V_{f(x)})} \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N \quad f(x_n) \in V_{f(x)}$.

Como f es continua, entonces $f^{-1}(V_{f(x)}) \in \tau_X$ y además $x \in f^{-1}(V_{f(x)})$, con lo que existe $N_{f^{-1}(V_{f(x)})} \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in f^{-1}(V_{f(x)}) \qquad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow f(x_n) \in f(f^{-1}(V_{f(x)})) \subseteq V_{f(x)} \qquad \forall n \geq N$$

Por lo tanto, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$.

⇐) Si f es secuencialmente continua, entonces es continua.

Como f es s. continua en $x \in X$ (para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $x_n \to x$), para toda $V_{f(x)}$ existe $N_{V_{f(x)}} \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(x_n) \in V_{f(x)} \qquad \forall n \geq N.$$

P.D. f es continua en x.

Sea $V_{f(x)}$ una vecindad de $f(x)$. P.D. Existe V_x tal que

$$f^{-1}(V_{f(x)}) \subseteq V_x$$

En general, la recíproca es falsa.

En efecto, si suponemos f secuencialmente continua. P.D. Si $F \subseteq Y$ es cerrado, entonces

$$f^{-1}(F) \text{ es cerrado en } \tau_X$$

Si $x \in \overline{f^{-1}(F)} \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ f^{-1}(F)$ tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$

En general no se puede caracterizar la clausura de un conjunto a partir de sucesiones

Observación Si (X,τ_X) es II-Numerable, entonces la recíproca es verdadera (f s. continua $\Rightarrow$ f continua)

Regresando a la anterior

$$x \in \overline{f^{-1}(F)} = [f^{-1}(F)] \quad \text{(En espacios II-Numerables)}$$

Así, si suponemos lo anterior, existe $(x_n) \in f^{-1}(F)$ tal que $x_n \to x$. Como f es secuencialmente continua

$$f(x_n) \to f(x)$$

De esta manera, $f(x) \in [F] \subseteq \overline{F} = F$ y por lo tanto $x \in f^{-1}(F)$.

Observación. Si consideramos $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ con f secuencialmente continua pero no continua, entonces (X,τ_X) no es II-Numerable y más aún no es I-Numerable

Sección 0.2. Topologías débiles

Consideramos lo siguiente:

- $X \neq \emptyset$
- $(Y_i,\tau_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos
- $(\varphi_i)_{i\in I}$ una familia de aplicaciones tales que

$$\varphi_i : X \to (Y_i,\tau_i)$$

Nuestro objetivo es encontrar una topología sobre X tal que nos permita tener que

$$\forall i \in I \quad \varphi_i : (X,\tau_X) \to (Y_i,\tau_i)$$

sea continua. Y además que dicha topología sea la más pequeña (fina) que mantiene esta propiedad.

Es decir, si $\tilde{\tau}$ es una topología en X tal que $\forall i \in I: \varphi_i:(X,\tilde{\tau}) \to (Y_i,\tau_i)$ es continua entonces $\tau \subseteq \tilde{\tau}$.

$$f_1 : X \to (Y_1,\tau_1) \qquad y \qquad f_2 : X \to (Y_2,\tau_2)$$

Para 1 función $\tau = \{ U \subseteq X : U = f_1^{-1}(W) : W \in \tau_Y \}$

Para 2 aplicaciones $\beta = \{ U \subseteq X : U = f_1^{-1}(W_1) \cap f_2^{-1}(W_2) ; W_1 \in \tau_1 \text{ y } W_2 \in \tau_2 \}$

Probamos que β es una base para una topología.

Viernes, 25 de Noviembre de 2022.

Prop 0.33 Sean X no vacío, $(Y_i,\tau_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $(f_i)_{i\in I}$ una familia de aplicaciones, tales que

$$f_i : X \to (Y_i,\tau_i)$$

Entonces, tenemos lo siguiente:

a) $\beta_X = \{$ intersecciones finitas de preimágenes de abiertos a partir de la familia $(f_i)_{i\in I}\}$ es una base de una topología definida en X notada por τ_X

b) Para todo $i\in I$. $f_i : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y_i, \tau_i)$ es continua.

c) $\tilde{\tau}$ es una topología definida en X tal que para todo $i \in I$ $f_i : (X, \tau_X) \to (Y_i, \tau_i)$ es continua, entonces $\tau_X \subseteq \tilde{\tau}$

Obs: Si $B \in \beta_X$, entonces existe $J \subseteq I$ finito tal que $B = \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(W_j)$ con $W_i \in \tau_j$

› τ_X es la unión arbitraria de elementos de β_X

Demostración

a) Resta mostrar que para todo $B_i, B_j \in \beta_X$ y para todo $x \in B_i \cap B_j$, existe $B^x \in \beta_X$ tal que

$$x \in \beta_x \subseteq B_i \cap B_j$$

Sea $x \in B_i \cap B_j$, cualquiera. Entonces existen $\tilde{I}$ y $\tilde{J}$ finitos tales que

$$x \in B_i = \bigcap_{k\in\tilde{I}} \varphi_k^{-1}(W_k) \quad \text{y} \quad x \in B_j = \bigcap_{l\in\tilde{J}} \varphi_l^{-1}(W_l)$$

es decir, tenemos que (Para $\tilde{I} \cap \tilde{J} = \emptyset$)

$$\varphi_k(x) \in W_k \quad \forall k \in \tilde{I} \qquad \text{y} \qquad \varphi_l(x) \in W_l \quad \forall l \in \tilde{J}$$

Por lo tanto,

$\forall k \in \tilde{I}$ existe V^k tal que $\varphi_k(x) \in V^k \subseteq W_k$ y $\forall l \in \tilde{J}$ existe V^l tal que $\varphi_l(x) \in V^l \subseteq W_l$

De donde

$$x \in \left(\bigcap_{k\in\tilde{I}} \varphi_k^{-1}(V^k)\right) \cap \left(\bigcap_{l\in\tilde{J}} \varphi_l^{-1}(V^l)\right) \subseteq B_i \cap B_j$$

con lo que se sigue el resultado.

› Si $J \cap \tilde{J} = \{i_1, \dots, i_n\}$.

Consideramos,

$$\forall k \in \{i_1, \dots, i_n\} \qquad \varphi_k(x) \in W^k \cap \tilde{W}^k$$

entonces

$$\forall k \in \{i_1, \dots, i_n\} \quad \text{existen } V^k \in \tau_k \text{ tal que } \varphi(x) \in V^k \subseteq W^k \cap \tilde{W}^k$$

Tomando

$$B^x = \bigcap_{k\in J} \varphi^{-1}(\theta^k) \cap \bigcap_{k\in\tilde{J}} \varphi^{-1}(\tilde{\theta}^k)$$

donde

$$\theta^k = \begin{cases} W^k & \text{si } k \notin J\cap\tilde{J} \\ V^k & \text{si } k \in J\cap\tilde{J} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \tilde{\theta}^k = \begin{cases} \tilde{W}^k & \text{si } k \notin J\cap\tilde{J} \\ V^k & \text{si } k \in J\cap\tilde{J} \end{cases}$$

Observación: ~~Con las notaciones anteriores~~

b) Por construcción, se tiene automáticamente la continuidad.

c) Supongamos que $\tilde{J}$ es una topología en X tal que para todo $i\in I$. $f_i : (X, \tilde{\tau}_X) \to (Y_i, \tau_i)$ es continua.

P.D. $\tau_X \subseteq \tilde{\tau}_X$

Sea $\beta \in \tau_X$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$B = \bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(W_j)$$

donde $J \subseteq I$ es finito y para todo $j \in J$, W_j es un abierto de $\mathcal{T}_j$.

Como para todo $j \in J$ $f_j : (X, \tilde{\tau}) \to (Y_i, \tau_i)$ es continua, entonces $f_j^{-1}(W_j) \in \tilde{\tau}$. Así

$$\bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(W_j) \in \tilde{\tau}$$

y por lo tanto, $B \in \tilde{\tau}$.

Prop 0.34. Con las notaciones anteriores. Para todo $x \in X$, una base de vecindades de x para la topología τ_x son los conjuntos

$$\bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(W_j)$$

con $J \subseteq I$ finito y $j \in J$ donde W_j es una vecindad abierta de $\varphi_j(x)$ en $\mathcal{T}_j$.

Demostración

Sea V un abierto de τ_x que contenga a x, luego

$$V = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in F_j} \varphi_i^{-1}(W_i)$$

donde J es un conjunto arbitrario de índices y $F_j \subseteq I$ finito tal que para todo $i \in F_j$

$$W_i \in \tau_i.$$

Como $x \in V$, existe $\hat{j} \in J$ tal que

$$x \in \bigcap_{i \in F_{\hat{j}}} \varphi_i^{-1}(W_i).$$

Claramente $\bigcap_{i \in F_{\hat{j}}} \varphi_i^{-1}(W_i)$ es un elemento de nuestro conjunto por lo que tomando

$$V^x = \bigcap_{i \in F_{\hat{j}}} \varphi_i^{-1}(W_i)$$

se sigue el resultado.

Prop 0.35. Con las mismas notaciones anteriores, tenemos los siguientes enunciados equivalentes

a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ converge a $x \in X$ en (X, τ_x).

b) Para todo $i \in I$ $(\varphi_i(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\varphi_i(x)$ en (Y_i, τ_i).

Demostración

a) $\Rightarrow$ b) Como $x_n \to x$ en (X, τ_x) y además para todo $i \in I$ $\varphi_i : (X, \tau_x) \to (Y_i, \tau_i)$ es continua, entonces $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ en (Y_i, τ_i) pues φ es secuencialmente continua.

b) $\Rightarrow$ a) Supongamos que para todo $i \in I$ $(\varphi_i(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\varphi_i(x)$ en (Y_i, τ_i).

Sea $V^x \in \mathcal{V}(x)$, cualquiera. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar

$$V^x = \bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(W_j)$$

con $J \subseteq I$ finito y $W_j \in \tau_j$ para cada j. Así, como

$$x \in V^x \iff \varphi_j(x) \in W_j \quad \forall j \in J.$$

Entonces existen $\{N_1, \dots, N_j\}$ tales que

$$\varphi_j(x_n) \in W_j \quad \forall n \geq N_j$$

Tomando $M = \max\{N_1, \dots, N_j\}$ se sigue que

$$x_n \in \bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(W_j) \quad \forall n \geq M$$

es decir

$$x_n \in V^x \quad \forall n \geq M$$

con lo que $x_n \to x$ en (X, τ_x)

Prop 0.36. Con las mismas notaciones anteriores, consideremos $\Psi:(Z,\tau_Z)\longrightarrow(X,\tau_X)$ donde (Z,τ_Z) es un e.t. Se tienen los siguientes enunciados equivalentes:

a) $\Psi:(Z,\tau_Z)\longrightarrow(X,\tau_X)$ es continua

b) Para todo $i\in I$ $\varphi_i\circ\Psi:(Z,\tau_Z)\longrightarrow(Y_i,\tau_i)$ es continua.

Observación: Esta última proposición, caracteriza la continuidad de una función que parte de un e.t. en el conjunto X provisto de la topología débil asociada a la familia de aplicaciones $(\varphi_i)_{i\in I}$.

No se tiene ninguna caracterización de la continuidad de funciones que parten del conjunto X con la topología débil a otro espacio topológico.

Demostración

a) $\Rightarrow$ b) Es directo por la composición de aplicaciones continuas.

b) $\Rightarrow$ a) Sin pérdida de generalidad, tomemos $\mathcal{U}_x$ un abierto de la base de τ_X, así

$$\mathcal{U}_x=\bigcap_{j\in J}\varphi_j^{-1}(W_j)$$

donde $J\subseteq I$ es finito y $W_j\in\tau_j$ para cada j. Luego

$$\Psi^{-1}(\mathcal{U}_x)=\bigcap_{j\in J}\Psi^{-1}(\varphi_j^{-1}(W_j))=\bigcap_{j\in J}(\varphi_j\circ\Psi)^{-1}(W_j)$$

Así, como $\varphi_i\circ\Psi$ es continua, y la intersección finita de abiertos, entonces

$$\Psi^{-1}(\mathcal{U}_x)\in\tau_Z.$$

Martes, 6 de diciembre de 2022.

Ejemplos de la topología más pequeña que deja continua una familia de aplicaciones.

1) Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Consideremos $\prod_{i\in I}X_i$ el conjunto producto cartesiano de la familia de e.t. $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$, es decir

$$x=(x_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}X_i \iff x_i\in X_i \quad \forall i\in I$$

A partir de esta definición, podemos definir las proyecciones canónicas $(p_i)_{i\in I}$ definidas como

$$p_j:\prod_{i\in I}X_i\longrightarrow(X_j,\tau_j)$$

Queremos construir una topología definida sobre el conjunto $\prod_{i\in I}X_i$ tal que

- $(p_j)_{j\in I}$ sea continua con dicha topología
- Esta topología sea la más pequeña definida sobre $\prod_{i\in I}X_i$ que deje continua a la familia $(p_j)_{j\in I}$.

La topología que cumple estas dos condiciones se la conoce como topología producto, se la nota $\prod_{i\in I}\tau_i$ y es la topología generada por

$$\prod_{i\in I}\beta_i$$

donde $\prod_{i\in I}\beta_i\subseteq\mathcal{P}(\prod_{i\in I}X_i)$

$$\prod_{i\in I}\beta_i=\left\{W=\bigcap_{j\in J}p_j^{-1}(W_j)\ :\ J\subseteq I \text{ finito } \forall j\in J,\ W_j\in\tau_j\right\}$$

Por otro lado, podemos definir $\tau_{Box}\subseteq\mathcal{P}(\prod_{i\in I}X_i)$, τ_{Box} es la topología generada por β_{Box} donde

$$\beta_{Box}=\left\{W=\prod_{i\in I}W_i \text{ con } W_i\in\tau_i\ \forall i\in I\right\}$$

Claramente la convergencia en $(X, \tilde{\tau})$ es la convergencia puntual

$y \in [0,1]$ $\quad \Psi_y : X \longrightarrow \mathbb{C}$
$\qquad f \longmapsto \Psi_y(f) = f(y)$

- Ψ_y es lineal
- Ψ_y es continua de $(X, \|\cdot\|_\infty)$ en $\mathbb{C}$

En efecto, es acotada $|\Psi_y(f)| = |f(y)| \leq \sup_{y \in [0,1]} |f(y)| = \|f\|_\infty$

Por lo tanto, $\Psi_y \in X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$

$$\|\Psi_y\|_{X'} = \sup_{f \in \overline{B}_X} |\Psi_y(f)| = 1$$

$\varphi \in X'$ $\quad \eta_\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad (\eta_\varphi)_{\varphi \in X'}$
$\qquad f \longmapsto \eta_\varphi(f) = \varphi(f)$

Capítulo 1: Topologías débiles sobre espacios de Banach

En primer lugar, notamos $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y E' su dual $E' = (E, \mathbb{K})$; así E' es un espacio de Banach con la norma definida por

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in B_E} |f(x)|$$

con $f \in E'$. Con estos antecedentes consideremos $(\Psi_f)_{f \in E'}$ definida como

$$\Psi_f : E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \Psi_f(x) = f(x)$$

Nuestro objetivo es construir una topología en E que sea la topología más pequeña definida en E que haga continuas nuestras aplicaciones $(\Psi_f)_{f \in E'}$

Jueves, 8 de diciembre

Proposición 1.1. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un e. Banach y $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual asociado. Entonces la topología generada por $\mathcal{B}_{\sigma(E,E')} \subseteq \mathcal{P}(E)$ definida como

$$\mathcal{B}_{\sigma(E,E')} = \left\{ W = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(W_i) \text{ con } W_i \text{ un abierto en } \mathbb{K}, \right.$$
$$\left. \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \varphi_i \in E' \right\}$$

es la topología más pequeña definida sobre E que hace continua la familia de aplicaciones $(\Psi_\varphi)_{\varphi \in E'}$

Observación → Esta topología se la notará como $\sigma(E,E')$ y se la llama topología débil en E, y a la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_E$ la notaremos por $\sigma(E, \|\cdot\|_E)$ la llamaremos topología fuerte en E.

$$\sigma(E,E') = \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in F_i} \varphi_j^{-1}(W_j) \text{ con } I \text{ un conjunto arbitrario de índices y para todo } i \in I,\ F_i \text{ es} \right.$$
$$\left. \text{un conjunto finito, } \forall j \in F_i \quad \varphi_j \in E' \text{ y } W_j \text{ es abierto en } (\mathbb{K}, |\cdot|) \right\}$$

2) Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ y $x \in E$ tales que $x_n \longrightarrow x$ en $(E, \sigma(E,E'))$ si y solo si

$$\forall \varphi \in E' \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x) \quad \text{en} \quad (\mathbb{K}, |\cdot|).$$

3) Dado $x \in E$, entonces una base de vecindades de x para la topología débil $\sigma(E,E')$ es

$$\mathcal{V}(x) = \left\{ V^x = \bigcap_{j=1}^{n} \varphi_j^{-1}(B(f_j(x)), \varepsilon)) \text{ donde } \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \varphi_j \in E' \right\}$$

$$= \left\{ V^x = \{ y \in E \text{ tal que } \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |\langle \varphi_i, x-y \rangle_{E' \times E}| = |\varphi_i(x-y)| < \varepsilon \right\}$$

Con esta topología se tiene que para todo $j \in I$

$$P_j : (\Pi_{i\in I}, \tau_{Box}) \longrightarrow (X_j, \tau_j)$$

son continuas.,

$$P_j^{-1}(W_j) = \prod_{i\in I} \hat{W}_i \quad \text{con} \quad \hat{W}_i = \begin{cases} W_j & \text{si } i=j \\ X_i & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\prod_{i\in I} \tau_i \subseteq \tau_{Box}$$

Analizando la convergencia, tenemos que $x^n = (x_i^n)_{i\in I}$

$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\Pi_{i\in I} X_i$ convergente a $x = (x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I} X_i$ en la topología producto si y solo si para todo $j\in I$

$$P_j(x^n) = (x_j^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{converge a} \quad P_j(x) = x_j \quad \text{en} \quad (X_j, \tau_j)$$

2. $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ Recordemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y solo si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(f,\varepsilon) \in \mathbb{N})$ tal que $(\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq N)$,

es decir $f_n \to f$

■ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ converge puntualmente a f si y solo si

$$\forall x \in [0,1] \qquad f_n(x) \to f(x) \quad \text{en} \quad (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

Nuestro objetivo es encontrar una topología sobre X (que llamaremos $\tilde{\tau}$) tal que la convergencia en dicha topología sea la convergencia puntual en X. En primer lugar note que $\tilde{\tau}$ no puede ser igual a $\tau_{\|\cdot\|_\infty}$ en X. Pues si fueran iguales, las convergencias serían equivalentes, lo cual no es cierto.

Sabemos que la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte. $\tilde{\tau} \subseteq \tau_{\|\cdot\|_\infty}$.

Observación. Consideremos $X \neq \emptyset$ y τ_1, τ_2 son dos topologías definidas en X.
Supongamos que τ_1 y τ_2 son equivalentes en X. Entonces claramente sus convergencias asociadas son equivalentes. En efecto, sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $x \in X$, entonces

$$x_n \to x \text{ en } \tau_1 \quad \text{si y solo si} \quad x_n \to x \text{ en } \tau_2$$

Supongamos que τ_1 y τ_2 tienen convergencias. ¿Eso implica que τ_1 y τ_2 son equivalentes? En el caso general esto no se tiene. Pero si τ_1 y τ_2 son II-numerable (en particular en espacios métricos) la respuesta es afirmativa.

$X = \mathcal{C}([0,1])$

Encontrar $\tilde{\tau}$ topología en X que «genere» la convergencia puntual en X

$$\tilde{X} = \prod_{x\in[0,1]} X^x \qquad X^x = (\mathbb{C}, |\cdot|) \qquad \forall x \in [0,1]$$

$f \in \tilde{X}$

$f = (f(x))_{x\in[0,1]}$ si y solo si $\forall x \in [0,1] \in \mathbb{C}$

Dado $y \in [0,1]$ $\quad \Psi_y : \tilde{X} \to (X^y, \tau_y) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$

$$f = (f(x))_{x\in[0,1]} \qquad \Psi_y(f) = f(y)$$

Sobre $\tilde{X}$ definimos la topología notada $\tilde{\tau}$, como la más pequeña topología que deja continua las aplicaciones $(\Psi_y)_{y\in[0,1]}$

Entonces sobre el subconjunto X podemos dar una estructura topológica a partir de la topología $\tilde{\tau}$ definida sobre X. Dicha topología definida sobre X la notaremos $\tilde{\tilde{\tau}}$

4) $\sigma(E,E') \subseteq \sigma(E, \|\cdot\|_E)$. Se verá que cuando $\dim(E)=+\infty$ entonces esta inclusión es estricta. Es decir que existen conjuntos abiertos (resp. cerrados) en $\sigma(E,\|\cdot\|_E)$ que no son abiertos (resp. cerrados) en $\sigma(E,E')$. Esto me permite tener sobre $\sigma(E,E')$ más conjuntos compactos que en la topología $(E,\|\cdot\|_E)$

Proposición 1.2. Se tiene que $(E,\sigma(E,E'))$ es un e.t. separado.

Demostración Sean $x,y \in E$ tales que $x \neq y$. P.D. Existen $\mathcal{V}^x \in \sigma(E,E')$ y $\mathcal{V}^y \in \sigma(E,E')$ tales que

$$x \in \mathcal{V}^x \quad y \quad y \in \mathcal{V}^y \quad \text{tal que} \quad \mathcal{V}^x \cap \mathcal{V}^y = \emptyset$$

Utilizando H-B segunda forma geométrica, existe un hiperplano cerrado en $(E,\sigma(E,\|\cdot\|_E))$ tal que separa en sentido estricto donde

$$H_f^{\alpha} = \{ y \in E : \langle f, y \rangle_{E', E} = f(y) = \alpha \}$$

Así, existe $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que

$$Re(f(y)) < \hat{\alpha} < Re(f(x))$$

De esta manera, definamos

$$\mathcal{V}^x = \{ z \in E : |\langle f, z-x \rangle| < Re(f(x)) - \hat{\alpha} \} \Rightarrow \mathcal{V}^x = f^{-1}(B(f(x), Re(f(x)) - \hat{\alpha}))\}$$

$$\mathcal{V}^y = \{ z \in E : |\langle f, z-y \rangle| < \hat{\alpha} - Re(f(y)) \} \Rightarrow \mathcal{V}^y = f^{-1}(B(f(y), \hat{\alpha} - Re(f(y)) \}$$

Con lo que se sigue lo requerido.

Demostración 2. Sean $x \neq y$, entonces existe $f \in E'$ tal que $f(x) \neq f(y)$. En efecto, si no fuera el caso, entonces existe $x \neq y$ tal que para todo $f \in E'$ $f(x) = f(y)$, luego $f(x-y) = 0$; así

$$\|x-y\|_E = \sup_{f \in \bar{B}_{E'}} |f(x-y)| = 0$$

$$\therefore \quad x = y \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

Como $f(x) \neq f(y)$ y $\mathbb{K}$ es separado, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(f(x), \varepsilon) \cap B(f(y), \varepsilon) = \emptyset$$

tomando

$$\mathcal{V}^x = f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \quad y \quad \mathcal{V}^y = f^{-1}(B(f(y), \varepsilon))$$

$$\mathcal{V}^x \cap \mathcal{V}^y = \emptyset$$

Definición 1.3 Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un e. Banach y consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ y $x \in E$. Decimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a x si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\sigma(E,E')$. Esta convergencia se la notará $x_n \rightharpoonup x$ y la convergencia en $\sigma(E,\|\cdot\|_E)$ se la notará $x_n \to x$

Proposición 1.4 Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un e. Banach, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ y $x \in E$

a) $x_n \rightharpoonup x$ si y solo si $\forall f \in E'$ $f(x_n)$ c.v. a $f(x)$ en $(\mathbb{K}, |\cdot|)$

b) $x_n \rightharpoonup x$ entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y además $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

c) $x_n \to x$ en $\sigma(E,\|\cdot\|_E)$ entonces $x_n \rightharpoonup x$ en $\sigma(E,E')$

d) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E'$ y $f \in E'$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ y $x \in E$ tal que

$$f_n \to f \text{ en } (E', \|\cdot\|_{E'}) = \sigma(E', \sigma(E', \|\cdot\|_E))$$

$$x_n \rightharpoonup x \text{ en } (E, \sigma(E,E'))$$

Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x) \quad \text{en } (\mathbb{K}, |\cdot|)$$

Demostración
a) Ya hecha
b) Utilizaremos BS.
Dado $n\in\mathbb{N}$, definamos

$$\delta_n : E' \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f \longmapsto \delta_n(f) = \langle \delta_n, f\rangle_{E''\times E'} = f(x_n)$$

donde

$$\|\delta_n\|_{E''} = \sup_{f\in \overline{B}_{E}} |\delta_n(f)| = \sup_{f\in\overline{B}_{E'}} |\langle \delta_n, f\rangle_{E''\times E'}| = \sup_{f\in\overline{B}_{E'}} |\langle f, x_n\rangle_{E'\times E}| = \|x_n\|_E$$

luego $\delta_n \in (E')'$. Como $\forall f\in E'$ $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, se tiene que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, es decir, existe $C_f>0$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)| \leq C_f$$

Utilizando BS, existe $C>0$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\delta_n\|_{E''} < C$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < C$$

lo que muestra que es acotada.

P.D $\|x\|_E \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$

$$|f(x_n)| \leq \|f\|_{E'} \|x_n\|_E$$

$$\Rightarrow \liminf_{n\to+\infty} |f(x_n)| \leq \|f\|_{E'} \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|_E$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_{E'} \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|_E$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|_E \quad \forall f\in\overline{B}_{E'}$$

$$\Rightarrow \|x\| = \sup_{f\in\overline{B}_{E'}} |f(x)| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|_E$$

d) Notemos que

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)|$$
$$\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$
$$< \|x_n\|_E \|f_n - f\|_{E'} + |f(x_n) - f(x)|$$
$$< M \underbrace{\|f_n - f\|_{E'}}_{\to 0} + \underbrace{|f(x_n) - f(x)|}_{\to 0} \longrightarrow 0.$$

c) P.D $\forall f\in E'$ $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$

Notemos que

$$\| f(x_n) - f(x)\| \leq \|f\|_{E'} \|x_n - x\|_E \longrightarrow 0$$

pues $x_n \to x$ fuertemente.

Observación Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión y $x\in E$. Supongamos que $x_n \rightharpoonup x$. Entonces, en general no podemos afirmar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja fuertemente $(\sigma(E, \|\cdot\|_E))$. Es decir, no sabemos si existe el límite fuerte de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pero si converge fuertemente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por unicidad del límite tiene que converger al límite débil.

2) Se verá que cuando $\dim(E)=+\infty$, entonces $\sigma(E,E') \subsetneq \sigma(E, \|\cdot\|_E)$ pero asombrosamente se verán espacios de dimensión infinita tales que las convergencias débil y fuerte coinciden. (ℓ^1)

3) La observación 2 permite intuir que la topología débil en ℓ^1 no es metrizable. Se verá que siempre en dimensión infinita la topología débil no es metrizable sobre todo el espacio.

4) Es claro que $(E', \|\cdot\|_{E'})$ es en sí mismo un espacio de Banach y por tanto puedo definir la topología débil que la notamos $(E', \sigma(E',E''))$ donde E'' es el dual del dual de E como bidual.

Con respecto a d) de la Proposición 1.4, si tenemos $f_n \to f$ en $\sigma(E',E'')$ en E' y $x_n \to x$ en $\sigma(E,E')$ en E, no se puede concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

Vamos a dar casos en los cuales

a) $x_n \rightharpoonup x \not\Rightarrow x_n \to x$ en dimensión infinita.

b) $f_n \rightharpoonup f \not\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$

Viernes, 9 de diciembre de 2022

P.D. Existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimensión infinita tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja débilmente pero no fuertemente.

Tomemos

$$\ell^p = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} \text{ tal que } \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \} \quad \text{con } p\in\,]1,+\infty[$$

Luego $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ es un espacio completo con la norma

$$\|\cdot\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

Notemos que $(\ell^p)' \approx \ell^{p'}$ con $1/p + 1/p' = 1$

$$\phi : \ell^{p'} \longrightarrow \ell^{p'}$$
$$y \longmapsto \phi(y) = \phi_y \in \ell^{p'}$$

ϕ es una isometría por tanto es continua

$$\phi_y : \ell^p \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \phi_y(x) = \sum_n x_n \overline{y_n}$$

Esta serie es convergente pues es absolutamente convergente y usando Hölder

$$\|\phi_y\|_{\ell^{p'}} = \|y\|_{\ell^{p'}}$$

$f \in (\ell^p)' \quad y = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ con $e_n = (0,\dots,0,1,0,\dots)$

n-ésimo término

Por el T. Isomorfismos de Banach se concluye que ϕ es un isomorfismo isométrico de $(\ell^p)'$ en $\ell^{p'}$

Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en ℓ^p y $x\in\ell^p$

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots$$
$$\vdots$$
$$x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots$$

Decimos que $x^n \to x$ en $(\ell^p, \sigma(\ell^p, \ell^{p'}))$ si y solo si

$\forall y \in \ell^{p'}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \langle y, x^n\rangle_{\ell^{p'}\times\ell^p} = \langle y, x\rangle_{\ell^{p'}\times\ell^p}$

donde

$$\langle y, x^n\rangle_{\ell^{p'}\times\ell^p} = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^n \overline{y_k} \iff \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{x_k^n} y_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{x_k} y_k$$

Consideremos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en ℓ^p.

P.D. $e_n \to 0$ en $\sigma(\ell^p, \ell^{p'})$

P.D. $e_n \not\to 0$ en $\sigma(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$

P.D. $\forall y \in \ell^{p'}$ $\quad f(e_n) \to f(0)$.

Sea $y \in \ell^{p'}$, P.D. $\lim_{n\to+\infty} \langle y, e_n\rangle_{\ell^{p'}\times\ell^p} = 0$

$$\langle y, e_n\rangle_{\ell^{p'}\times\ell^p} = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{y_k} e_n^k = \overline{y_n}$$

Luego

$$\lim_{n\to+\infty} \langle y, e_n\rangle = \lim_{n\to+\infty} \overline{y_n} = 0$$

Por absurdo, supongamos que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $(\ell^p, \sigma(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p}))$ Por unicidad del límite tiene que converger a cero.

No obstante, para todo $n\in\mathbb{N}$ $\|e_n\|_\ell = 1$. Lo cual contradice $(*)$

Caso $p=1$.

$(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ converge débilmente si y solo si $\forall y \in \ell^\infty$ $\lim_{n\to+\infty} \langle y, x^n\rangle = \langle y, x\rangle$

$(\ell^1)' = \ell^\infty$ $\quad$ Tomando $(1)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty$, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle y, e_n\rangle = 1 \neq 0$$

$\ell^1 \subsetneq (\ell^\infty)'$ $\quad$ Se tiene que la isometría no es sobreyectiva

$$\begin{aligned} \phi : \ell^1 &\longrightarrow (\ell^\infty)' \\ x &\longmapsto \phi_x : \ell^\infty \to \mathbb{K} \\ &\qquad\quad y \mapsto \phi_x(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{x_n} y_n \end{aligned}$$

$c_0 = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $x_n \to 0 \}$

$c = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente $\}$

$(c_0, \|\cdot\|_\infty)' \approx \ell^1$ $\quad (e_n \to 0, \sigma(c_0, \ell^1))$

P.D. $\phi : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ no es sobreyectiva

Por absurdo, supongamos que ϕ es sobreyectiva. Definamos

$$\begin{aligned} \varphi : c &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x &\longmapsto \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n \end{aligned}$$

Luego, φ es lineal y acotada $\quad |\varphi(x)| = \left|\lim_{n\to+\infty} x_n\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_{\ell^\infty}$

Utilizando el teorema de Hanh-Banach forma analítica, existe $\tilde{\varphi} \in (\ell^\infty)'$ tal que $\tilde{\varphi}|_c = \varphi$

Suponiendo que ϕ es sobreyectiva, tenemos que existe $y = (y_n) \in \ell^1$ tal que

$$\phi_y(\cdot) = \tilde{\varphi}(\cdot)$$

luego $\tilde{\varphi}|_{c_0} = 0$

Ahora como $\phi_Y(e_n) = \overline{Y_n}$ $\quad \varphi(e_n)=0 \quad \overline{Y_n}=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\therefore \; Y_n = 0 \iff Y=(0)_{n\in\mathbb{N}}.$$

No obstante

$$\|\phi_Y\|_{(\ell^\infty)'} = \|Y\|_{\ell^1} \qquad y \qquad \|\phi_Y\|_{(\ell^\infty)'} = \|\tilde{\varphi}\|_{(\ell^\infty)'} \neq 0$$

P.D. $\begin{array}{l} f_n \longrightarrow f \text{ en } (E', \sigma(E',E'')) \text{ [A]} \\ x_n \longrightarrow x \text{ en } (E,\sigma(E,E')) \end{array} \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$

$(H,(\cdot,\cdot))$ un e. Hilbert.

Recordemos el T. Representación de Riesz

$\forall \varphi \in H' \;\; \exists! x_\varphi \in H$ tal que

$$\forall y\in H \qquad \varphi(y) = \langle \varphi, y\rangle_{H'\times H} = (y, x_\varphi)_H$$

Además, se tiene que

$$\|\varphi\|_{H'} = \|x_\varphi\|_{H'}$$

H es isomorfo isométricamente a H'.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a x en H

$\iff \forall y\in H \;\; \lim\limits_{n\to+\infty} (y, x_n)_H = (y,x)_H$ [*]

$\iff \forall y \in H \;\; \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n, y)_H = (x,y)_H$

Sea $(\tilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal de H, i.e.,

- $\langle \tilde{e}_n, \tilde{e}_m\rangle = 0 \quad \forall n,m$ con $n\neq m$
- $\|\tilde{e}_n\| = 1 \quad \forall n$

P.D. $\tilde{e}_n \longrightarrow 0$ Usando [*] $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} (y, e_n)_H = (y,0) = 0\right)$

Sea $y\in H$, por la desigualdad de Bessel, se sigue que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(y,e_n)|^2 \leq \|y\|_H^2$$

Por lo tanto, como la serie es convergente, entonces $|(y,e_n)|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, de donde

$$\lim_{n\to+\infty} |(y,e_n)| \iff \lim_{n\to+\infty} (y,e_n) = 0$$ [A]

Para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $f_n\in H'$ tal que $f_n(y) = (y,e_n)_H$, luego por lo anterior se prueba que $f_n \longrightarrow 0_{H'}$, entonces

$$f_n(\tilde{e}_n) = |(\tilde{e}_n,\tilde{e}_n)|^2 = 1$$

pero $0_{H'}(0) = 0$.

Proposición 1.5 Sean $(E,\|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y $A\subseteq E$ convexo. Entonces

$$\overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)} = \overline{A}^{\sigma(E,E')}$$

Observación: Si C es convexo entonces

C es cerrado en $\sigma(E,E')$ si y solo si C es cerrado en $\sigma(E,\|\cdot\|_E)$

Notemos que, en general,

$$\overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)} = [A]^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)} \subset [A]^{\sigma(E,E')} \subset \overline{A}^{\sigma(E,E')}$$

P.D. $\overline{A}^{\sigma(E,E')} \subseteq \overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)}$

Lunes, 12 de diciembre de 2022.

P.D. $\left(\overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)}\right)^c \subseteq \left(\overline{A}^{\sigma(E,E')}\right)^c$

Sea $x_0 \notin \overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)}$, cualquiera. P.D. $x_0 \notin \overline{A}^{\sigma(E,E')}$

P.D. Existe $U_{x_0}\in \mathcal{U}(x_0)$ en $\sigma(E,E')$ tq. $U_{x_0}\cap A = \emptyset$

Utilizando el teorema de H-B 2^{da} forma geométrica, existe $f\in E'$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$Re(f(x_0)) < \alpha < Re(f(y)) \qquad \forall y\in \overline{A}$$

Tomando

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{ y\in E : |\langle f, x_0 - y\rangle| < \alpha - Re(f(x_0)) \}$$

Con esto se tiene que $\mathcal{U}_{x_0}\cap A = \emptyset$. y por lo tanto $\overline{A}^{\sigma(E,\|\cdot\|_E)} = \overline{A}^{\sigma(E,E')}$

Observación:

- Se tiene que C es un convexo cerrado en $\sigma(E,\|\cdot\|_E)$ si y solo si C es convexo cerrado en $\sigma(E,E')$
- B_E es cerrado en $\sigma(E,E')$
- $H_f^\alpha = \{y\in E : f(y) = \alpha\}$ es cerrado en $\sigma(E,\|\cdot\|_E)$ y $\sigma(E,\sigma(E,E'))$

$$f:(E,\sigma(E,\|\cdot\|_E)) \longrightarrow \mathbb{K} \text{ continua} \iff f:(E,\sigma(E,E'))\longrightarrow \mathbb{K} \text{ continua.}$$

Teorema 1.6 Sean $(E,\|\cdot\|_E)$ y $(F,\|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach y consideremos T una aplicación lineal, entonces los siguientes enunciados son equivalentes

a) $T:(E,\sigma(E,\|\cdot\|_E)) \longrightarrow (F,\sigma(F,\|\cdot\|_F))$ es continua

b) $T:(E,\sigma(E,E'))\longrightarrow (F,\sigma(F,F'))$ es continua

a) $\Rightarrow$ b) Recordemos que por la Prop 0.36 se tiene que

$\hat{T}:(E,\tilde{\tau}_E)\to (F,\sigma(F,F'))$ es continua si y solo si $\forall \Psi\in F'$ $\Psi\circ\hat{T}:(E,\tilde{\tau}_E)\to\mathbb{K}$ es continua

Supongamos que T es continua de $(E,\sigma(E,\|\cdot\|_E))$ en $(F,\sigma(F,\|\cdot\|_F))$

P.D. $\forall \Psi\in F'$ $\quad \Psi\circ T:(E,\sigma(E,\|\cdot\|_E))\longrightarrow\mathbb{K}$ es continua

Como T es fuertemente continua y $\Psi\in F'$, entonces $\Psi\circ T$ es continua.

b) $\Rightarrow$ a) Para ello necesitamos mostrar que el T Grafo cerrado en el sentido débil

Proposición 1.7. Sean $(E,\|\cdot\|_E)$ y $(F,\|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach. Se tiene que para $T:E\to F$ lineal

$T:(E,\sigma(E,E'))\longrightarrow(F,\sigma(F,F'))$ es continua si y solo si $G(T)=\{(x,Tx): x\in E\}$

es cerrado en $(E\times F,\sigma(E\times F,(E\times F)'))$

Antes de demostrar la Prop 1.7, tengamos en cuenta lo siguiente

Sean $(E,\|\cdot\|_E)$ y $(F,\|\cdot\|_F)$ dos e.Banach, sin dificultad podemos definir las topologías débiles en cada uno $(E,\sigma(E,E'))$ y $(F,\sigma(F,F'))$. A partir de estas dos topologías podemos definir la topología producto en $E\times F$ y la notaremos $\sigma(E,E')\times\sigma(F,F')$, donde $\sigma(E\times F,\sigma(E,E')\times\sigma(F,F'))$ e.t. Por otro lado, $E\times F$ es un e. Banach con la norma

$$\|(x,y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$$

Entonces sobre este e. Banach podemos definir la topología débil notada como $\sigma(E\times F,(E\times F)')$. Así, tenemos

$$\tau_1 = (E\times F,\sigma(E,E')\times\sigma(F,F')) \quad\text{y}\quad \tau_2 = (E\times F,\sigma(E\times F,(E\times F)'))$$

En primer lugar, mostremos que

$$(E\times F,\sigma(E,E')\times\sigma(F,F')) \subseteq (E\times F,\sigma(E\times F,(E\times F)'))$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que para $\mathcal{U}\in\sigma(E,E')\times\sigma(F,F')$, se tiene que

$$\mathcal{U} = \Omega_1\times\Omega_2 \quad\text{con } \Omega_1\in\sigma(E,E') \text{ y } \Omega_2\in\sigma(F,F')$$

P.D. $\mathcal{U} \in \sigma(E\times F, (E\times F)')$. $\Omega_1 = \bigcap_{i=1}^{m} \varphi_i^{-1}(W)$ con $\varphi_i \in E'$ y $W_i \subseteq \mathbb{K}$ un abierto.

Luego

$$\mathcal{U} = \left(\bigcap_{i=1}^{m} \varphi_i^{-1}(V_i)\right) \times \left(\bigcap_{j=1}^{n} \Psi_j^{-1}(W_j)\right) \quad \text{con } \varphi_i \in E',\ \Psi_j \in F',\ \text{y } V_i,\ W_j \text{ abiertos en } \mathbb{K}$$

Sea $(a,b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, mostremos que existe $\Omega^{(a,b)} \in \mathcal{V}(a,b)$ para $\sigma(E\times F, (E\times F)')$ tal que

$$(a,b) \in \Omega^{(a,b)} \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$$

Como $a \in \Omega_1$ y $\Omega_1 \in \sigma(E,E')$, entonces existe V^a vecindad abierta en $\sigma(E,E')$ tal que

$$a \in V^a \subseteq \Omega_1.$$

Sin pérdida de generalidad, puedo asumir que

$$V^a = \bigcap_{i\in I} \varphi_i^{-1}(B(\varphi_i(a), \varepsilon_1)) \quad \text{con } I \text{ finito y } \varphi_i \in E' \text{ para cada } i \in I$$

Análogamente,

$$V^b = \bigcap_{j\in J} \Psi_j^{-1}(B(\Psi_j(b), \varepsilon_2)) \quad \text{con } J \text{ finito}, \ \Psi_j \in F' \text{ para cada } j \in J.$$

así $b \in V^b \subseteq \Omega_2$. Dado $i \in I$ y $j \in J$, definamos

$$\theta_i : E\times F \longrightarrow \mathbb{K} \qquad\qquad \tilde{\theta}_j : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x,y) \longmapsto \theta_i((x,y)) = \varphi_i(x) \qquad (x,y) \longmapsto \tilde{\theta}_j((x,y)) = \Psi_j(y)$$

y además, se tiene que $\theta_i, \tilde{\theta}_j \in (E\times F)'$, en efecto

$$|\theta_i(x,y)| = |\varphi_i(x)| \leq \|\varphi_i\| \, \|x\|_E \leq \|\varphi_i\| (\|x\| + \|y\|) = \|\varphi_i\| \, \|(x,y)\|.$$

Con esto, definamos

$$\mathcal{U} = \left(\bigcap_{i\in I} \theta_i^{-1}(B(\theta_i(a,b)), \varepsilon_1)\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} \tilde{\theta}_j^{-1}(B(\tilde{\theta}_j(a,b)), \varepsilon_2)\right)$$

y así, por definición $\mathcal{U} \in \sigma(E\times F, (E\times F)')$, más aún

$$(a,b) \in \mathcal{U} \subseteq V^a \times V^b \subset \Omega_1 \times \Omega_2.$$

P.D. $\sigma(E\times F, (E\times F)') \subseteq \sigma(E,E') \times \sigma(F,F')$

Dado $\varphi \in (E\times F)'$, mostremos que

$$\varphi : (E\times F, \sigma(E,E') \times \sigma(F,F')) \longrightarrow \mathbb{K} \text{ es continua}$$

Notemos que

$$\varphi_E : E \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \text{y} \qquad \varphi_F : F \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \varphi_E(x) = \varphi((x,0)) \qquad y \longmapsto \varphi_F(y) = \varphi((0,y))$$

Con esto

$$\varphi(x,y) = \varphi((x,0) + (0,y)) = \varphi((x,0)) + \varphi((0,y)) = \varphi_E(x) + \varphi_F(y)$$

Demostración (~~Teorema 1.7~~ 1.6)

$\Rightarrow$ Supongamos que T es débilmente continua. P.D. $G(T)^c$ en $\sigma(E\times F, (E\times F)')$ es abierto.

Martes, 13 de diciembre de 2022

$\Rightarrow$ Sea $(x,y) \in G(T)^c$, cualquiera, entonces $Tx \neq y$. Como $\sigma(F,F')$ es separado, existen $V_{Tx} \in \mathcal{V}(Tx)$ y $V_y \in \mathcal{V}(y)$ en $\sigma(E,E')$ tales que

$$V_x \cap V_y = \emptyset$$

Como T es débilmente continua, entonces $T^{-1}(\mathcal{V}_{Tx})$ es abierto en $\sigma(E,E')$ que contiene a x. Por lo anterior, $T^{-1}(\mathcal{V}_{Tx}) \times \mathcal{V}_Y$ es abierto en $\sigma(E\times F, (E\times F)')$

P.D. › $(x,y) \in T^{-1}(\mathcal{V}_{Tx}) \times \mathcal{V}_Y$
› $T^{-1}(\mathcal{V}_{Tx}) \times \mathcal{V}_Y \subseteq G^c(T)$

Si $(x_1,y_1) \in T^{-1}(\mathcal{V}_{Tx}) \times \mathcal{V}_Y$ y $(x_1,y_1) \in G(T)$, entonces

$$x_1 \in T^{-1}(\mathcal{V}_{Tx}), \quad y_1 \in \mathcal{V}_Y \quad y \quad y_1 = Tx_1$$

De donde, se sigue que $Tx_1 \in \mathcal{V}_{Tx}$ y como $y_1 = Tx_1$, entonces

$$\mathcal{V}_{Tx} \cap \mathcal{V}_Y \neq \emptyset,$$

lo que no es posible. Así, se sigue lo requerido.

$\Leftarrow$) Como $G(T)$ es un conjunto convexo y cerrado débilmente, tenemos que gracias a la [Prop. 1.5] $G(T)$ es fuertemente cerrado en $(E\times F, \sigma(E\times F, \|\cdot\|_{E\times F}))$, luego usando el teorema del grafo cerrado usual, se sigue que T es fuertemente continua

$$T:(E, \sigma(E, \|\cdot\|_E)) \longrightarrow (F, \sigma(F, \|\cdot\|_F))$$

y por lo anterior, T es débilmente continuo [Teorema 1.6 b) $\Rightarrow$ a)]

Observación: Con respecto a la Proposición 1.6. surge la siguiente duda:

a) $T:(E,\|\cdot\|_E) \longrightarrow (F,\|\cdot\|_F)$ continua
b) $T:(E,\sigma(E,E')) \longrightarrow (F,\sigma(F,F'))$
c) $T:(E,\|\cdot\|_E) \longrightarrow (F,\sigma(F,F'))$
d) $T:(E,\sigma(E,E')) \longrightarrow (F,\|\cdot\|_F)$

Se tienen entonces los siguientes resultados:

I) a) $\Leftrightarrow$ b)
II) b) $\Rightarrow$ c)
III) d) $\Rightarrow$ a)
IV) d) $\Rightarrow$ c)
V) d) $\Rightarrow$ b)
VI) c) $\Rightarrow$ a)

c) $\Rightarrow$ a)

Sea $(x_1,y_1) \in G(T)^c$, entonces $y_1 \neq Tx_1$, luego existen $\mathcal{V}_{Tx_1} \in \mathcal{V}(Tx_1)$ y $\mathcal{V}_y \in \mathcal{V}(y)$ tales que

$$\mathcal{V}_{Tx_1} \cap \mathcal{V}_y = \emptyset$$

Luego, $T^{-1}(\mathcal{V}_{Tx}) \in \mathcal{V}(x_1)$ en $\sigma(E, \|\cdot\|_E)$. Así, $T^{-1}(\mathcal{V}_{Tx_1}) \times \mathcal{V}_{Y_1}$ es un abierto $\sigma(E\times F, (E\times F)')$, luego utilizando el teorema del grafo cerrado, se sigue el resultado.

Observación: De lo anterior, tenemos que

› a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c)

› d) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a)

Si suponemos que a) $\Rightarrow$ d), esto se cumple si y solo si $\operatorname{Im} T$ es un s.e.v. de dimensión finita

Ejemplos: La vecindad de un punto en la topología débil se define por

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{ y \in E : \forall f \in \emptyset_{x_0} \ |\langle f, x_0 - y\rangle| < \varepsilon \quad \text{con} \quad \emptyset_{x_0} \subseteq E' \text{ finito} \}$$

Por otro lado

$$0 \neq Y_0 \in \bigcap_{\varphi \in \emptyset_{x_0}} \ker(\varphi) \qquad \langle \varphi, Y_0\rangle = 0 \qquad \forall \varphi \in \emptyset_{x_0}$$

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, definamos $\hat{y} = x_0 - \lambda y_0$

$$|\varphi(\hat{y} - x_0)| = |\varphi(x_0 - \lambda y_0) - \varphi(x_0)| = |\varphi(x_0) - \lambda\varphi(y_0) - \varphi(x_0)| = \lambda|\overset{0}{\cancel{\varphi(Y_0)}}|$$

P.D. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es de dimensión infinita, entonces toda bola abierta B_E no es abierta en $\sigma(E,E')$.

Supomos por absurdo que $B_E = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ es un abierto en $\sigma(E,E')$

Así, existe $\mathcal{V}^0 \in \mathcal{V}(0_E)$ para la $\sigma(E,E')$ tal que

$$0 \in \mathcal{V}^0 \subseteq B_E.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$\mathcal{V}^0 = \{ y \in E : \forall i \in \{1,\dots,n_0\} \ |\langle \varphi_i, y\rangle| < \varepsilon \ \text{ con } \varphi_i \in E' \}$$

P.D. Existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n_0} \ker(\varphi_i)$

Por absurdo, supongamos que

$$\bigcap_{i=1}^{n_0} \ker(\varphi_i) = \{0_E\}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \vec{F} : E &\longrightarrow \mathbb{K}^{n_0} \\ x &\longmapsto \vec{F}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n_0}(x)) \end{aligned}$$

notemos que $\vec{F}$ es lineal, continua e inyectiva. Luego, como $\operatorname{Img} T < +\infty$, entonces $\dim(E)$ es finita, lo que es absurdo.

Así, existe $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n_0} \ker(\varphi_i)$ no nulo. Considerando

$$y_0(\lambda) = \lambda x_0, \qquad \lambda \in \mathbb{K}$$

tenemos que $y_0(\lambda) \in \mathcal{V}^0$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Además, $\begin{aligned} y_0 : \mathbb{K} &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \lambda x_0 \end{aligned}$ es continua y $\lim_{\lambda \to +\infty} \|y_0(\lambda)\| = +\infty$. Luego, existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tal que $\|y_0(\lambda_0)\| = 1$, de donde $y_0(\lambda_0) \in \mathcal{V}_0 \subset \overline{B_E}$ lo cual contradice nuestra hipótesis.

Ejemplo. Consideremos la esfera unitaria $S_E = \{x \in E : \|x\|_E = 1\}$

S_E es cerrada en $(E, \|\cdot\|_E)$, pero no es cerrada en $\sigma(E,E')$.

P.D. $\overline{S_E}^{\sigma(E,E')} = \overline{B_E}$

P.D. $\overline{B_E} \subseteq \overline{S_E}^{\sigma(E,E')}$

- Si $x \in \overline{B_E}$ y $\|x\| = 1 \Rightarrow x \in S_E \Rightarrow x \in \overline{S_E}^{\sigma(E,E')}$
- Si $x \in \overline{B_E}$ y $\|x\| < 1 \Rightarrow$ P.D. $\exists\, \mathcal{V}^x \in \mathcal{V}(x)$ en $\sigma(E,E')$ tal que $\mathcal{V}^x \cap S_E \neq \emptyset$

En efecto, tomando

$$\mathcal{V}^x = \{ y \in E : \bigcap_{i=1}^{n_0} \varphi_i^{-1}(B(\varphi_i(x), \varepsilon)) \ \text{ con } \varphi_i \in E' \}$$

Luego, sabemos que existe x_0 no nulo tal que

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n_0} \ker(\varphi_i)$$

Así, definiendo $y_0(\lambda) = x + \lambda x_0$, se tiene que existe λ_0 tal que $\|y_0(\lambda_0)\| = 1$. Luego

$$\|y_0(\lambda_0)\| = 1 \Rightarrow y_0(\lambda_0) \in S_E \quad \text{y} \quad y_0(\lambda_0) \in \mathcal{V}^x$$

$$\therefore \mathcal{V}^x \cap S_E \neq \emptyset.$$

- P.D. $(E, \sigma(E,E'))$ no es metrizable cuando $\dim E = +\infty$.

Si mostramos que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\|x_n\| = n \ \forall n \in \mathbb{N}$ y

$$x_n \longrightarrow 0,$$

esto contradice la Proposición 1.4 (b)

Supongamos por absurdo que $(E, \sigma(E,E'))$ es metrizable, entonces se sigue que

$$\tau_d \approx \sigma(E,E') \quad \text{en todo } E.$$

Así, se tiene que todo punto de E, admite una base de vecindades numerable, en particular para 0_E, en efecto, consideremos

$$B(0, 1/n) \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Así, $\{B(0,1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de vecindades de 0_E. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathcal{V}_0 \in \sigma(E,E')$ tal que

$$0 \in \mathcal{V}_0^n \subseteq B(0, 1/n).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$\mathcal{V}_0^n = \{ y \in E : |\langle \varphi_i, y \rangle| < \varepsilon \ \text{ con } i \in \{1,\dots,m_n\} \ \text{ y } \ \varphi_i \in E' \}$$

luego, existe

$$\widehat{x}_n \in \bigcap_{i=1}^{m_n} \ker(\varphi_i) \quad \text{con} \quad \widehat{x}_n \neq 0.$$

Con esto, podemos definir

$$x_n = \frac{n}{\|\widehat{x}_n\|} \cdot \widehat{x}_n$$

$$\therefore \quad \|x_n\| = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, tenemos que $x_n \in B(0, 1/n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde

$$d(0, x_n) < 1/n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \quad x_n \text{ converge a } 0 \text{ en } \tau_d$$

$$\therefore \quad x_n \rightharpoonup 0 \quad [\text{Pues } \tau_d \approx \sigma(E,E')]$$

lo que [Contradice 1.4(b)], con lo que se sigue el resultado.

Lunes, 19 de diciembre de 2022.

Otra forma para mostrar que $(E, \sigma(E,E'))$ no es metrizable es que

a) Mostrar que existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F'$ tal que $(\forall k \geq 1)$, $(\exists\ I_k \subseteq \mathbb{N}$ finito$)$ $(\exists\ \varepsilon_k > 0)$ tal que

$$\bigcap_{i \in I_k} \{ x \in E : |\langle f_i, x \rangle| < \varepsilon_k \} \subseteq B_E(0, 1/k)$$

b) Sea $g \in E'$ y $V = \{ x \in E : |\langle g, x \rangle| < 1 \}$. P.D. $\exists$ una parte finita $I \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcap_{i\in I} \ker(f_i) \subseteq V \quad \text{despues} \quad \bigcap_{i \in I} \ker(f_i) \subseteq \ker(g).$$

c) Notando $I = \{n_1, \dots, n_k\}$, consideramos

$$F : E \longrightarrow \mathbb{K}^{k+1}$$
$$x \longmapsto (g(x), f_{n_1}(x), \dots, f_{n_k}(x))$$

Separar $\mathrm{Img}(F)$ con $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^{k+1}$. Deduzca que existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tal que

$$g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{n_i}$$

d) Consideramos $F_n = \mathrm{gen}\{f_1, \dots, f_n\}$. P.D. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E' = F_{n_0}$. Concluya teniendo en cuenta el objetivo del ejercicio.

a) Supongamos que $\sigma(E,E')$ es metrizable, es decir, existe d una métrica sobre E tal que

$$\tau_d \approx \sigma(E,E').$$

Luego, consideramos $B_E(0,1/k)$, entonces existe $\mathcal{V}_{0_E} \in \mathcal{V}(0_E)$ en $\sigma(E,E')$ tal que

$$0 \in \mathcal{V}_{0_E}^{k} \subseteq B(0,1/k)$$

donde

$$\mathcal{V}_{0_E}^{k} = \{x\in E : \forall i \in \Phi_k \ |f_i(x)| < \varepsilon_k \quad \text{con } \Phi_k \subseteq \mathbb{N} \text{ finito}\}.$$

Así, tomando $J = \bigcup \Phi_k$ tenemos que J es numerable y más aún $(f_j)_{j\in J}$ es una sucesión de E'.

b) Sea $g \in E'$ y $V = \{x \in E : |\langle g, x\rangle| < 1\}$.

Se tiene que $V \in \mathcal{V}(0)$ para la topología $\sigma(E,E')$. Como $\tau_d \approx \sigma(E,E')$, entonces existe $\hat{k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$B(0,1/\hat{k}) \subseteq V.$$

Luego, por el literal anterior existe $I \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que

$$W_{\hat{k}} = \{x \in E : \forall i \in I \ |\langle f_i, x\rangle| < \varepsilon_{\hat{k}}\} \subseteq B(0,1/\hat{k}) \subseteq V$$

Así, si $x \in \bigcap_{i\in I} \ker(f_i)$, entonces $x \in W_{\hat{k}} \subseteq B(0,1/\hat{k}) \subseteq V$.

Si $x \in \bigcap_{i\in I}\ker(f_i)$, entonces $x \in V$, $|g(x)| < 1$, luego

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad |\lambda|\,|g(x)| < 1$$

Así, $x \in \ker(g)$, i.e., $g(x) = 0$, con lo que se concluye que $\bigcap_{i\in I}\ker(f_i) \subseteq \ker(g)$.

c) Por el literal anterior, $(1,0,\dots,0) \notin \operatorname{Img}(F)$. Utilizando H-B. seguna forma geométrica existen $(B_1,\dots,B_k) \in \mathbb{K}^{k+1}$ tales que

$$\operatorname{Re}(B_0) < \hat{\alpha} < \operatorname{Re}\left(B_0 g(x) + \sum_{i=1}^{k} B_i f(x)\right)$$

En efecto, como existe $f \in (\mathbb{K}^{k+1})'$, entonces por representación de Riez existe $\overset{\text{único}}{\vee}$ $\beta = (B_0,\dots,B_k) \in \mathbb{K}^{k}$ tales que

$$f(x) = \langle x, \beta\rangle_{\mathbb{K}^{k+1}}.$$

Ahora, notemos que $\beta_0 \neq 0$ pues de no serlo y para $0 \in E$, $F(0) = (0,\dots,0)$

$$\operatorname{Re}(B_0) < \hat{\alpha} < \operatorname{Re}\left(B_0 g(x) + \sum_{i=1}^{n} B_i f(x)\right) \Rightarrow 0 < \hat{\alpha} < 0 \qquad \Rightarrow \Leftarrow.$$

Ahora, como $\beta_0 \neq 0$, entonces

$$\hat{\alpha} < \operatorname{Re}\left(B_0 g(x) + \sum_{i=1}^{k} B_i f(x)\right) < 1 \cdot 1 \quad \forall x \in E$$

Notando que E es un e.v y tomando sucesiones se prueba que $\operatorname{Re}(\cdot) = 0 \Rightarrow (\cdot) = 0 \Leftrightarrow \cdot = 0$

$$\Rightarrow B_0 g(x) + \sum_{i=1}^{k} B_i f(x)$$

Con esto, hemos probado que

$$g(x) = -\frac{1}{B_0}\left(\sum_{i=1}^{k} B_i f_i\right)(x)$$

tomando $\lambda_i = -\dfrac{1}{B_0} B_i$, entonces

d) Note que con lo que hemos visto tenemos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E' \quad \text{P.D. } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \operatorname{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset \text{. P.D. } F_{n_0} = E$$

Sea $f \in E'$. P.D $f \in F_{n_0}$

Como $\operatorname{Int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$, existen $f_0 \in F_{n_0}$ $\varepsilon > 0$ y tales que

$$B(f_0, \varepsilon) \subseteq F_{n_0},$$

luego

$$B(f_0, \varepsilon) = \{ f \in E' : \| f - f_0 \| < \varepsilon \}$$

Así, definiendo

$$\hat{f} = \frac{-\varepsilon}{2\|f\|} + f_0 \qquad f_0 - \hat{f} = \frac{\hat{\varepsilon} f}{2\|f\|} \qquad \|\hat{f} - f_0\| < \varepsilon \qquad \text{con } \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underbrace{\hat{f} - f_0}_{\in F_{n_0}} = -\underbrace{\frac{\varepsilon f}{2\|f\|}}_{\in F_{n_0}} \quad \Rightarrow \quad f \in F_{n_0}.$$

Por lo tanto, $\dim(E') < +\infty \Rightarrow\Leftarrow$

Martes, 20 de diciembre de 2022

Sección: La topología débil * sobre E'

Definición 1.8. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach. Decimos que E admite un espacio predual si existe un espacio de Banach $(F, \|\cdot\|_F)$ tal que

$$F' \approx E$$

es decir es isométricamente isomorfo.

Observación: El predual de un espacio, si es que existe es único salvo por isomorfismos

Ejemplos: Los siguientes espacios admiten un predual

- ℓ^p con $1 < p < +\infty$
- $\mathcal{L}^p(\Omega)$
- ℓ^∞
- $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$
- ℓ^1 (c_0)

Los siguientes espacios no admiten un predual

- $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$

Tengamos en cuenta que sobre $(E', \|\cdot\|_{E'})$ por el momento se puede considerar dos topologías.

- $(E', \|\cdot\|_{E'})$ topología fuerte y
- $(E', \sigma(E', E''))$

En esta parte del curso construiremos una nueva topología sobre E' que nos permita tener la propiedad de compacidad sobre $B_{E'}$ con dicha topología.

Definición 1.9. Sea E un espacio de Banach, consideramos $(E'', \|\cdot\|_{E''})$ su espacio bidual asociado. Definamos la inyección canónica de E en E'' de la siguiente forma

$$\begin{aligned} J : (E, \|\cdot\|_E) &\longrightarrow (E'', \|\cdot\|_{E''}) \\ x &\longmapsto J(x) = J_x \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{J}_x : (E', \|\cdot\|_{E'}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f \longmapsto \mathcal{J}_x(f) = \langle \mathcal{J}_x, f \rangle_{E''\times E'} = \langle f, x \rangle_{E'\times E} = f(x).$$

Además, $\mathcal{J}$ tiene las siguientes propiedades:

- Lineal
- Isometría
- En general, $\mathcal{J}$ no es sobreyectiva.
- Continua

$$\|\mathcal{J}_x\|_{E''} = \sup_{f\in \overline{B}_{E'}} |\langle \mathcal{J}_x, f \rangle_{E''\times E'}| = \sup_{f\in \overline{B}_{E'}} |\langle f, x \rangle_{E'\times E}| = \|x\|_E$$

Definición 1.10. - Espacios reflexivos - Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, decimos que E es un espacio reflexivo si la inyección canónica

$$\mathcal{J} : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (E'', \|\cdot\|_{E''})$$

es sobreyectiva.

Ejemplos:

- $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ es reflexivo para $1 < p < +\infty$ $(\mathcal{L}^p(\Omega))$
- $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ no es reflexivo $(\mathcal{L}^1(\Omega))$
- $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ no es reflexivo $(\mathcal{L}^\infty(\Omega))$
- Todo espacio de Hilbert es reflexivo

Observaciones:
- Note que si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio de Banach reflexivo, entonces E es isométricamente isomorfo a E''. La recíproca es falsa; es decir, si E y E'' son isomorfos, eso no implica que E sea reflexivo.
(La respuesta o ejemplo de esto se puede encontrar T. James 1975)

Por otro lado $(\mathcal{J}_x)_{x\in E}$ es una familia de elementos de E''

Definición 1.11. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su dual. Definimos la topología débil * en E' como la topología más pequeña definida en E' que deja continua la familia de aplicaciones $(\mathcal{J}_x)_{x\in E}$.

La notaremos como $\sigma(E', E)$, $(E', \sigma(E', E))$

A continuación, algunos comentarios sobre esta topología. $\sigma(E', E)$

- β es una base para $\sigma(E', E)$ donde $\beta \subseteq \mathcal{P}(E')$

$$\beta = \left\{ V = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{J}_{x_i}^{-1}(\omega_i) \text{ con } \omega_i \text{ abierto en } \mathbb{K}\ \forall i \in \{1,\dots,n\} \text{ y } x_i \in E\ \forall i \in \{1,\dots,n\} \right\}$$

$$\sigma(E', E) = \left\{ \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in F_i} \mathcal{J}_{x_j}^{-1}(B_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} * \ I \text{ un conjunto indexado} \\ \text{con: } * \ \forall i \in I,\ F_i \text{ es un conjunto finito} \\ \quad \ \forall j \in F_i\ \ B_j \text{ es un abierto en } \mathbb{K} \\ \quad \ \forall j \in F_i\ \ x_j \in E \end{array} \right\}$$

Dado $f \in E'$ una base de vecindades de φ para $\sigma(E', E)$ es

$$\mathcal{V}(f) = \left\{ \mathcal{V}^{(f)} = \left\{ g \in E' : \begin{array}{l} \forall j \in J \ \ |\langle g - f, x_j \rangle_{E'\times E''}| < \varepsilon \\ \forall j \in J \ \ |\langle \mathcal{J}_{x_j}, g - f \rangle_{E''\times E'}| < \varepsilon \end{array} \right\} \text{ con } J \text{ un subconjunto de índices finitos} \right\}$$

$$\mathcal{V}f = \bigcap_{j\in J} \mathcal{J}_{x_j}^{-1}(B(\varphi(x_j), \varepsilon))$$

Observación: Se tiene que

$$\sigma(E',E) \subseteq \sigma(E',E'') \subseteq \sigma(E',\|\cdot\|_{E'})$$

Proposición 1.12. Se tiene que $(E',\sigma(E',E))$ es un espacio topológico de Hausdorff.

Intento 1

Supongamos que $f_1, f_2 \in E'$ tal que $f_1 \neq f_2$, entonces existe $x \in E$ tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$, luego como $\mathbb{K}$ es separado, Entonces, existen $\mathcal{V}^1 \in \mathcal{V}(f_1(x))$ y $\mathcal{V}^2 \in \mathcal{V}(f_2(x))$ abietos tales que

$$\mathcal{V}^1 \cap \mathcal{V}^2 = \emptyset$$

luego, tomamos

$$W^{f_1} = J_x^{-1}(\mathcal{V}^1) \quad \text{y} \quad W^{f_2} = J_x^{-1}(\mathcal{V}^2)$$

Entonces ambas son vecindades abiertas de f_1 y f_2 y es fácil ver que

$$W^{f_1} \cap W^{f_2} = \emptyset$$

Intento 2

Aplicando H-B segunda forma geométrica, tenemos que $f_1 \neq f_2$, luego $\{f_1\}$ y $\{f_2\}$ son disjuntos. Luego existe $\hat{\xi} \in E''$ tal que $H_{\hat{\xi}}^{\alpha}$ separa estrictamente, puesto que

$$\hat{\xi}: (E',\sigma(E',\|\cdot\|_{E'})) \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{continuo}$$
$$\Downarrow$$
$$\hat{\xi}: (E',\sigma(E',E'')) \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{continuo}$$
$$\not\Downarrow$$
$$\hat{\xi}: (E',\sigma(E',E)) \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{continuo}$$

Así, $H_{\hat{\xi}}^{\alpha}$ no es necesariamente cerrado en $\sigma(E',E)$.

Más aún se concluye que existen conjuntos convexos tales que la clausura débil y la clausura débil * no coinciden.

Observación: Si $\xi \in E''$ no necesariamente $\xi: (E',\sigma(E',E)) \longrightarrow \mathbb{K}$ es continuo.

- Además, se verá que si $\hat{\xi}: (E',\sigma(E',E)) \longrightarrow \mathbb{K}$ es continua si y solo si existe $x \in E$ tal que $J_x = \hat{\xi}$, es decir

$$H_{\hat{\xi}}^{\alpha} = \{ f \in E' : \langle f, x\rangle = \alpha \quad \text{para algún } x \in E \}$$

- Sea $A \in E'$, tenemos que

$$\overline{A}^{\sigma(E',\|\cdot\|_{E'})} = [A]^{\sigma(E',\|\cdot\|_{E'})} \subseteq [A]^{\sigma(E',E'')} \subset \overline{A}^{\sigma(E',E'')} \subset \overline{A}^{\sigma(E',E)}$$
$$\subset [A]^{\sigma(E',E)} \subset \overline{A}^{\sigma(E',E)}$$

No se puede encontrar relación con la clausura débil.

Sea $C \subseteq E'$ convexo

$$\overline{C}^{\sigma(E',\|\cdot\|_{E'})} = [C]^{\sigma(E',\|\cdot\|_{E'})} = [C]^{\sigma(E',E'')} \subset [C]^{\sigma(E',E)} \subset \overline{C}^{\sigma(E',E)}$$

Proposición 1.13 Sea $(E,\|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y $(E',\|\cdot\|_{E'})$. Entonces se tiene lo siguiente

a) $f_n \xrightarrow{*} f$ si y solo si $\forall x \in E \quad f_n(x) \longrightarrow f(x)$ en $\mathbb{K}$

b) $f_n \xrightarrow[\sigma(E',\|\cdot\|_{E'})]{} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[\sigma(E',E'')]{} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[\sigma(E',E)]{*} f$

c) $f_n \xrightarrow{*} f$ entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en E' y además

$$\|f\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$$

d) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ y $x_n \longrightarrow x$ entonces $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$ en $\mathbb{K}$

Ejercicios de repaso.

Problema 1: Sean (X, τ) un e.t. y $A \subseteq X$. Decimos que A es numerablemente compacto si todo recubrimiento abierto numerable de A admite un subrecubrimiento finito

Muestre que si (X,d) es un e.m. Entonces $A \subseteq X$ es numerablemente compacto si y solo si A es compacto.

$\Leftarrow)$ Por la definición de compacidad aplicada a un recubrimiento numerable, se sigue el resultado.

$\Rightarrow)$ Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de A, es decir que

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$$

Por otro lado, como (X,d) es un e.m entonces todo punto admite una base de vecindades numerable, así, para $x \in A$, existe $\{W_x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades numerable. Luego, como $x \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$, entonces existe $\hat{\imath} \in I$ tal que

$$x \in \mathcal{U}_{\hat{\imath}}.$$

De esta manera, como $\mathcal{U}_{\hat{\imath}} \in \tau_d$, entonces existe $n = n(x,\hat{\imath}) \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in W_x^n \subseteq \mathcal{U}_{\hat{\imath}}$$

Otra forma

Como A es compacto, equivalentemente es secuencialmente compacta
Por contradicción, supongamos que A no es secuencialmente compacto. Así, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que no admite una subsucesión convergente
Así, se tiene que la sucesión no admite un valor adherente, es decir, para cada $x \in A$, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$\{ n \in \mathbb{N} : x_n \in V_x \} \quad \text{es finito.}$$

Luego, como los singleton son cerrados en τ_d, entonces $D = \{x_n\}_{n\in D}$ es cerrado en τ_d por ser la unión de cerrados. Ahora, como τ_d admite una base de vecindades numerable y D es cerrado, finito, entonces existe $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$D \cap B(x, \varepsilon_x) = \{x\}$$

Martes, 3 de enero de 2023

Corrección del control.

Ejercicio 1

a) Supongamos τ_{d_1}, τ_{d_2} H.T.E.
P.D. τ_{d_1} y τ_{d_2} equivalentes

Sea F un cerrado en τ_{d_1} P.D. $F = \overline{F}^{\tau_{d_2}}$
$F \subseteq \overline{F}^{\tau_{d_2}}$
Si $x \in \overline{F}^{\tau_{d_2}} = [F]^{\tau_{d_2}}$, existen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ tq $x_n \to x$ en τ_{d_2} $\Leftrightarrow$ $x_n \to x$ en τ_{d_1}

b) Consideremos dos e.m. con d y $\hat{d}$ dos métricas tales que

$$\hat{d} = \frac{d}{1+d}$$

Ejercicio 2. Por absurdo supongamos que es II - Numerable.
Para $x = 0$, existe $\{V_n^o\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades numerable

Sean $g \in E'$, y $\varepsilon > 0$, consideremos

$$V = \{ y \in E : |\langle g, y\rangle| < \varepsilon \}$$

Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_{n_0}^o = \{ x \in E : \forall f \in \phi_{n_0} \ |f(x)| < \hat{\varepsilon} \} \qquad \phi_{n_0} \subseteq E' \text{ finito.}$$

Ejercicio 4 - Deber 2.

Ejercicio 3. Parte a) trivial

Demostración (Proposición 1.13)

a) Trivial

b) Las demostraciones restantes se obtienen análogamente

c) Supongamos que $f_n \xrightarrow{*} f$

Por el literal a), se tiene que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{K}$ y por lo tanto es acotada, es decir

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < C_x$$

Luego por el teorema de Banach-Steinhaus

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E'} < +\infty.$$

Para la parte restante

$$\|f\|_E = \sup_{x\in B_E} |f(x)|$$

$|f_n(x)| \leq \|f_n\| \, \|x\|$

$\Rightarrow |f_n(x)| \leq \|f_n\|$

$\Rightarrow |f_n(x)| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\| \quad \Rightarrow \quad \|f_n\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'}$

d) $|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|$

$\leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$

$\leq \|f_n\| \, \|\underbrace{x_n - x}_{\to 0}\| + |\underbrace{f_n(x) - f(x)}_{\to 0}|$

Observación: En dimensión infinita, en general, convergencia débil * no implica convergencia débil

$$c_0 \longrightarrow \ell^1 \longrightarrow \ell^\infty$$

predual dual

Consideremos la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. P.D. $e_n \xrightarrow{*} 0$ en $\sigma(\ell^1, c_0)$; $e_n \not\to 0$ en $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$

Mostremos que para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$

$$\lim_{n\to+\infty} \langle e_n, x\rangle = 0.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \langle e_n, x\rangle = \sum_{n\geq 1}^{!} e_n x = x_n \qquad \text{Así} \quad e_n \xrightarrow{*} 0$$

Supongamos que $e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, i.e.

$\forall x \in \ell^\infty \quad \lim_{n\to+\infty} \langle e_n, x\rangle = 0$

Consideremos $x = (1, 1, \dots)$, notemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle e_n, x\rangle = \sum_{n\geq 1}^{!} e_n x_n = x_n = 1 \neq 0$$

$$\therefore \; x_n \not\to 0$$

Observación: Si $x_n \longrightarrow x$ en $(E, \sigma(E, E'))$ y $f_n \xrightarrow{*} f$ $\left(\text{incluso si } f_n \to f\right)$ no implica que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$$

Ejemplo $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ $\quad e_n \longrightarrow 0$ en $(c_0, \sigma(c_0, \ell^1))$

$$e_n \overset{w}{\longrightarrow} 0 \text{ en } (\ell^1, \sigma(\ell^1, c_0))$$

$$\lim_{n\to+\infty} \langle e_n, e_n\rangle = 1 \neq 0.$$

Viernes, 6 de enero de 2023.

Teorema 1.14. (Teorema de Banach-Alaoglu) Sea E un espacio de Banach y $(E', \|\cdot\|_E)$ su espacio dual. Entonces

$$\overline{B}_{E'} = \{ f\in E' : \|f\| \leq 1\}$$

es compacto para la topología débil $*$ $\sigma(E', E)$.

Observación Del teorema anterior, se deduce que

- $(\overline{B}_E, \sigma(E', E))$ es un espacio topológico compacto
  (Todas las bolas cerradas son conjuntos compactos en $\sigma(E', E)$)
- Para todo $A \subseteq E'$; si
  - A es acotado
  - A es cerrado para $\sigma(E', E)$ entonces A es compacto para $\sigma(E', E)$
  - Las bolas cerradas son conjuntos cerrados en $\sigma(E', E)$

Demostración
En primer lugar, consideremos

$$Y = \{ \text{funciones que van de } E \text{ en } \mathbb{K} \},$$

además, se puede ver a Y como un espacio producto

$$Y = \mathbb{K}^E = \prod_{x\in E} Y_x \qquad Y_x = \mathbb{K} \qquad \forall x\in E$$

o incluso como sucesiones

$$(w_x)_{x\in E} \qquad \forall x \qquad w_x \in \mathbb{K}$$

$$f \in Y \qquad (f(x))_{x\in E}$$

Sobre Y podemos definir la topología producto. Recordemos que la topología producto τ_{prod} es la topología más pequeña que deja continuas las proyecciones $(p_x)_{x\in E}$, donde

$$p_x : Y \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f \longmapsto p_x(f) = p_x\left((w_x)_{x\in E}\right) = p_x\left((f(x))_{x\in E}\right) = f(x) = w_x.$$

Ahora, definamos

$$\varphi : (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow (Y, \tau_{prod})$$
$$f \longmapsto \varphi(f) = (\langle f, x\rangle_{E'\times E})_{x\in E}$$

a) P.D φ es lineal, inyectiva y continua

P.D $\varphi : (E' : \sigma(E', E)) \to (Y, \tau_{prod})$ $\qquad$ ▸ φ: lineal e inyectiva es trivial.

- Así, φ es continua si y solo si $\forall x\in E$ $\quad p_x \circ \varphi : (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow (\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|})$ es continua.

Sea $x\in E$, cualquiera, notemos que

- $$(p_x \circ \varphi)(f) = p_x\left((f(x))_{x\in E}\right) = f(x)$$

luego $\qquad p_x \circ \varphi = J_x$

Así, como por construcción J_x es continua, por la definición de $\sigma(E',E)$, así $p_x \circ \varphi$ es continua y más aún

$$\varphi : (E', \sigma(E',E)) \longrightarrow (Y, \tau_{prod})$$

es continua. P.D.

$$\varphi^{-1} : (Y, \tau_{prod}) \longrightarrow (E', \sigma(E',E)) \quad \text{es continua.}$$

Para ello, como

$$\begin{tikzcd} \varphi^{-1} : (\varphi(E), \tau_{prod}) \arrow[r] \arrow[dr] & (E', \sigma(E',E)) \arrow[d, "J_x"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

P.D. $\forall x \in E$ $\quad (J_x \circ \varphi^{-1}) : (\varphi(E'), \tau_{prod}) \longrightarrow \mathbb{K}$

$$f \longmapsto J_x(f) = \langle f, x \rangle = f(x) = p_x(f)$$

como τ_{prod} es la topología más pequeña que hace continuas las proyecciones, tenemos que φ^{-1} es continuo

Por lo tanto, φ es un homeomorfismo entre $(E', \sigma(E',E)) \to (\varphi(E'), \tau_{prod})$

b) P.D. $\varphi(\overline{B}_{E'})$ es compacto en (Y, τ_{prod})

Notemos que

$$\overline{B}_{E'} = \{ f \in E' : \|f\|_{E'} = \sup_{x \in \overline{B}_E} |f(x)| < 1 \}.$$

Queremos mostrar que

$$\varphi(\overline{B}_{E'}) = K$$

donde

$$K = \left\{ \omega = (\omega_x)_{x\in E} \in Y : \begin{array}{ll} |\omega_x| \leq \|x\|_E & \\ \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y & \forall x,y \in E \\ \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x & \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$$

Así, tomando $f \in \overline{B}_{E'}$, entonces $\|f\|_{E'} \leq 1$, notemos que

$$\varphi(f) = (f(x))_{x \in E}$$

luego como

$$f(x+y) = f(x+y) \qquad y \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

y además, como

$$|f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E \leq \|x\|_E.$$

Por lo tanto, $\varphi(\overline{B}_{E'}) \subseteq K$. Recíprocamente.

P.D. $K = K_1 \cap K_2$, donde $K_1 = \{ \omega \in Y : |\omega_x| < \|x\| \ \forall x \in E \}$ y

$$K_2 = \left[\bigcap_{(x,y) \in E \times E} A_{x,y} \right] \cap \left[\bigcap_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ x \in E}} A_{\lambda x} \right]$$

$$A_{x,y} = \{ \omega \in Y : \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0 \}$$

$$A_{\lambda x} = \{ \omega \in Y : \omega_{\lambda x} - \lambda \omega_x = 0 \}$$

En primer lugar, notemos que

$$K_1 = \prod_{x \in E} K_x \qquad \text{con} \quad K_x = \{ y \in \mathbb{K} : |y| \leq \|x\| \}$$

luego, como cada K_x es compacto, por el teorema de Tychonoff, se sigue que K_1 es compacto.

Ahora, mostremos que K_2 es cerrado. En primer lugar, note que

$$A_{x,y} = \{ w \in Y : w_{x+y} - w_x - w_y = 0 \}$$

es cerrado pues es la preimagen del $\{0\}$ a partir de una función continua

$$\hat{\Phi}_{x,y}(w) = w_{x+y} - w_x - w_y$$

Análogamente, se muestra que $A_{\lambda x}$ es cerrado. Con esto, se concluye que K_2 es cerrado.
Así, se tiene que

$$\varphi(\overline{B}_{E'}) = K = K_1 \cap K_2$$

es un cerrado y contenido en un compacto, por lo tanto $\varphi(\overline{B}_{E'})$ es compacto.

Como φ es un homeomorfismo, se concluye que $\overline{B}_{E'}$ es compacta en la topología débil $\sigma(E', E)$

Observaciones.
- La bola $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ admite la propiedad B-W
- El hecho de que $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E',E))$ sea compacta, no implica que el espacio $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E',E))$ sea un e.t. secuencialmente compacto. Es decir, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $B_{E'}$, no necesariamente existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.

Ejemplo: Consideremos $E = \ell^\infty$ y $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\ell^\infty)'$. Definida como

$$\delta_n : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \delta_n(x) = x_n$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Así, como

$$\hat{\delta}_n = \frac{\delta_n}{\|\delta_n\|}$$

Lunes, 9 de enero de 2023.

Continuación de la demostración anterior

Note que $\|\delta_n\|_{(\ell^\infty)'} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B}_{E'}$. Así, por el teorema de Banach-Alouglu, la sucesión $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un v.a. en $\sigma((\ell^\infty)', \ell^\infty)$

Supongamos que $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente en $((\ell^\infty)', \ell^\infty)$, es decir, existe $(\delta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que converge en $\sigma((\ell^\infty)', \ell^\infty)$.

Así, tomando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty$ definida como:

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } n = n_{\hat{k}} \quad \text{para algún } \hat{k} \in \mathbb{N} \text{ y } n \text{ par} \\ -1 & \text{si } n_k = n_{\hat{k}} \quad \text{para algún } \hat{k} \in \mathbb{N} \text{ y } n \text{ impar} \end{cases}$$

Entonces $\delta_{n_k}(x) = x_{n_k} = (-1)^{n_k}$, no obstante, por construcción, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ no converge. la cual no es convergente cuando $k \to +\infty$.

Teorema 1.15. (Teorema de Kakutani) Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y $(E', \|\cdot\|_{E'})$ su espacio dual. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

Ver [1] Pág 68.

a) E es reflexivo

b) $(\overline{B}_E, \sigma(E, E'))$ es un espacio topológico compacto.

Observación: Si E es reflexivo, se tiene que:

a) Si $\overline{B}$ es una bola cerrada entonces es compacta en $\sigma(E, E')$

b) Si A es acotado y cerrado en $\sigma(E,E')$, entonces A es compacto en $\sigma(E,E')$

c) Si A es convexo, acotado y cerrado en $\sigma(E,\|\cdot\|_E)$, entonces A es compacto en $\sigma(E,E')$.

Demostración (Teorema 1.15)
Supongamos que E es reflexivo, entonces sobre el espacio E' la topología débil y débil $*$ coinciden. Por lo tanto, por el teorema de Banach-Alaoglu, se tiene que $(B_{E'}, \sigma(E',E''))$ es un e.t. compacto.

Lema 1.16. Sean $(E,\|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y E' su espacio dual. Consideremos

$$J:(E,\sigma(E,E')) \longrightarrow (J(E)\subseteq E'', \sigma(E'',E')) \qquad [1]$$

Entonces J es un isomorfismo.

Observación:
Note que, como J es una isometría de $(E,\|\cdot\|_E)$ y $(E'',\|\cdot\|_{E''})$ tenemos que $J(E)$ es cerrado en $(E'',\|\cdot\|_{E''})$. Por lo tanto, $J(E)$ es un espacio de Banach con $\sigma(E'',\|\cdot\|_{E''})$, así [2] es un isomorfismo entre espacios de Banach. Más aún, por la [Proposición 1.6], se tiene que

$$J:(E,\|\cdot\|_E) \longrightarrow (J(E),\|\cdot\|_{E''}), \qquad [2]$$

y

$$J(E,\|\cdot\|_E) \longrightarrow (J(E), \sigma(E'',E'''))$$

y

$$J(E,\sigma(E,E')) \longrightarrow (J(E),\sigma(E'',E'''))$$

son isomorfismos.

Demostración (Lema 1.16)
Notemos que $\sigma(E'',E')\subseteq\sigma(E'',E''')$, i.e., todo abierto de $\sigma(E'',E')$ está en $\sigma(E'',E''')$ y así por la observación anterior, J es un continua.

P.D. $J^{-1}:(J(E),\sigma(E'',E'))\to(E,\sigma(E,E'))$ es continua.

Notemos que

$$\begin{array}{ccc} (J(E),\sigma(E'',E')) & \xrightarrow{J^{-1}} & (E,\sigma(E,E')) \\ & & \downarrow f \qquad \text{con } f\in E' \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

Así, para mostrar la continuidad de J^{-1}, basta probar la continuidad de la composición

$$f\circ J^{-1} \qquad \forall f\in E'$$

Para ello, recordemos que $\sigma(E'',E')$ es la topología más pequeña que deja continua a la familia $(\theta_f)_{f\in E'}$, donde

$$\begin{aligned} \theta_f: E'' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \xi &\longmapsto \langle\theta_f,\xi\rangle_{E'''\times E''} = \langle\xi,f\rangle_{E''\times E'} \end{aligned}$$

además, si tomamos $w\in J(E)$, entonces $w=Jx$, así

$$(f\circ J^{-1})(w) = (f\circ J^{-1})(Jx) = \langle f,x\rangle_{E'\times E} = \langle Jx,f\rangle_{E''\times E'} = \langle\theta_f, Jx\rangle,$$

entonces

$$f\circ J^{-1} = \theta_f \qquad \text{sobre } J(E)$$

De esta manera, como por construcción $\theta_f:(J(E),\sigma(E'',E'))\longrightarrow\mathbb{K}$ es continua, entonces $f\circ\theta^{-1}$ es continua.

Observación: Con el resultado anterior se tiene que los siguientes operadores son continuos

a) $J(E,\sigma(E,\|\cdot\|_E)) \longrightarrow (J(E),\sigma(E'',\|\cdot\|_{E''}))$

b) $J:(E,\sigma(E,E')) \longrightarrow (J(E),\sigma(E'',E'''))$

c) $J:(E,\sigma(E,\|\cdot\|_E)) \to (J(E),\sigma(E'',E'''))$

d) $J:(E,\sigma(E,E')) \to (J(E),\sigma(E'',E'))$

La equivalencia con $J:(E,\sigma(E,E')) \to (J(E),\sigma(E',\|\cdot\|_{E'}))$ es falsa en dimensión infinita

Además, con $J:(E,\sigma(E,\|\cdot\|_E)) \to (J(E),\sigma(E'',E'))$ también es falsa pues

[*] $J(\overline{B_E}) \subseteq \overline{B_{E''}}$

~~y además $J(\overline{B_E})$ es cerrada para $\sigma(E'',E')$ pues $J(\overline{B_E})$ es cerrada en $(E'',\|\cdot\|_{E''})$ y al ser convexa, también es cerrada para la topología débil y por el Lema [1.16] es cerrada para la topolo~~

$J(\overline{B_E})$ es cerrado en sí mismo pero no necesariamente E''!

Consideremos el siguiente esquema de razonamiento

$\Rightarrow \overline{J(\overline{B_E})}^{\sigma(E'',E')} \subseteq \overline{B_{E''}}$

$\Rightarrow \overline{J(\overline{B_E})}^{\sigma(E'',E')}$ es compacto en $\sigma(E'',E')$

$\Rightarrow \overline{J(\overline{B_E})}^{\sigma(E'',E')} \cap J(E)$ es compacto en $(J(E),\sigma(E'',E'))$

$\Rightarrow \overline{B_E} \subseteq \underbrace{J^{-1}\left(\overline{J(\overline{B_E})}^{\sigma(E'',E')} \cap J(E)\right)}$

$\subseteq$ compacto en $\sigma(E,\|\cdot\|_E)$

$\Rightarrow \overline{B_E}$ es compacta en espacios de dimensión infinita $\Rightarrow\Leftarrow$

Demostración (Continuación teorema 1.15)

$\Rightarrow$) Supongamos que E es reflexivo

P.D. $(\overline{B_E},\sigma(E,E'))$ es compacto

Como E es reflexivo, entonces $J(E)=E''$. Así, utilizando [Lema 1.16] tenemos que

$$J(E,\sigma(E,E')) \to (E'',\sigma(E'',E'))$$

es un isomorfismo. Como $\overline{B_{E''}}$ es compacta en $\sigma(E'',E')$ entonces $\overline{B_E} = J^{-1}(\overline{B_{E''}})$ es compacto en $\sigma(E,E')$

$\Leftarrow$) Supongamos que $(\overline{B_E},\sigma(E,E'))$ es un espacio topológico compacto.

P.D. E es reflexivo, es decir que, $J(E)=E''$. Noté que si demostramos que $J(\overline{B_E}) = \overline{B_{E''}}$ entonces $J(E)=E''$.

En efecto, si tomamos $\xi \neq 0$ en E'', entonces definiendo $\hat{\xi} = \xi/\|\xi\| \in \overline{B_{E''}}$. Como $J(\overline{B_E}) = \overline{B_{E''}}$ tenemos que existe $\hat{x}_\xi \in \overline{B_E}$ tal que

Demostración 1.

$$J_{x_\xi} = \hat{\xi} \qquad J_{\frac{1}{\|\xi\|}x_\xi} = \xi$$

Teorema 1.17 - Teorema de Goldstine -

Sea E un espacio de Banach, entonces $J(\overline{B_E})$ es denso en $\overline{B_{E''}}$ respecto a la topología débil estrella $\sigma(E'',E')$ y consecuentemente $J(E)$ es denso en E'' con la topología $\sigma(E'',E')$

Lema 1.18 - Lema de Helly -

Ver [1] Lema 3.3 Brezis,

Sea E un espacio de Banach. Sean $f_1,\dots,f_n \in E'$ y $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ fijos, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $\forall \varepsilon>0$, $\exists x_\varepsilon \in E$ con $\|x_\varepsilon\|\leq 1$ tal que

$$|\langle f_i, x_\varepsilon\rangle - \alpha_i| < \varepsilon \qquad \forall i=1,\dots,n$$

b) Para todo $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|$$

Martes, 10 de enero de 2023.

Demostración (Lema 1.18)

$\Rightarrow$) P.D. Para todo $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|_{E'}$$

Sean $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ cualesquiera. Por a), notemos que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon\rangle\right| < \varepsilon \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right|$$

De esta manera, se tiene que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \varepsilon \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon\rangle\right|$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \varepsilon \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right| + \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|_{E'}$$

Tomando $\varepsilon \to 0$, se concluye que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|_{E'}$$

$\Leftarrow$) P.D. $\forall \varepsilon > 0$; $\exists x_\varepsilon \in E$ tal que $\|x_\varepsilon\| \leq 1$ tal que

$$|\langle f_i, x_\varepsilon\rangle_{E' \times E} - \alpha_i| < \varepsilon$$

Definamos el funcional

$$\begin{aligned} \hat{f} : E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto (\langle f_1, x\rangle, \ldots, \langle f_n, x\rangle), \end{aligned}$$

notemos que si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \overline{f(\bar{B}_E)}$, entonces

$$B_\infty(\alpha, \varepsilon) \cap f(B_E) \neq \emptyset$$

Ahora, supongamos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \notin \overline{f(\bar{B}_E)}$. Por lo tanto, como $\{\alpha\}$ es compacto y $\overline{f(\bar{B}_E)}$ es cerrado, entonces existen H_φ un hiperplano cerrado que separa estrictamente a $\{\alpha\}$ y $\overline{f(\bar{B}_E)}$, y $\gamma \in \mathbb{K}$ tales que

$$\mathrm{Re}(\varphi(\overline{f(\bar{B}_E)})) < \gamma < \mathrm{Re}(\varphi(\alpha))$$

Existe $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tal que

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle f_i, x\rangle\right) < \gamma < \mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle f_i, x\rangle\right) < \gamma < \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right|$$

Sea θ el argumento tal que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x) = e^{i\theta}\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x)\right|$, por lo tanto

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right|\right) < \gamma < \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right|$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x)\right| < \gamma < \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \qquad \forall x \in \bar{B}_E$$

Con lo que se concluye que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|_{E'} < \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right|$$

lo que contradice nuestra hipótesis.

Demostración (Teorema de Goldstein)

P.D. $\overline{J(\overline{B}_E)}^{\sigma(E'',E')} = \overline{B}_{E''}$

Notemos que $J(\overline{B}_E) \subseteq \overline{B}_{E''}$, por lo tanto

$$\overline{J(\overline{B}_E)} \subseteq \overline{B}_{E''}$$

Resta probar que $\overline{B}_{E''} \subseteq \overline{J(\overline{B}_E)}$

Sea $\xi \in \overline{B}_{E''}$, cualquiera. P.D $\forall\, \mathcal{V}_\xi \in \mathcal{V}(\xi)$ en $\sigma(E'',E')$, se tiene que

$$\mathcal{V}_\xi \cap J(\overline{B}_E) \neq \emptyset$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$\mathcal{V}_\xi = \{\theta \in E'' : |\langle \theta - \xi, f_i \rangle| < \varepsilon \quad \forall i = 1,\dots,n\}.$$

luego, tomando $\alpha_i = \langle \xi, f_i \rangle$, con $i = 1,\dots,n$; [Aquí la idea es usar el lema de Helly].

P.D $\forall (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \left|\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\right\|$

Notemos que

$$\left|\sum_{i=1}^n \beta_i \langle \xi, f_i \rangle\right| = \left|\xi\left(\sum_{i=1}^n \beta_i, f_i\right)\right| \leq \|\xi\|_{E''} \left\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\right\|_{E'}$$

Así, utilizando el lema de Helly, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in \overline{B}_E$ tal que

$$|\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \alpha_i| < \varepsilon \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

$$\Rightarrow |\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \langle \xi, f_i \rangle| < \varepsilon \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

$$\Rightarrow |\langle J x_\varepsilon, f_i \rangle - \langle \xi, f_i \rangle| < \varepsilon \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

De esta manera, se tiene que

$$J x_\varepsilon \in \mathcal{V}_\xi \quad \text{y} \quad J x_\varepsilon \in J(\overline{B}_E)$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}_\xi \cap J(\overline{B}_E) \neq \emptyset.$$

Demostración [Teorema Kakutani 1.15]

Supongamos que $(\overline{B}_E, \sigma(E,E'))$ es compacta. P.D. E es reflexivo, i.e. $J(E) = E''$.
~~Basta mostrar que $J(\overline{B}_E) \supseteq \overline{B}_{E''}$, pues siempre se tiene que $J(\overline{B}_E) \subseteq \overline{B}_{E''}$.~~ Ahora, por el teorema de Goldstine, se tiene que

$$\overline{J(\overline{B}_E)}^{\sigma(E'',E')} = \overline{B}_{E''}$$

Utilizando la [Prop 1.16] sabemos que

$$J : (E, \sigma(E,E')) \longrightarrow (E'', \sigma(E'',E'))$$

es continuo. Por otro lado, por hipótesis tenemos que $\overline{B}_E$ es compacta en $\sigma(E,E')$, luego por continuidad se sigue que

$$J(\overline{B}_E) \text{ es compacta en } \sigma(E'',E').$$

Así, como $J(\overline{B}_E)$ es compacta, entonces $J(B_E)$ es cerrada en $\sigma(E'',E')$, es decir que

$$J(\overline{B}_E) = \overline{J(\overline{B}_E)}^{\sigma(E'',E')} = \overline{B}_{E''}$$

Corolario 1.19. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach reflexivo y $H \subseteq E$ s.e.v cerrado entonces H es reflexivo.

Demostración

Notemos que H es cerrado en un espacio completo, por lo tanto H es un espacio de Banach y por tanto admite $\sigma(H,H')$ asociada a su dual. Por otro lado $H \subseteq E$ y por tanto puedo definir la topología inducida a partir de la topología débil en $\sigma(E,E')$.

. Notemos que se tienen las siguientes topologías

- $(H, \sigma(H, H'))$
- $(H, \sigma(E, E'))$

Así, por el teorema de Hanh-Banach forma analítica, se tiene que

$$(H, \sigma(H, H')) \approx (H, \sigma(E, E'))$$

Con esto, como

$$\overline{B}_H = \overline{B}_E \cap H \subset \overline{B}_E \quad \leftarrow \text{ compacto por el teorema de Kakutani}$$

y dado que $\overline{B}_E \cap E$ es cerrado, entonces $\overline{B}_H$ es compacto en $\sigma(E, E')$. Nuevamente, por el teorema de Kakutani, se tiene que H es reflexivo.

Observación a) Sea E un espacio de Banach, entonces E es reflexivo si y solo si E' es reflexivo.
Ver Cor 3.21 Brezis

Sección: Metrizabilidad de las topologías débiles sobre las bolas unitarias.

Como hemos visto $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ es un espacio topológico compacto. y además E es reflexivo si y solo si $(\overline{B}_E, \sigma(E, E'))$ es un espacio topológico compacto.

El objetivo de esta sección es saber en que casos estos espacios topológicos compactos son metrizables para tener criterios de convergencia de sucesiones vía una subsucesión. Empezamos por algunos resultados en espacios topológicos

Definición 1.20 - Metrizabilidad -
Sea (X, τ_X) un espacio topológico, decimos que τ_X es metrizable si existe una métrica definida en X tal que $\tau_d \approx \tau_X$

Observación
- Si τ_X es metrizable, entonces todos los cerrados pueden caracterizarse por sucesiones
- τ_X es II-Numerable

Proposición 1.21 Sea X un conjunto no vacío sobre el cual definimos τ_1 y τ_2, tales que

Ver Prop. 7.16 Topología Apuntes

a) $\tau_1 \subset \tau_2$ (τ_1 es más débil de τ_2)
b) (X, τ_1) es de Hausdorff
c) (X, τ_2) es compacto

Entonces, $\tau_1 \approx \tau_2$

Teorema 1.22 Sea (X, τ_X) un espacio topológico compacto tal que existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $f_n : (X, \tau_X) \to \mathbb{K}$ continua y que separe puntos en X. Entonces τ_X es metrizable.

Recordemos que una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n : X \to \mathbb{K}$ separa puntos en X si

$$\forall x \neq y \in E \quad \exists i \in \mathbb{N} \text{ tal que } f_i(x) \neq f_i(y).$$

Viernes, 13 de enero de 2023.

Demostración
Definamos

$$\hat{f}_n = \frac{1}{\|f_n\|_\infty} \cdot f_n$$

donde $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in X} |f_n(x)|$, el cual existe pues f es continua y X es compacto. Así, definamos

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} |\hat{f}_n(x) - \hat{f}_n(y)|.$$

la cual está bien definida por construcción

P.D. $\forall x\in X,\ \forall r>0 \quad B_d(x,r)\subseteq \tau_x$.

Sea $y\in B_d(x,r)$, entonces $d(y,x)<r$. Queremos encontrar $\mathcal{V}_y\in\tau_x$ tal que
$$y\in \mathcal{V}_y\subseteq B_d(x,r).$$

Tomemos $z\in \mathcal{V}_y$, cualquiera; notemos que
$$\begin{aligned}d(x,z) &\le d(x,y)+d(y,z)\\ &\le \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}|\hat{f}_i(y)-\hat{f}_i(z)|+d(x,z)\\ &\le \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2^i}|\hat{f}_i(y)-\hat{f}_i(z)|+\sum_{i=N+1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}|\hat{f}_i(y)-\hat{f}_i(z)|+d(x,y)\end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^{+\infty}1/2^i$ es convergente, se tiene que
$$\varepsilon=\frac{1}{2}(r-d(x,y)),\ \text{luego existe } N_\varepsilon\in\mathbb{N} \text{ tal que } \sum_{n=1+N_\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{2}(r-d(x,y))$$

Por lo tanto, si consideramos
$$\mathcal{V}_y=\bigcap_{n=1}^{N_\varepsilon}\hat{f}_n^{-1}\left(B(\hat{f}_n(y),\hat{\varepsilon})\right)\in\tau_x$$
donde $\hat{\varepsilon}=\frac{1}{N_\varepsilon 2}s$. Así, se sigue que
$$\begin{aligned}d(x,z)&\le d(x,y)+d(y,z)\\ &=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2^i}|\hat{f}_i(y)-\hat{f}_i(z)|+\sum_{i=N+1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}|\hat{f}_i(y)-\hat{f}_i(z)|+d(x,y)\\ &<\frac{1}{2N_\varepsilon}N_\varepsilon(r-d(x,y))+\frac{1}{2}|r-d(x,y)|+d(x,y)+r \quad <r\end{aligned}$$

Así, $\tau_d\subseteq\tau_x$. Por lo tanto, $\tau_x\approx\tau_d$ lo que implica τ_x es metrizable

Definición 1.23. Se $(E,\|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach. Decimos que E es separable si existe $D\subseteq E$ con D un conjunto numerable y denso en $(E,\|\cdot\|_E)$, es decir
$$\overline{D}^{\|\cdot\|}=E$$

Ejemplo: Los espacios

- $\ell^p,\ \mathcal{L}^p(\Omega)$ con $1\le p<+\infty$

son separables

Definamos
$$F_N(\mathbb{Q})=\{\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(e_n)\}=\{\sum_{j\in J}e_j\lambda_j \quad J\subseteq\mathbb{N} \text{ finito y } \lambda_j\in\mathbb{Q}\ \forall j\in J\}.$$

Lema 1.24 Sea E un espacio $\mathbb{K}$-vectorial normado y consideramos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E$. Notamos $F=\operatorname{span}(x_n)$. Si F es denso en E entonces E es separable.

Definamos $F_N=\operatorname{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, notemos que
$$\overline{F_N}^{\ell^p}=\ell^p \qquad \forall p\in[1,+\infty[$$
$$\overline{F_N}^{\ell^\infty}=c_0 \qquad c_0 \text{ es separable}$$

$$\text{P.D.}\quad B_{\ell^p}(x,r)\cap F_N\neq\emptyset$$

Sea $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq F_N$ si y solo si $\exists N_x\in\mathbb{N}$ tal que
$$\forall n\ge N_x \quad x_n=0$$

$$\|x-y\|^p = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p = \sum_{n=1}^{N_y} |x_n - y_n|^p + \sum_{n=N_y+1}^{+\infty} |x_n|^p$$

Observación: Si $(E, \|\cdot\|_E)$ admite una base de Schauder, entonces es separable.

La recíproca es falsa. Enflo mostró que existen espacios separables que no admiten una base de Schauder.

Mostremos que ℓ^∞ no es separable. ($\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty$) no es separable.

Lema 1.25. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach tal que admitan una familia de abiertos $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ con las siguientes propiedades

a) $\forall i \in I \quad \mathcal{O}_i \neq \emptyset$
b) $\forall i,j \in I \quad \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$
c) I no es numerable.

Entonces E no es separable

Demostración

Supongamos que E es separable, entonces consideremos $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable y densa, es decir que

$$\overline{\text{span}\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}}} = E$$

$(\forall i \in I)(\exists N(i) \in I$ tal que $u_{n(i)} \in \mathcal{O}_i)$, ya que $\mathcal{O}_i \neq \emptyset$

Definamos
$$\begin{aligned} \emptyset : I &\longrightarrow \mathbb{N} \\ i &\longmapsto \emptyset(i) = n_i \end{aligned}$$

mostremos que $\emptyset$ es inyectiva, así

$$n(i) = n(j) \Rightarrow u_{n(i)} = u_{n(j)} \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \Leftrightarrow i = j \quad \text{pues } \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset \text{ para } i \neq j$$

Por lo tanto, existe una inyección entre I y $\mathbb{N}$ lo cual contradice que I no es numerable.

Ahora, mostremos que ℓ^∞ no es separable.

Consideremos $A \subseteq \mathbb{N}$, definamos

$$c(A) = ((c(A))_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

donde

$$(c(A))_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

$d_\infty(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$

Así, consideremos

$$\mathcal{O}_A = B(c(A), 1/2)$$

P.D. $\{\mathcal{O}_A\}_{A\subseteq\mathbb{N}}$ verifica el lema 1.25

› $I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ no numerable

› $\mathcal{O}_A \neq \emptyset \quad \forall A \subseteq \mathbb{N}$ al menos su centro está en el conjunto

› P.D. $\forall A \neq S \subseteq \mathbb{N} \quad \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B = \emptyset$

Sean $A \neq S$, entonces $c(A) \neq c(S)$,

$$B(e_I, 1/2) = \{ z : \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n - (e_I)_n| < 1/2 \}.$$

Supongamos que $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B \neq \emptyset$, i.e. existe $z \in \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_S$, i.e.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n - (c(A))_n| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n - (c(S))| < \frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$d(e(A), e(s)) \leq d(e(A), z) + d(e(s), z) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Pero, $d(e(A), e(s)) = 1$, lo cual nos lleva a una contradicción.

Observación: Si E es separable, entonces no necesariamente E' es separable. (Considere $E = \ell^1$.).

Proposición 1.26. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y E' su espacio dual. Supongamos que E' es separable, entonces E es separable.

Lunes, 16 de enero de 2023

Demostración (Proposición 1.26)
Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión densa en E'. Es decir $F = \text{span}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que

$$\overline{F} = E'$$

Consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que

$$\|\varphi_n\| \leq 2|\varphi_n(x_n)| \quad \text{con} \quad \|x\| \leq 1.$$

Tomemos $L = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\lambda \in E'$ cualquiera, tal que

$$\lambda|_L = 0$$

P.D $\lambda = 0$. Como L es denso en E', entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\lambda - \varphi_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego

$$|\varphi_n(x_n)| = |\varphi_n(x_n) - \lambda(x_n)| \leq \|\varphi_n - \lambda\| \, \|x_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

De esta manera, se sigue que

$$\|\lambda\| = \|\lambda - \varphi_n + \varphi_n\| \leq \|\lambda - \varphi_n\| + \|\varphi_n\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

La recíproca, en general, no es cierta. Note que si el espacio es reflexivo, entonces el resultado es directo.

Teorema 1.27. Sea E un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) E es separable (Con la topología fuerte)
b) $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ es metrizable

Demostración
a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que E es separable. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión densa en E. Consideremos

$$\begin{aligned} J_{x_n} : E' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi &\longmapsto J_{x_n}(\varphi) = \varphi(x_n) \end{aligned}$$

y $\hat{J}_{x_n} = J_{x_n}|_{\overline{B}_{E'}}$. Así, $(\hat{J}_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de funciones continuas de $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$. Además, por el teorema de Banach-Alaoglu, $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ es un espacio topológico compacto. Utilizando la [Proposición 1.22] se concluye lo requerido.

b) $\Rightarrow$ a)
Sea $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ un espacio topológico metrizable. Mostremos que E es separable. Como $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ es metrizable, entonces existe una métrica d en $\overline{B}_{E'}$ tal que $\mathcal{T}_d \approx \sigma(E', E)$ en $\overline{B}_{E'}$. Así, notemos que la familia $(B_d(0, 1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de abiertos de $\mathcal{T}_d$ pues es una base de vecindades numerable del 0. Por lo tanto, existe $\mathcal{U}_n \in \sigma(E', E)$ tal que

$$\mathcal{U}_n \subseteq B_d(0, 1/n).$$

Donde,

$$\mathcal{U}_n = \{ \varphi \in \overline{B}_{E'} : |\langle \varphi, x_n \rangle| < \varepsilon_n \quad \text{con} \quad x_n \in \Phi_n \subseteq E \text{ finito} \}$$

de esta manera, consideremos

$$D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$$

por lo tanto, D es numerable. Por otra parte, notemos que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_d(0, 1/n) = \{0_{E'}\}$$

$$\therefore \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n = \{0_{E'}\}$$

Así, si consideramos $\varphi \in E'$ tal que $\varphi|_D = 0$, entonces $\varphi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ y por lo tanto

$$\varphi = 0.$$

por lo tanto, D es denso.

Observación: Si E es separable, entonces $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ es compacta y secuencialmente compacta ya que $(\overline{B}_{E'}, \sigma(E', E))$ es metrizable. Por lo tanto, toda sucesión acotada admite una subsucesión convergente.

Proposición 1.28 Sea E un espacio reflexivo. Entonces toda sucesión acotada admite una subsucesión que converge en $\sigma(E, E')$

Demostración:
Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en E. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, consideramos

$$H = \overline{\text{span}\{x_n : n \geq 1\}}$$

Note que H es un espacio de Banach separable y reflexivo. Luego $\overline{B}_H = H \cap \overline{B}_E$ es metrizable para la topología débil en $(H, \sigma(E, E'))$. Por lo tanto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente.

Teorema 1.29. Sea E un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

Ver Teo. 3.29 [Brezis]

a) E' es separable

b) $(\overline{B}_E, \sigma(E, E'))$ es metrizable

Demostración: (Ejercicio)

Observación: Note que si E' es separable, entonces $\overline{B}_E$ es metrizable para $\sigma(E, E')$ pero eso no implica que sea compacta.

Corolario 1.30 Sea E un espacio de Banach. Entonces E es reflexivo y separable si y solo si $(\overline{B}_E, \sigma(E, E'))$ es compacta y metrizable.

Observación: Si consideramos E un espacio de Banach tal que

a) $(\overline{B}_E, \sigma(E, E'))$ es un espacio topológico compacto.

b) $(\overline{B}_E, \sigma(E, E'))$ es un espacio topológico secuencialmente compacto

entonces, ¿$(\overline{B}_E, \sigma(E, E'))$ es metrizable? No, en efecto, considere un espacio de Hilbert no separable.

Observación: Sea H un espacio de Hilbert separable, si y solo si H es isomorfo a $\ell^2(\mathbb{K})$

Supongamos que H es separable, entonces H admite una base de Hilbert tal que

$$\forall x \in H, \quad \exists! (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} \quad \text{tal que} \quad x = \sum_{k=1}^{+\infty} x_n v_n,$$

luego

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Así, podemos definir

$$\begin{aligned} \varnothing : H &\longrightarrow \ell^2 \\ x &\longmapsto \varnothing(x) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\langle v_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

de esta manera, $\varnothing$ es isométrica y sobreyectiva.

Viernes, 20 de enero de 2023.

Consideremos

$$\ell^2(\ell^\infty) = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \ell^\infty, \ \forall i \in \mathbb{N} \sum_{k=1}^{+\infty} |x_i^k|^2 < +\infty \right\}$$

Donde, para $x, y \in \ell^2(\ell^\infty)$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x_i, y_i\rangle_* \quad \text{y} \quad \langle x_i, y_i\rangle_* = \sum_{k=1}^{+\infty} x_i^k \overline{y_i^k}$$

Así, $\ell^2(\ell^\infty)$ es un espacio de Hilbert no separable.

Capítulo 2: Relaciones de ortogonalidad y suplementario topológico

Suplementario topológico

Consideramos E un espacio normado no necesariamente de Banach y H un s.e.v. cerrado de E.

¿Se puede afirmar que existe N un s.e.v. cerrado tal que

$$E = H \oplus N \ ?$$

En efecto, si consideramos $E/H \approx N$ se puede conseguir el resultado. Definiendo

$$\begin{aligned} P_H : E &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto P_H(x) = x_H + x_N = x_N \end{aligned}$$

el cual siempre es lineal pero no necesariamente continuo.

Nuestro objetivo es dar condiciones suficientes en los espacios de Banach de manera que el operador P_H sea continuo.

Definición 2.1. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio vectorial normado y $H \subseteq E$ s.e.v. cerrado. Decimos que H admite un suplementario topológico si existe $N \subseteq E$ s.e.v. cerrado de E tal que

$$E = H \oplus N$$

Nuestro objetivo es mostrar que si H admite un suplementario topológico si y solo si P_H es continuo en $(E, \|\cdot\|_E)$ espacio de Banach

Lema 2.2. Sean $H \subseteq E$ y $N \subseteq E$ s.e.v. cerrados en $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach tal que $H + N$ es cerrado. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in H + N$, existen $(x_n, x_m) \in N \times M$ tales que

$x = x_M + x_N$ y $\|x_N\| + \|x_M\| \leq \gamma \|x\|$.

Observación Notemos que si M y N son s.e.v. cerrados entonces no necesariamente $M+N$ es cerrado.

Demostración
Definamos el operador

$$T : (M \times N ; \|\cdot\|_{M\times N}) \longrightarrow (M+N, \|\cdot\|_E)$$

donde $\|(x,y)\|_{M\times N} = \|x\| + \|y\|$. Ahora, notemos que $(M+N, \|\cdot\|_E)$ y $(M\times N, \|\cdot\|_{M\times N})$ son espacios de Banach. Utilizando el teorema de la aplicación abierta, tenemos que

$$T(B_{M\times N}) \text{ es abierto en } (M+N, \|\cdot\|_E)$$

Por lo tanto, existe $c>0$ tal que $B(0,c) \subseteq T(B_{M\times N})$. Así, tomando $\tilde{z}$ definido como

$$\tilde{z} = \frac{c}{2\|z\|}(x_M + x_N) \qquad z = x_M + x_N,$$

entonces $\tilde{z} \in B(0,c)$. Así, existen $\tilde{x}_N$ y $\tilde{x}_M$ tales que

$$\tilde{z} = \tilde{x}_M + \tilde{x}_N$$

donde $\|\tilde{x}_M\| + \|\tilde{x}_N\| < 1$. Más aún, se tiene que

$$z = \frac{2}{c}(\tilde{x}_M + \tilde{x}_N)\|z\|$$

$$= \underbrace{\frac{2}{c}\tilde{x}_M\|z\|}_{\substack{\tilde{x}_M \\ \in M}} + \underbrace{\frac{2}{c}\tilde{x}_N\|z\|}_{\substack{\tilde{x}_N \\ \in N}}$$

luego, se sigue que

$$\|\tilde{x}_M\| + \|\tilde{x}_N\| < \frac{2}{c}\|z\|$$

tomando $\gamma = 2/c$, se tiene el resultado.

Proposición 2.3. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y $M \subseteq E$ un s.e.v de E cerrado. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) M admite un suplementario topológico.
b) Existe P una proyección continua ($P^2 = P$) con $P \in \mathcal{L}(E,E)$ tal que $\mathrm{Img}(P) = M$

Demostración
a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que M admite un suplementario topológico. P.D. Existe $P \in \mathcal{L}(E)$ una proyección tal que $\mathrm{Img}(P) = M$

Por hipótesis existe N un s.e.v. cerrado tal que $E = M \oplus N$. Así podemos definir

$$P_M : E \longrightarrow M$$
$$x \longmapsto P(x) = P(x_M + x_N) = x_M$$

con $\mathrm{Img}(P) = M$ y donde P_M es lineal. P.D. P_M es continua.
Así, como $E = M \oplus N$, gracias al [Lema 2.2] existe $c>0$ tal que

$$\forall x \in E \qquad x = x_M + x_N \qquad \|x_M\| + \|x_N\| \leq c\|x\|$$

Por lo tanto, $\|P_M(x)\|_E = \|x_M\|_E \leq c\|x\|$

b) $\Rightarrow$ a) Supongamos que existe $P \in \mathcal{L}(E)$ proyección tal que $\mathrm{Img}(P) = M$ $(P^2 = P)$

P.D. M admite un suplementario topológico. $N = \ker(P)$ $\overset{\text{P.D.}}{\ }$ $E = M \oplus N$.

Notemos que $H \cap N = \{0\}$. Sea $x \in H$, entonces $P(x) = x$ y si $x \in N$ entonces $P(x) = 0$, por lo tanto, $x = 0$.

Sea $x \in H$, cualquiera. Mostremos que existe x_H y x_N tales que $x = x_H + x_N$. Notemos que

$$x = \underbrace{x - P_H(x)}_{x_N} + P_H(x)$$

P.D. $x_N \in N$.

$$P_H(x_N) = P_H(x - P_H(x)) = P_H(x) - P_H(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_N \in N.$$

Observación. a) En espacios normados siempre se tiene que b) $\Rightarrow$ a)

b) El suplementario topológico de un s.e.v. si existe es único salvo por isomorfismos

c) Si P es una proyección, entonces

$$\ker(P) = Img(Id - P) \qquad Img(P) = \ker(Id - P)$$

d) Si E es un espacio normado y T una aplicación lineal de E en E tal que

$$\ker(T) \text{ cerrado } \not\Rightarrow T \text{ continuo}$$

Consideremos $D : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$

luego $\quad Df = f' \qquad f_n = x^n \to Df_n = f_n' = (n x^{n-1})$

$$\Rightarrow \|f_n'\|_\infty = n$$

Notemos que $f : E \to \mathbb{K}$ lineal es continuo si y solo si $\ker(f)$ es cerrado.

Ejemplos. a) Si E es de dimensión finita, todo espacio vectorial cerrado admite un suplementario topológico.

b) Si H es un espacio de Hilbert, se tiene el mismo resultado de a) pues

$$H = M \oplus M^\perp$$

c) Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio de dimensión infinita y H s.e.v. cerrado de dimensión finita entonces H admite un suplementario topológico.

Demostración (c)

Como H es de dimensión finita, entonces existe $(e_k)_{k=1}^n$ una base de H, i.e.,

$$\text{span}\{e_k\}_{k=1}^n = H.$$

Así, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ definimos

$$\begin{aligned} e_k^* : H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto e_k^*(x) = x_k \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

donde $x = \sum_{k=1}^n e_k x_k$. Así, $(e_k^*)_{k=1}^n$ es una base para H'. Luego utilizando Hahn-Banach forma analítica topológica, tenemos que existe $(\tilde{e}_k)_{k=1}^n \in E'$ tal que

$$\|\tilde{e}_k\| = \|e_k^*\| \qquad \tilde{e}_k|_H = e_k^*$$

Luego, definiendo $N = \{x \in E : \forall k \in \{1, \dots, n\} \ \tilde{e}_k(x) = 0\}$

$$N = \bigcap_{k=0}^n \ker(\tilde{e}_k) \quad \text{es un s.e.v. cerrado}$$

P.D. $E = H \oplus N$.

Si $x \in H$ y $x \in N$, entonces

$$x = \sum_{k=1}^n e_k^*(x) e_k \qquad \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \tilde{e}_k(x) = 0 = e_k^*(x) \qquad x = 0.$$

Sea $x \in E$.

$$x = x + \sum_{k=1}^{n} \tilde{e}_k(x) e_k - \sum_{k=1}^{n} \tilde{e}_k(x) e_k$$

$$\underbrace{}_{x_N} \qquad \underbrace{}_{x_M}$$

P.D. $x - \sum_{k=1}^{n} \tilde{e}_k(x) e_k \in N$

$$\tilde{e}_j\left(x - \sum_{k=1}^{n} \tilde{e}_k(x) e_k\right) = \tilde{e}_j(x) - \tilde{e}_j(x) = 0 \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Otra forma para mostrar lo anterior es tomar

$$P: E \longrightarrow H$$
$$x \longmapsto P(x) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{e}_k(x) e_i$$

- P es continua ya que H es de dimensión finita. e $Img(P) = H$

Lunes, 23 de enero de 2023.

Organización del segundo bimestre

Periodo
- 16 de enero de 2023
- Última semana: 27 de febrero - al 3 de febrero

Parcial 1. (3.5)
6 de febrero

Parcial 2 (3.5)
3 de marzo.

Microevaluaciones (1.5/1.5)

1ra. - 31 de enero
2da - 28 de febrero

Supletorio

13 de marzo.

Deberes

1er - 10 de febrero
2do - 3 de marzo.

Recuperaciones
1er. Jueves 26 de enero de 2023 (11h - 13h)
2da Jueves

Continuando con la materia...

Ejemplo: Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio de Banach y $H \subseteq E$ s.e.v. cerrado de codimensión finita.

Recordemos que si $H \subseteq E$ es un s.e.v. cerrado, se dice que su codimensión es finita si

$$\dim(E/H) < +\infty.$$

Observación Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es de dimensión infinita, y $H \subseteq E$ s.e.v. es de dimensión finita, entonces $\dim(E/H) < +\infty$.

Si la codimensión de H es infinita, entonces la dimensión de H es infinita.

Demostración (Ejemplo)

Supongamos que H es de codimensión finita. P.D. H admite un suplementario topológico.

Supongamos que E/H es un e.v. de Banach de dimensión finita.

Por lo tanto, existe $\{[e_i]\}_{i=1}^{n}$ tal que $\operatorname{span}\{[e_i]\}_{i=1}^{n} = E/H$. Así, definamos

$$\pi: E \longrightarrow E/H$$
$$x \longmapsto \pi(x) = [x]$$

De esta manera, π es lineal y continua, en efecto

$$\|[x]\|_{E/H} = \inf_{y \in H} \|x - y\|_E \leq \|0 - x\|_E = \|x\|_E.$$

Y sobreyectiva, es decir, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ existe e_i tal que

$$\pi(e_i) = [e_i].$$

Consideremos, $N = \text{span}\{e_i\}_{i=1}^n$. P.D. N es el suplementario topológico de M. P.D. $M \cap N = \{0\}$

Si $z \in M$, entonces $\pi(z) = [0]$. Además, existen $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ tales que

$$z = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Por lo tanto

$$[0] = \pi(z) = \pi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i [e_i].$$

Como $\{[e_i]\}_{i=1}^n$ es una base de E/M, entonces $\lambda_i = 0$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$

Por lo tanto, $z = 0$.

P.D. $\forall x \in E \quad \exists x_n \in N$ y $x_m \in M$ tales que

$$x = x_n + x_m.$$

Notemos que

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^n x_i [e_i] \Rightarrow \text{tomemos } x_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

De esta manera, se sigue que

$$x = \underbrace{x - x_n}_{\in M} + \underbrace{x_n}_{\in N} \qquad \text{P.D. } x - x_n \in M$$

Por lo tanto

$$\pi(x - x_n) = \pi(x) - \pi(x_n) = 0 \Rightarrow x - x_n \in M.$$

Se ha demostrado que si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita tal que E no sea isomorfo a ningún espacio de Hilbert. Entonces E admite s.e.v. cerrados tales que no tienen un suplementario topológico.

Definición 2.4. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach con $T \in \mathcal{L}(E,F)$, decimos que T admite un inverso por izquierda (respectivamente por derecha) si existe $S \in \mathcal{L}(F,E)$ tal que

$$ST = id_E \quad (\text{respectivamente } TS = id_F)$$

Observación.
- Los inversos laterales si existen son únicos.
- Si T es invertible, entonces, entonces admite ambos inversos laterales.
- Si el operador admite ambos inversos laterales entonces es invertible

Consideremos los operadores

$$S: \ell^p \longrightarrow \ell^p$$
$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto S(x) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

S es lineal, isometría, inyectiva

$\|S\| = 1$

S no es sobreyectivo pues $\text{span}(e_1) \in Img(S)$

$$S^*: \ell^p \longrightarrow \ell^p$$
$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto S^*(x) = (x_2, x_3, \dots)$$

S^* es lineal

$\|S^*\| = 1$

S^* es sobreyectiva ya que si tomamos $y \in \ell^p$

$x = (0, y_1, y_2, y_3, \dots) \qquad S^*(x) = (y_1, y_2, \dots) = y$. Por lo tanto $\|S^*\| = 1$ y más aún

$\text{span}(e_1) = \ker(S^*)$

De esta manera, $S^* S = Id$. Por lo tanto

- S admite una inversa por izquierda.
- S^* admite una inversa por derecha.

Recordemos que $\ell^p(\mathbb{Z}) = \{(\ldots, x_0, x_1, \ldots) \in \mathbb{K}^\infty : \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty\}$

Proposición 2.5. Sean E y F espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E,F)$ sobreyectiva. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) T admite una inversa por derecha.
b) $\ker(T)$ admite un suplementario topológico.

Demostración

a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que T admite inversa por la derecha, i.e., existe $S \in \mathcal{L}(F,E)$ tal que $TS = Id_F$. P.D. $\ker(T)$ admite un s.t. en E.

Consideremos $Img(S) =: N$. P.D. N es cerrado. P.D. N es el s.t. de $\ker(T)$

Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Img(S)$ tal que $y_n \longrightarrow y$. P.D. $y \in Img(S)$

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ tal que $S z_n = y_n$

$$z_n = TSz_n = Ty_n \quad \Rightarrow z = \lim_{n\to+\infty} z_n = Ty$$

$$\therefore z = Ty \quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} z_n = z \qquad \therefore y = Sz.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} Sz_n = Sz$$

$$= \lim_{n\to+\infty} y_n = Sz$$

P.D. $Img(S) \cap \ker(T) = \{0\}$ y $\forall x \in E$ $\exists x_{Img(S)}$ y $\exists x_{\ker(T)}$ tales que

$$x = x_{Img(S)} + x_{\ker(T)}$$

Trivialmente $Img(S) \cap \ker(T) = \{0\}$. En efecto, si $z \in Img(S)$, entonces existe $x \in F$ tal que $S(x) = z$, luego, si $z \in \ker(T)$, entonces $T(z) = 0$, por lo tanto

$$TS(x) = T(z) = 0 \quad \therefore x = 0$$

$$\therefore z = 0.$$

Sea $x \in E$, tal que

$$x = \underbrace{x - STx}_{\ker(T)} + \underbrace{STx}_{Img(T)}$$

b) $\Rightarrow$ a) Supongamos que $\ker(T)$ admite un s.t, i.e., existe N s.e.v. cerrado de E tal que

$$E = \ker(T) \oplus N$$

P.D. Existe $S \in \mathcal{L}(F,E)$ tal que $TS = Id_F$

Definamos $\pi = P_N : E = \ker(T) \oplus N \longrightarrow N$

$$x = x_{\ker(T)} + x_N \longrightarrow P_N(x_N)$$

Dado $y \in F$ existe $x \in E$ tal que $Tx = y$. $S_y = \pi(x_y)$. Dado x, existe x_n tal que

$$x = x_{\ker(T)} + x_N.$$

P.D. S está bien definido. Es decir, supongamos que

$$T(x_y) = T(\tilde{x}_y) = y$$

$$P_N(x_y) = P_N(\tilde{x}_y)$$

Como $T(x_y - \tilde{x}_y) = 0$, entonces $x_y - \tilde{x}_y \in \ker(T)$, i.e.

$$P_N(x_y - \tilde{x}_y) = 0$$

$$P_N(x_y) = P_N(\tilde{x}_y)$$

S es inyectivo.

$Sy = 0$

$Sy = P_N(x_y) = 0$

$T(x_y) = y$

$x_y \in \ker(T)$

$T(x_y) = 0 = y$

S es lineal

$$S(y + \lambda\tilde{y}) = P(x_N + \lambda \tilde{x_N})$$
$$= P(x_N) + \lambda P(\tilde{x_N})$$
$$= S(y) + \lambda S(\tilde{y})$$

Martes, 24 de enero de 2023

Continuación de la demostración...

P.D. S es continuo

P.D Existe $C > 0$ tal que $\|Sy\| \leq C\|y\|$.

Consideremos dos casos:

- Si $x_y \in \ker(T)$, entonces $P_N(x_y) = 0$ y por lo tanto

$$\|Sy\| = \|P_N(x_y)\| = 0 \leq \|y\|$$

- si $x_y \notin \ker(T)$, entonces

$$T : N \longrightarrow F \quad \text{es lineal, continuo, inyectivo}$$

En efecto, si $T(x) = 0$, entonces $x \in N$ y $x \in \ker(T)$ por lo tanto $x = 0$. Además, si $y \neq 0$ con $y \in F$, entonces existe $x \in E$ tal que

$$Tx = y.$$

Más aún, como $Tx \neq 0$, entonces $x \notin \ker(T)$ y como $x = x_N + x_{\ker(T)}$, entonces

$$y = Tx = Tx_N.$$

Así, T es sobreyectivo. Luego por el teorema de isomorfismos de Banach se tiene que T es un isomorfismo de N en T, i.e.,

$$\exists C, \tilde{C} > 0 \quad \forall x_N \in N \qquad C\|x_N\| \leq \|Tx_N\| \leq \tilde{C}\|x_N\|.$$

Así, si $x_y \notin \ker(T)$

$$\|Sy\|_E = \|Px_y\|_E \leq \frac{1}{C}\|Tx_N\| = \frac{1}{C}\|y\|_F$$

Resta probar que S es el inverso por derecha de E, i.e., P.D. $TS = id_F$. Para ello, notemos que

$$TS(y) = T(P_N(x_y)) = T(x_y) = y = id_F.$$

Proposición 2.6. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$ inyectivo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) T admite un inverso por izquierda

b) $Img(T)$ es cerrada y admite un suplementario topológico

Demostración. a)⇒b)

Supongamos que T admite inversa por izquierda, i.e., existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que $ST = id_E$

P.D.: $Img(T)$ es cerrada y $Ker(S)$ es el suplementario topológico de $Img(S)$

Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Img(T)$ tal que $y_n \to y$. P.D. $y \in Img(T)$.

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in E$ tal que $Tz_n = y_n$, luego

$$z_n = STz_n = Sy_n \quad y \quad Sy_n \longrightarrow Sy$$

Luego, tomando $z := Sy$, entonces

$$z_n = Sy_n \longrightarrow Sy = z.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} Tz_n = \lim_{n\to+\infty} y_n \to y = Tz$$

así, $y \in Img(T)$, de donde se concluye que $Img(T)$ es cerrada.

P.D. $Ker(S)$ es el suplementario topológico de $Img(T)$.

Puesto que $ker(S)$ es cerrado, resta probar que

$$F = Ker(S) \oplus Img(T).$$

Así, mostremos que $ker(S) \cap Img(T) = \{0\}$. Sea $y \in Img(T)$, entonces existe $x \in E$ tal que $Tx = y$. Luego, como $y \in ker(S)$, entonces

$$0 = Sy = STx = x \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Finalmente mostremos que para todo $y \in F$,

$$y = y_{ker(S)} + y_{Img(T)}$$

Así, para $y \in F$, notemos que

$$y = \underbrace{y - TSy}_{\in ker(S)} + \underbrace{TSy}_{\in Img(T)}$$

con lo que se sigue lo requerido.

b) $\Rightarrow$ a)

Supongamos que $Img(T)$ es cerrada y que admite un suplementario topológico.
P.D. T admite una inversa por la izquierda, i.e., existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que

$$ST = Id_E$$

Por hipótesis, notemos que $Img(T) \oplus N = F$, entonces consideremos la proyección

$$\begin{aligned} P : F &\longrightarrow Img(T) \\ y &\longmapsto P(y) = P(y_{Img(T)} + y_N) = y_{Img(T)}. \end{aligned}$$

Así, definamos

$$\begin{aligned} S : F &\longrightarrow E \\ y = y_{Img(T)} + y_N &\longmapsto S(y) = x_y \quad \text{con} \quad Tx_y = y_{Img(T)} \end{aligned}$$

Como T es inyectivo, entonces para $y_{Img(T)} \in Img(T)$, existe un único $x_y \in E$ tal que

$$Tx_y = Img(T).$$

Así, S está bien definido. Más aún, se tiene que S es lineal pues

$S(y + \alpha\tilde{y}) = (x_y + \alpha x_{\tilde{y}})$ donde $y + \alpha\tilde{y} = T(x_y + \alpha x_{\tilde{y}}) + (x_y)_N + \alpha(x_{\tilde{y}})_N.$

S es sobreyectivo. Dado $x \in E$, consideremos $Tx = y$, luego $Sy = x$. Ahora mostremos que S es continuo, notemos que

$$\|Sy\|_F = \|x_y\| \leq C\|Tx_y\| \leq \tilde{C}\|y\|$$

Por T-I-B   Por el Lema 2.8

Sección: Relaciones de ortogonalidad

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y $H \subseteq E$.

Definición 2.7. Llamaremos el ortogonal fuerte de H al subespacio vectorial notado por $H^\perp$ de E' definido como

$$H^\perp = \{ f \in E' : f|_H = 0 \quad \forall x \in H \ \langle f, x \rangle_{E' \times E} = 0 \}$$

Observaciones. a) $H^\perp$ es claramente un s.e.v. de E'

b) $f, g \in H^\perp$ $\langle f + \lambda g, x \rangle = \langle f, x \rangle + \lambda \langle g, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H$.

c) $H^\perp$ es cerrado para la topología fuerte, débil y débil $*$.

En efecto, notemos que

$$H^\perp = \bigcap_{x \in H} \ker(J_x) \qquad \text{con} \qquad J_x = f(x)$$

Ahora, como

$J_x : (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{K}$ continua

$\hookrightarrow J_x : (E', \sigma(E', E'')) \to \mathbb{K}$ continua

$\hookrightarrow J_x : (E', \sigma(E', \|\cdot\|_{E'})) \to \mathbb{K}$ continua

Así, $\ker(J_x)$ es cerrado en $\sigma(E', E)$, luego

$$H^\perp = \bigcap_{x \in H} \ker(J_x) \text{ es cerrado } \sigma(E', E) \Rightarrow \sigma(E', E'') \Leftrightarrow \sigma(E', \|\cdot\|_{E'})$$

Definición 2.8. Sea $N \subseteq E'$ donde $(E', \|\cdot\|_{E'})$ el espacio dual de $(E, \|\cdot\|_E)$ de Banach. Definimos el ortogonal débil de N, notado ${}^\perp N$, el s.e.v. definido por

$${}^\perp N = \{ x \in E : \forall f \in N : f(x) = 0 \}$$

Observación ${}^\perp N$ es un s.e.v. cerrado fuerte y débilmente

$${}^\perp N = \bigcap_{f \in N} \ker(f)$$

Proposición 2.9. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y un s.e.v. de E, entonces

$$\overline{H} = {}^\perp(H^\perp)$$

Demostración

Notemos que $H \subseteq {}^\perp(H^\perp) \Rightarrow \overline{H} \subseteq {}^\perp(H^\perp)$.

P.D ${}^\perp(H^\perp) \subseteq \overline{H}$

Sea $x \in {}^\perp(H^\perp)$. P.D $x \in \overline{H}$

Por contradicción, supongamos que existe $x_0 \in {}^\perp(H^\perp)$ tal que $x_0 \notin \overline{H}$. Así, por Hahn-Banach Segunda Forma Geométrica existe un hiperplano cerrado que separa estrictamente a ${}^\perp(H^\perp)$ y $\{x_0\}$. Notemos que $\{x_0\}$ es un compacto, convexo no vacío y $(H^\perp)^\perp$ es un convexo cerrado no vacío.

Por lo tanto, existe $f \in H'$ tal que

$$f(x) < \alpha < \alpha + \varepsilon < f(x_0) \qquad \forall x \in \overline{H}.$$

$$\Rightarrow \quad f(x) < \alpha < f(x_0) \qquad \forall x \in H \qquad [C]$$

Así, como H es s.e.v., entonces para $k \in \mathbb{N}$

$$f(kx) < \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) < \alpha/k \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad k \to +\infty. \qquad [A]$$

más aún

$$f(-kx) < \alpha \Rightarrow -kf(x) < \alpha \Rightarrow f(x) > \alpha/_{-k} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad k \to +\infty \qquad [B]$$

Por lo tanto, por [A] y [B]

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in H \qquad [D]$$

Luego, en [C] se sigue que

$$f(x_0) > 0$$

Así, por [D] se sigue que $f \in M^{\perp}$ y puesto que $x_0 \in {}^{\perp}(M^{\perp})$, se tiene que

$$0 < f(x_0) = 0 \qquad \Rightarrow\Leftarrow$$

Lo cual no es posible. Por lo tanto, $x_0 \in \overline{M}$, con lo que se sigue lo requerido.

Observación: Notemos que no necesariamente se tiene que

$$({}^{\perp}M)^{\perp} = \overline{M}.$$

De hecho, se pueden encontrar casos en los que se tiene que

$$\overline{M} \subseteq ({}^{\perp}M)^{\perp}.$$

Contraejemplo:

Sea $E = \ell^1$, por lo tanto $E' = \ell^\infty$. Consideremos $c_0 \subseteq \ell^\infty$. Notemos que c_0 es un s.e.v. cerrado de ℓ^∞. Así, se tiene que para $H := c_0$,

$$\begin{aligned} {}^{\perp}H &= \{x \in E : \langle f, x \rangle = 0 \quad \forall f \in H\} \\ &= \{x \in \ell^1 : \langle y, x \rangle_{E' \times E} = 0 \quad \forall y \in H\} \\ &= \{x \in \ell^1 : \langle y, x \rangle_{E' \times E} = 0 \quad \forall y \in c_0\} \end{aligned}$$

Notemos que una base de Schauder para ℓ^1 está dada por $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Por lo tanto, si $x \in \ell^1$, entonces existen $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ tales que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$$

Por lo tanto, para $y \in c_0 \subseteq (\ell^1)' = \ell^\infty$, se tiene que

$$\langle y, x \rangle_{E' \times E} = \left\langle y, \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \langle y, e_k \rangle = 0$$

$$\therefore \alpha_k = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Así, se sigue que $x = 0_E$, i.e.,

$${}^{\perp}H = \{0_E\}$$

De esta manera, se tiene que $({}^{\perp}M)^{\perp} = E'$ pues para todo $f \in E' = \ell^\infty$

$$\langle f, x \rangle = 0 \qquad \text{con} \qquad x \in M^{\perp}.$$

Por lo tanto, se tiene que $c_0 \subsetneq ({}^{\perp}c_0)^{\perp}$

Para completar el argumento, analicemos en qué punto falla la demostración realizada en la proposición 2.9.

Sea $N \subseteq E'$ un s.e.v. queremos probar que

$$({}^{\perp}N)^{\perp} = \overline{N}.$$

trivialmente, $\overline{N} \subseteq ({}^{\perp}N)^{\perp}$. Luego, sea $f_0 \in E'$ tal que $f_0 \in ({}^{\perp}N)^{\perp}$ pero $f_0 \notin \overline{N}$. Análogamente, existe $\varphi \in E''$ tal que separa estrictamente a $\overline{N}$ y $\{f_0\}$, en efecto

$$\langle \varphi, f \rangle_{E''\times E'} < \alpha < \langle \varphi, f_0 \rangle_{E''\times E'} \quad \forall f \in \overline{N}.$$

Además, se tiene que $\langle \varphi, f_0 \rangle_{E''\times E'} > 0$. No obstante, no se tiene, necesariamente que $\varphi \in {}^{\perp}N$, puesto que el espacio no es reflexivo, pues si lo fuera, existiría $x_0 \in E$ tal que $Jx_0 = \varphi$ y por lo tanto

$$\langle \varphi, f_0 \rangle_{E''\times E'} = \langle Jx_0, f_0 \rangle_{E''\times E'} = \langle f_0, x_0 \rangle = 0$$

con lo que se sigue la contradicción

Jueves, 26 de enero de 2023.

Se puede mostrar que $\overline{N}^{\sigma(E',E)} = ({}^{\perp}N)^{\perp}$

Observación: El Teorema de Hanh-Banach se puede generalizar para las topologías débiles

En particular, con respecto a la topología débil *. Es decir que si $A \subseteq E'$ y $B \subseteq E'$ tal que A y B son convexos y además

$$A \text{ cerrado en } \sigma(E',E) \quad y \quad B \text{ compacto en } \sigma(E',E)$$

entonces existe $\xi \in E''$ tal que

$$\xi : (E', \sigma(E',E)) \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{continua y lineal}$$

esto se tiene si y solo si existe $x_\xi \in E$ tal que $J_{x_\xi} = \xi$. Más aún, tenemos que

$$Re(\xi(\varphi)) < \alpha < Re(\xi(\psi)) \quad \text{con } \varphi \in A \quad \psi \in B,$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $H \subseteq E'$ es un hiperplano en $\sigma(E',E)$, entonces H es cerrado en $\sigma(E',E)$ si y solo si existe $x \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que

$$H = \{ \varphi \in E' : J_x(\varphi) = \alpha \}.$$

Proposición $({}^{\perp}N)^{\perp} = \overline{N}^{\sigma(E',E)}$.

Demostración

Notemos que $N \subseteq ({}^{\perp}N)^{\perp} \Rightarrow \overline{N}^{\sigma(E',E)} \subseteq ({}^{\perp}N)^{\perp}$.

P.D $({}^{\perp}N)^{\perp} \subseteq \overline{N}^{\sigma(E',E)}$. Por absurdo, existe $\varphi_0 \in ({}^{\perp}N)^{\perp}$ y $\varphi_0 \notin \overline{N}^{\sigma(E',E)}$. Por lo tanto existe $\xi : (E', \sigma(E',E)) \to \mathbb{K}$ continua lineal tal que

$$Re(\xi(\psi)) < \alpha < Re(\xi(\varphi_0)) \quad \forall \psi \in \overline{N}$$

Por lo anterior, sabemos que existe $\overset{\text{único}}{x_\xi} \in E$ tal que para todo $\varphi \in E'$

$$\langle J_{x_\xi}, \varphi \rangle_{E''\times E'} = \langle \varphi, x_\xi \rangle_{E'\times E} = \xi(\varphi) = \langle \xi, \varphi \rangle_{E''\times E'}$$

de esta manera, se sigue que

$$Re(\psi(x_\xi)) < \alpha < Re(\varphi_0(x_\xi)) \quad \forall \psi \in \overline{N}^{\sigma(E',E)}$$

Por lo tanto, se sigue que $Re(\psi(x_\xi)) = 0$. Resta probar que $\varphi_0(x_\xi) = 0$. Para ello,

$$x_\xi \in {}^{\perp}(\overline{N}^{\sigma(E',E)}) \left\{ \begin{array}{l} N \subseteq \overline{N}^{\sigma(E',E)} \Rightarrow {}^{\perp}(\overline{N}^{\sigma(E',E)}) \subseteq {}^{\perp}N \\ x_\xi \in {}^{\perp}N \Rightarrow \varphi_0(x_\xi) = 0. \end{array} \right.$$

Claramente $\overline{N}^{\sigma(E',E)}$ es un subespacio vectorial.

P.D. c_0 es denso en ℓ^∞ para la topología $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$

$$({}^\perp c_0)^\perp = \overline{c_0}^{\sigma(\ell^\infty,\ell^1)}$$

$(c_0, \sigma(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty}))$ Banach

$(c_0, \sigma(\ell^\infty, (\ell^\infty)'))$ Cerrado

$({}^\perp c_0)^\perp = \ell^\infty$:

Proposición 2.10. Sea $M \subseteq E$ s.e.v. cerrado tal que $\dim(M)$ es finita, entonces codimensión de $M^\perp$ es finita y más aún

$$\operatorname{codim}(M^\perp) = \dim(M)$$

Demostración

Como $\dim(M)$ es finita, existe $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base para M y más aún existen en E' $(e_i^*)_{i=1}^n$ tal que

$$e_i^*(x_M) = e_i(x_M) \quad \forall x_M \in M$$

Luego, tomando $N = \operatorname{span}\{(e_i^*)_{i=1}^n\}$ P.D $E' = N \oplus M^\perp$

Notemos que $N \cap M^\perp = \{0_{E'}\}$

$\varphi \in N$ $\quad \varphi(\cdot) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(\cdot)$ $\quad \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j^*(e_i) = \lambda_i$

$\forall x \in M \quad \varphi(x) = 0$ $\quad \varphi(e_i) = 0 = \lambda_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Luego $\varphi \in E'$

$$\varphi = \varphi - \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^* + \underbrace{\sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*}_{\in N} \qquad \text{P.D. } \varphi - \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^* \in M^\perp$$

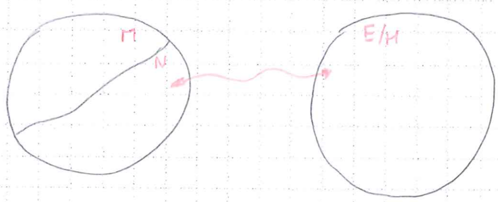
Sea $x_M \in M$

$$\left(\varphi - \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*\right) x_M = \left(\varphi\left(\sum_{j=1}^n e_j^*(x_M) e_j\right) - \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*\left(\sum_{j=1}^n e_j^*(x_M) e_j\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n e_j^*(x_M)\varphi(e_j) - \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*(x_M) = 0$$

Por lo tanto, hemos probado que $E' = M^\perp \oplus N$ donde $\dim(N) = n$. Por lo tanto, $M^\perp$ es de codimensión finita.

En realidad, se tiene que si $E = M \oplus N$ y $\dim(N) = n$ entonces $\operatorname{codim}(M) = n$



$E/M \approx M$

Recordemos que

$$\pi : N \longrightarrow E/M$$
$$x_N \longmapsto \pi(x_N)$$

Notemos que π es lineal y continua.

inyectiva $\quad \pi(x_N) = [0] \iff x_N \in M$ y $x_N \in N \Rightarrow x_N = 0$. (Por lo tanto, π es inyectiva)

sobreyectiva $\quad$ Sea $[y] \in E/M$. ¿$\exists x_y \in N$ tal que $\pi(x_y) = [y]$?

- Si $[y] = 0$, entonces $x_y = 0 \in N$
- Si $[y] \neq 0$, existe $\tilde{x}_y \in E$ tal que $\pi(\tilde{x}_y) = [y]$, pero

$$\tilde{x}_y = (x_y)_N + (x_y)_M \quad \Rightarrow \quad [y] = \pi(\tilde{x}_y) = \pi((x_y)_N)$$

tomando $x_y = (x_y)_N$ se sigue el resultado.

Viernes, 27 de enero de 2022.

Si codimensión de M s.e.v. cerrado es finita. de $(E, \|\cdot\|_E)$ espacio de Banach. Entonces $M^\perp$ es de dimensión finita.

Demostración

$\dim(E/M) = n$ (codimensión de n). Por lo tanto, existe $\{[e_i]\}_{i=1}^n$ una base de E/M. Luego, definamos

$$\begin{aligned} \pi : E &\longrightarrow E/M \\ x &\longmapsto \pi(x) = [x] \end{aligned}$$

la cual es sobreyectiva. Por lo tanto, existe $\{e_i\}_{i=1}^n$ una familia linealmente independiente tal que $\pi(e_i) = [e_i]$. Ahora, tomemos $\tilde{N} = \text{gen}\{e_i\}_{i=1}^n$

P.D. $M^\perp$ admite un suplementario topológico de codimensión finita

Notemos que $\tilde{N} \subseteq E$ s.e.v. cerrado tal que

$$E = M \oplus \tilde{N}$$

Por lo anterior como $\tilde{N}$ es $\tilde{N}^\perp$ es de codimensión finita y $n = \dim(\tilde{N}) = \text{codim}(\tilde{N}^\perp)$.
P.D $M^\perp \oplus \tilde{N}^\perp = E'$
Tomemos $\varphi \in M^\perp$ y $\varphi \in \tilde{N}^\perp$, entonces tomando $x \in E$, se sigue que

$$x = x_M + x_{\tilde{N}},$$

luego $\varphi(x) = \varphi(x_M) + \varphi(x_{\tilde{N}}) = 0$, para todo $x \in E$ Por lo tanto, $\varphi = 0$, i.e.

$$M^\perp \cap \tilde{N}^\perp = \{0\}$$

Ahora, dado $\varphi \in E'$, mostramos que existen $\underbrace{\varphi_{M^\perp}}_{\in M^\perp}$ y $\underbrace{\varphi_{\tilde{N}^\perp}}_{\in \tilde{N}^\perp}$ tales que

$$\varphi = \varphi_{M^\perp} + \varphi_{\tilde{N}^\perp}$$

Notemos que si $x \in E$, entonces $x = P_M(x) + P_{\tilde{N}}(x)$, luego

$$\varphi(x) = \varphi(P_M(x)) + \varphi(P_{\tilde{N}}(x)) = \varphi_{\tilde{N}^\perp}(x) + \varphi_{M^\perp}(x),$$

donde $\varphi_{\tilde{N}^\perp} = \varphi \circ P_M$ y $\varphi_{M^\perp} = \varphi \circ P_{\tilde{N}}$ y así

$$\varphi_{\tilde{N}^\perp} = \varphi \circ P_M(x_{\tilde{N}}) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi_{M^\perp}(x_M) = \varphi \circ P_{\tilde{N}}(x_M) = 0 \qquad \forall x_{\tilde{N}} \in \tilde{N} \quad \forall x_M \in M.$$

Ahora consideremos las siguientes preguntas:

a) Sea $N \subseteq E'$ s.e.v. cerrado tal que si $\dim(N) = n$, entonces ${}^\perp N \subseteq E$ es de codimensión finita.

Por lo hecho anteriormente, se tiene que $\dim(N) = n$ implica que $\text{codim}(N^\perp) = n$.
Además, sabemos que

$$J({}^\perp N) \subseteq N^\perp$$

con
$$\begin{aligned} J : {}^\perp N &\longrightarrow N^\perp \\ x &\longmapsto J_x \in N^\perp \end{aligned} \qquad \text{donde } J \text{ es inyectivo.}$$

Más aún, como $J({}^\perp N) \subseteq N^\perp$ y además $\text{codim}(N^\perp)$ es finita entonces ${}^\perp N$ es de codimensión finita.

Luego, $J({}^\perp N)$ es cerrado en $(E'', \|\cdot\|_{E''})$. más aún $J({}^\perp N)$ es de codimensión a lo más n, i.e., $\text{codim}({}^\perp N) \leq n$.

Por otro lado, consideremos $N \subseteq E'$ s.e.v. $\text{codim}(N) = n$

P.D. $\dim {}^\perp N$ es finita ${}^\perp N \subseteq E'$ $\dim({}^\perp N) \leq n$.

Por otro lado, si tomamos $N \subseteq E'$ y suponemos que ${}^{\perp}N$ es de codimensión finita igual a n.

Luego, $({}^{\perp}N)^{\perp} = \overline{N}^{\sigma(E',E)}$ es un s.e.v. cerrado de dimensión finita igual a n

$N \subseteq \overline{N}^{\sigma(E',E)}$ $\dim(N) \leq n$

Y, si suponemos que ${}^{\perp}N \subseteq E$ es de dimensión finita igual a n, entonces:

$({}^{\perp}N)^{\perp} = \overline{N}^{\sigma(E',E)}$ es de codimensión n.

$N \subseteq \overline{N}^{\sigma(E',E)}$ es de codimensión menor o igual a n

Sección: Operador adjunto en espacios de Hilbert.

Motivación: Consideremos $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ con H_1 y H_2 espacios de Hilbert. Gracias al Teorema de representación de Riesz existe un único $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1}.$$

Con esto, se tiene que $\|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)}$.

Se puede ver más información en:

Proposición 8.11. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Entonces existe un único $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$ tal que verifica lo siguiente

$$\langle \varphi, Tx \rangle_{F' \times F} = \langle T^* \varphi, x \rangle_{E' \times E} \qquad \forall x \in E \qquad \forall \varphi \in F'$$

Más aún, se tiene que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$$

Definamos
$$T^* : F' \longrightarrow E'$$
$$\varphi \longmapsto T^*\varphi \in E'$$
con lo que

$$T^*\varphi(x) = \langle T^*\varphi, x \rangle_{E' \times E} = \langle \varphi, Tx \rangle_{F' \times F}$$

luego

$$|T^*\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \, \|T\| \, \|x\|$$

$$\Rightarrow \quad \|T^*\varphi\| \leq \|T^*\| \, \|\varphi\|$$

Más aún,

$$T^*(\varphi + \lambda\psi)(x) = \langle \varphi + \lambda \psi, Tx \rangle_{F' \times F}$$
$$= \langle \varphi, Tx \rangle + \lambda \langle \psi, Tx \rangle$$
$$= \langle T^*\varphi, x \rangle + \lambda \langle T^*\psi, x \rangle$$
$$= T^*\varphi(x) + \lambda T^*\psi(x).$$

Supongamos que existen T_1^* y T_2^* tales que verifican lo anterior, por lo tanto

$$\|(T_1^* - T_2^*)\varphi\| = \sup_{x \in B_E} |\langle (T_1^* - T_2^*)\varphi, x \rangle| = 0$$

$$\sup \|T_1^* - T_2^*\| = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1^* = T_2^*$$

Lunes, 30 de enero de 2023.

Observación: Si consideramos $* : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(F',E')$, entonces este operador tiene las siguientes propiedades

a) antilineal
b) isometría $\|T^*\|_{\mathcal{L}(F',E')} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$
c) No necesariamente es sobreyectiva
d) Para $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y $S \in \mathcal{L}(F,G)$, se tiene que $(ST)^* = T^* S^*$

e) $(\operatorname{Img} T)^{\perp} = \ker T^*$ En efecto, tomando $\varphi \in (\operatorname{Img} T)^{\perp}$, se tiene que

$$\langle \varphi, Tx \rangle_{F' \times F} = 0 \qquad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow \langle T^* \varphi, x \rangle_{E' \times E} = 0 \qquad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow T^* \varphi = 0$$

$$\therefore \varphi \in \ker(T^*)$$

f) ${}^{\perp}\ker(T^*) = \overline{\operatorname{Img} T}$

g) ${}^{\perp}(\operatorname{Img} T^*) = \ker(T)$ Si $x \in {}^{\perp}(\operatorname{Img} T^*)$, entonces

$$\langle T^* \varphi, x \rangle_{E' \times E} = 0, \qquad \forall \varphi \in F'$$

$$\Rightarrow \langle \varphi, Tx \rangle_{F' \times F} = 0 \qquad \forall \varphi \in F'$$

$$\Rightarrow Tx = 0$$

$$\therefore x \in \ker(T)$$

h) $\overline{\operatorname{Img} T^*} \subset (\ker T)^{\perp}$

$$({}^{\perp}(\operatorname{Img} T^*))^{\perp} = \overline{\operatorname{Img} T^*}^{\sigma(E', E)} \qquad \ker(T)^{\perp} = \overline{\operatorname{Img}(T^*)}^{\sigma(E', E)}$$

$$\overline{\operatorname{Img} T^*} \subset \ker(T)$$

i) $(T^*)^* \in \mathcal{L}(E'', F'')$ Notemos que $J_F T = T^* J_E$, luego

$$J_F T \in \mathcal{L}(E, F'') \qquad T^{**} J_E \in \mathcal{L}(E, F'')$$

$$\langle T^{**} J_E x, \varphi \rangle_{F'' \times F} = \langle T^* \varphi, x \rangle_{E' \times E} = \langle \varphi, Tx \rangle_{F' \times F} = \langle J_F Tx, \varphi \rangle_{F'' \times F}$$

Proposición 2.12. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se tiene lo siguiente

a) Si $\dim(\ker T)$ es finita, entonces la codimensión de $\overline{\operatorname{Img} T^*}$ es finita

b) Si la codimensión de $\ker(T)$ es finita, entonces $\dim(\overline{\operatorname{Img} T^*})$ es finita

c) ~~Si $\dim(\ker T)$ es finita, entonces $E = \ker(T) \oplus {}^{\perp}\operatorname{Img}(T^*)$, análogamente se tiene el resultado si la codimensión de T es finita~~

d) ~~Si la $\dim(\ker T^*)$ es finita o~~

Parte a)

Supongamos que $\dim(\ker T) = n < +\infty$, por la [Prop. 2.10] $\ker(T)^{\perp}$ es de codimensión finita en E'. Luego, como $\ker(T) = {}^{\perp}\operatorname{Img} T^*$, entonces

$$(\ker(T))^{\perp} = ({}^{\perp}\operatorname{Img} T^*)^{\perp} = \overline{\operatorname{Img} T^*}^{\sigma(E', E)} \supseteq \overline{\operatorname{Img}(T^*)}$$

Como $\overline{\operatorname{Img} T^*}^{\sigma(E', E)}$ es de codimensión finita, entonces $\overline{\operatorname{Img} T^*}$ es de codimensión finita, luego

$$\dim(\ker T) = \text{codimensión}(\overline{\operatorname{Img} T^*})$$

Observación Si H_1 y H_2 son espacios de Hilbert, y consideramos $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, entonces

$$H_1 = \ker(T) \oplus \overline{\operatorname{Img} T^*} \qquad \text{y} \qquad H_2 = \overline{\operatorname{Img} T} \oplus \ker(T^*)$$

La demostración de esta observación se deduce de las relaciones de ortogonalidad y del teorema de suma directa en espacios de Hilbert.

Proposición 2.13. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, G y L dos s.e.v. cerrados de E, entonces

a) $G \cap L = {}^{\perp}(G^{\perp} + L^{\perp})$

b) $\overline{G^{\perp} + L^{\perp}} \subset (G \cap L)^{\perp}$

c) ${}^{\perp}(G^{\perp} \cap L^{\perp}) = \overline{G + L}$

Demostración

literal a)

P.D. $G \cap L \subseteq {}^{\perp}(G^{\perp} + L^{\perp})$

Sean $x \in G \cap L$ y $f \in G^{\perp} + L^{\perp}$, entonces existen $f_1 \in G^{\perp}$ y $f_2 \in L^{\perp}$ tales que $f = f_1 + f_2$, por lo tanto

$$\langle f_1, x_1 \rangle = 0 \quad y \quad \langle f_2, x_2 \rangle = 0 \qquad \forall x_1 \in G \quad y \quad \forall x_2 \in L.$$

Así, como $x \in G \cap L$, entonces

$$\langle f, x \rangle = \langle f_1, x_1 \rangle = \langle f_2, x_2 \rangle = 0,$$

es decir que $x \in {}^{\perp}(G^{\perp} + L^{\perp})$. Recíprocamente,

$$G^{\perp} \subseteq G^{\perp} + L^{\perp} \quad y \quad L^{\perp} \subseteq G^{\perp} + L^{\perp},$$

por lo tanto,

$${}^{\perp}(G^{\perp} + L^{\perp}) \subseteq {}^{\perp}(G^{\perp}) = \overline{G} = G \quad y \quad {}^{\perp}(G^{\perp} + L^{\perp}) \subseteq {}^{\perp}(L^{\perp}) = \overline{L} = L$$

$$\therefore {}^{\perp}(G^{\perp} + L^{\perp}) \subseteq G \cap L.$$

De esta manera, se sigue el resultado.

literal b) Se deduce del literal anterior usando clausuras y propiedades.

literal c) Notemos que $G + L \subseteq {}^{\perp}(G^{\perp} + L^{\perp})$. Resta probar que ${}^{\perp}(G^{\perp} \cap L^{\perp}) \subseteq \overline{G + L}$ y como $\overline{G + L} = {}^{\perp}((G+L)^{\perp})$, entonces si probamos $(G+L)^{\perp} \subseteq G^{\perp} \cap L^{\perp}$ se tiene el resultado. Sea $\varphi \in (G+L)^{\perp}$, notemos que

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 + x_2) = 0 \qquad \text{con } x \in G + L, \quad x_1 \in G \; y \; x_2 \in L.$$

$$\Rightarrow \text{Si } x_1 = 0, \text{ entonces } \varphi(x) = \varphi(x_2) = 0 \Rightarrow \varphi \in L^{\perp}$$

Análogamente, si $x_2 = 0$, entonces $\varphi \in G^{\perp}$. Por lo tanto, si $x = 0$, entonces

$$\varphi \in G^{\perp} \cap L^{\perp}$$

Con esto, se concluye que

$$(G+L)^{\perp} \subseteq G^{\perp} \cap L^{\perp}$$

[Ver en recursos el borrador de la idea completa]

Proposición 2.14. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ dos espacios de Banach, G y F dos s.e.v. cerrados de E. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

[3] Teo 3.11

a) $G + L$ es cerrado en E

b) $G^{\perp} + L^{\perp}$ es cerrado en E'

c) $G + L = {}^{\perp}(G^{\perp} \cap L^{\perp})$

d) $G^{\perp} + L^{\perp} = (G \cap L)^{\perp}$

Demostración

a) $\Leftrightarrow$ c)

Por la [Proposición 2.13], tenemos que ${}^{\perp}(G^{\perp} \cap L^{\perp}) = \overline{G + L}$, por lo tanto, si $G + L$ es cerrado, entonces $G + L = \overline{G + L}$ y se sigue el resultado deseado. Recíprocamente, con el mismo argumento.

d) $\Rightarrow$ b) Puesto que $G^{\perp} + L^{\perp} = (G \cap L)^{\perp}$, y dado que el ortogonal fuerte de un conjunto siempre es cerrado, entonces se sigue el resultado.

a) $\Rightarrow$ d) Supongamos que $G + L$ es cerrado, por la [Proposición 2.13], se tiene que

$$G^{\perp} + L^{\perp} \subseteq \overline{G^{\perp} + L^{\perp}} \subseteq (G \cap L)^{\perp}$$

Así, resta probar que $(G\cap L)^{\perp} \subseteq G^{\perp}+L^{\perp}$. Notemos que $G\cap L \subseteq G+L$. Así si tomamos $f\in (G\cap L)^{*}$, entonces podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi : G+L &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x=a+b &\longmapsto \varphi(x) = \langle f, a\rangle \end{aligned}$$

El cual está bien definido pues si $x=\hat{a}+\hat{b}$, entonces $0 = x-x = a+b-\hat{a}-\hat{b}$, por lo tanto $a-\hat{a} = \hat{b}-b \in G\cap L$ y así

$$\varphi(a-\hat{a}) = 0 = \varphi(a)-\varphi(\hat{a}) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(\hat{a})$$

Ahora, puesto que $G+L$ es cerrado, se sigue que por el [Lema 2.2], para cada $x\in G+L$, existen $x_G\in G$ y $x_L\in L$ tales que

$$x = x_G + x_L \quad , \quad \|x_G\| \leq \|x\| \quad y \quad \|x_L\| \leq C\|x\|$$

Por lo tanto,

$$|\varphi(x)| = |\langle f, x_G\rangle| \leq \|f\|\,\|x_G\| \leq C\,\|f\|\,\|x\|$$

Así, φ es lineal y acotada. Por lo tanto, por Hanh-Banach, existe $\tilde{\varphi}: E \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que extiende a φ. Así, para cada $u\in G\subseteq G+L$,

$$\langle f-\tilde{\varphi}, u\rangle = \langle f, u\rangle - \langle \tilde{\varphi}, u\rangle = \langle f, u\rangle - \langle \varphi, u\rangle = \langle f, u\rangle - \langle f, u\rangle = 0,$$

es decir, $f+\tilde{\varphi} \in G^{\perp}$. Por otro lado, si tomamos $v\in L\subseteq G+L$, entonces

$$\tilde{\varphi}(v) = \varphi(v) = \langle f, 0\rangle = 0$$

Así, se tiene que

$$f = (f-\tilde{\varphi}) + \tilde{\varphi} \in G^{\perp} + L^{\perp}.$$

Así, como f es arbitrario, se tiene que $(G\cap L)^{\perp} \subseteq G^{\perp}+L^{\perp}$.

b) $\Rightarrow$ a) Supongamos que $G^{\perp}+L^{\perp}$ es cerrado en E^{*}

Proposición 2.15 Sean E un espacio de Banach, G y L dos s.e.v cerrados tales que $G+L$ es cerrado, entonces existe C tal que

[1] Corolario 2.11

$$\text{dist}(x, G\cap L) \leq C\{\text{dist}(x,G) + \text{dist}(x,L)\} \quad \forall x\in E$$

Por la [Proposición 2.15] existe $c\geq 0$ tal que

$$\text{dist}(f, G^{\perp}\cap L^{\perp}) \leq C\left(\text{dist}(f, G^{\perp}) + \text{dist}(f, L^{\perp})\right) \quad \forall f\in E^{*}$$

Por el teorema de Fenchel-Rockafellar, se tiene que

$$\text{dist}(f, G^{\perp}) = \sup_{\substack{x\in \overline{G} \\ \|x\|\leq 1}} \langle f, x\rangle \quad \forall f\in E^{*} \quad y \quad \text{dist}(f, L^{\perp}) = \sup_{\substack{x\in \overline{L} \\ \|x\|\leq 1}} \langle f, x\rangle$$

Así, como por la [Proposición 2.13] se tiene que $G^{\perp}\cap L^{\perp} = (G+L)^{\perp}$, luego

$$\text{dist}(f, G^{\perp}\cap L^{\perp}) = \text{dist}(f, (G+L)^{\perp}) = \sup_{\substack{x\in \overline{G+L} \\ \|x\|\leq 1}} \langle f, x\rangle \quad \forall f\in E^{*}$$

Así, como G y L son cerrados, entonces

$$\sup_{\substack{x\in \overline{G+L} \\ \|x\|\leq 1}} \langle f, x\rangle \leq C\left(\sup_{\substack{x\in G \\ \|x\|\leq 1}} \langle f, x\rangle + \sup_{\substack{x\in L \\ \|x\|\leq 1}} \langle f, x\rangle\right) \quad \forall f\in E^{*} \qquad [A]$$

P.D $\frac{1}{C} B_{G+L} \subseteq \overline{B_G + B_L}$. Por contradicción, supongamos que existe $x_0 \in \overline{G+L}$ tal que

$$\|x_0\| \leq \frac{1}{C} \quad y \quad x_0 \notin \overline{B_G + B_L}$$

Así, por la segunda forma geométrica de Hanh-Banach, existen $f_0\in E^{*}$ y $\alpha\in\mathbb{K}$ tales que

$$\mathrm{Re}(\langle f_0, x_0\rangle) < \alpha < \mathrm{Re}(\langle f_0, x_0\rangle) \quad \forall x \in \overline{B_G + B_L}$$

y, en particular, para $x \in B_G + B_L$. Así, como f_0 es lineal, entonces

$$\mathrm{Re}(\langle f_0, y\rangle) + \mathrm{Re}(\langle f_0, z\rangle) < \alpha < \mathrm{Re}(\langle f_0, x_0\rangle) \quad \forall y \in B_G \quad \forall z \in B_L.$$

de esta manera $\mathrm{Re}(\langle f_0, y\rangle) < \alpha - \mathrm{Re}(\langle f_0, z\rangle)$ $\forall y \in B_G$ y $\forall z \in B_L$, de donde

$$\sup_{\substack{y \in G \\ \|y\| \leq 1}} \mathrm{Re}(\langle f_0, y\rangle) \leq \alpha - \sup_{\substack{z \in L \\ \|z\| \leq 1}} \mathrm{Re}(\langle f_0, z\rangle)$$

De donde, se concluye que

$$\sup_{\substack{y \in G \\ \|y\| \leq 1}} \mathrm{Re}(\langle f_0, y\rangle) + \sup_{\substack{z \in L \\ \|z\| \leq 1}} \mathrm{Re}(\langle f_0, z\rangle) \leq \alpha \leq \mathrm{Re}(\langle f_0, x_0\rangle) \leq \frac{1}{C} \sup_{\substack{x \in \overline{G+L} \\ \|x\| \leq 1}} \mathrm{Re}(\langle f, x\rangle)$$

Pero esto contradice a [A], por lo tanto, se muestra que $\frac{1}{C} B_{\overline{G+L}} \subseteq \overline{B_G + B_L}$. Notemos ahora que $(G \times L, \|\cdot\|_\infty)$ y $(\overline{G+L}, \|\cdot\|_E)$ son espacios de Banach. Además, el operador

$$T: G \times L \longrightarrow \overline{G+L}$$
$$(x,y) \longmapsto T(x,y) = x+y$$

es lineal y continuo, por lo tanto $\frac{1}{C} B_{\overline{G+L}} \subseteq \overline{T(B_{G\times L})}$. Más aún, podemos encontrar $C^* > 0$ tal que $\frac{1}{C^*} B_{\overline{G+L}} \subseteq T(B_{G\times L})$. Así, para cada $y \in \overline{G+L}$ no nulo, tenemos que $y/\|y\| \in C_* T(B_{G\times L})$, por lo tanto, existe $x \in G \times L$, con $\|x\| \leq 1$ tal que

$$y = T(\|y\| C_* x)$$

Por lo tanto, T es sobreyectivo y así, $G+L = T(G \times L) = \overline{G+L}$, es decir que $G+L$ es cerrado, como se quería.

Capítulo 3: Operadores Lineales en espacios de Banach y Hilbert.

Definición 3.1. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Definamos $\mathrm{Inv}(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$ como los operadores invertibles de E en F.

Proposición 3.2 $\mathrm{Inv}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ es un abierto en $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_E)$.

Para la demostración del resultado anterior, utilizaremos el siguiente lema

Lema 3.3. Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\|\mathcal{U}\| < 1$, entonces $Id - \mathcal{U}$ es invertible y además

$$Id - \mathcal{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}^n$$

Demostración (Lema 3.3)

Como $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{U}^n$ es absolutamente convergente ya que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|\mathcal{U}^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|\mathcal{U}\|^n < +\infty. \quad \text{pues } \|\mathcal{U}\| < 1,$$

entonces, como $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)})$ es un espacio de Banach, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}^n$ es convergente en $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)})$

Fijemos $N \in \mathbb{N}$, notemos que

$$(Id - \mathcal{U}) \sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}^n = \sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}^n - \sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}^{N+1} = \sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}^n (Id - \mathcal{U}) = Id - \mathcal{U}^{N+1}$$

Así, si $N \longrightarrow +\infty$, entonces

$$(Id - \mathcal{U}) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{U}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{U}^n (Id - \mathcal{U}) = Id - \lim_{N \to +\infty} \mathcal{U}^{N+1} = Id.$$

Demostración (Proposición 3.2)

Sea $A \in \mathrm{Inv}(E)$, i.e., existe $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = Id_E$. P.D. Existe $r > 0$ tal que

$$B_{\mathcal{L}(E)}(A, r) \subseteq \mathrm{Inv}(E).$$

Si $T \in B_{\mathcal{L}(E)}(A, r)$, entonces

$$T = A\left(Id - A^{-1}(A-T)\right), \quad \text{pues } A \text{ es invertible.}$$

Utilizando [Lema 3.3] para que $Id - A^{-1}(A-T)$ sea invertible, necesitamos que $\|A^{-1}(A-T)\| < 1$, luego

$$\|A^{-1}(A-T)\| \leq \|A^{-1}\| \, \|A-T\| < \|A^{-1}\| \, r$$

tomando $r < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, tenemos que T es invertible pues es la composición de operadores invertibles.

Por lo tanto,

$$B(A, r) \subseteq Inv(E)$$

Observación Si $S, T \in \mathcal{L}(E)$ son invertibles $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$

- $\mathcal{L}(E)$ es un álgebra
- $\mathcal{L}(E)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

Además,
$$(\circ): \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$(T, S) \longmapsto T \circ S = TS$$

a) Existe un único $\mathbb{1}_{\mathcal{L}(E)}$ tal que $\forall T \in \mathcal{L}(E, F)$ $\mathbb{1}_{\mathcal{L}(E)} \circ T = T \circ \mathbb{1}_{\mathcal{L}(E)} = Id_E$.

b) Distributiva: $T \circ (S + W) = T \circ S + T \circ W$

$$(S + W) \circ T = S \circ T + W \circ T$$

c) Asociativa: $T \circ (S \circ W) = (T \circ S) \circ W$.

Además, $Inv(E)$ tiene las siguientes propiedades

- $Inv(E)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{L}(E)$ (cuando E es un espacio de Banach)
- $Inv(E)$ no es un s.e.v.
- $Inv(E)$ es un grupo con respecto a la composición de operadores de $\mathcal{L}(E)$
- Si $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ son espacios de Banach, $Inv(E, F)$ es abierto en $\mathcal{L}(E, F)$
- Si E no es de Banach, entonces $Inv(E)$ no necesariamente es abierto.

Consideremos $F_N = \text{span}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$ con $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$
n-ésima posición

y definamos

$$T: (F_N, \|\cdot\|_{\ell^p}) \longrightarrow (F_N, \|\cdot\|_{\ell^p}) \quad p \geq 1$$
$$(x_1, x_2, \dots) \longmapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

- P.D. T es continuo
- $\forall \varepsilon > 0$ $Id - \varepsilon T$ no es sobreyectivo
- $Inv(F_N)$ no es abierto
- $\|T\| = 1$.

$\exists y \in F_N$ tal que

$$\forall x \in F_N \quad (Id - \varepsilon T)x \neq y$$

$$(x_1, x_2, \dots) - \varepsilon(0, x_1, x_2, \dots)$$

$$= (x_1, x_2 - \varepsilon x_1, x_3 - \varepsilon x_2, x_4 - \varepsilon x_3, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$$

Así, si consideramos $y = e_1$, entonces

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \varepsilon \Rightarrow x_3 = \varepsilon^2$$

Por lo tanto

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \varepsilon^{n-1}$$

Así, $(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots) \notin F_N$.

De esta manera, si suponemos que $Inv(F_N)$ es abierto, entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(Id, r) \subseteq Inv(F_N)$$

tomando $S = Id - \varepsilon T$, se tiene que

$$\|S - Id\| = \varepsilon \|T\| = \varepsilon$$

Así, si $\varepsilon < r$, entonces $S \in B(Id, r)$ y S es invertible. Pero, por lo anterior, sabemos que S no es sobreyectiva y por lo tanto, tampoco es invertible.

Definición 3.4 Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, definimos el espectro de T como

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ no es invertible}\}$$

Ejemplo: Si consideramos $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(E)$

$[T]$ es una representación matricial de T

$\sigma(T) = \{$ valores propios $[T]\}$ Si λ es un v.p. entonces

$$\ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}$$

En efecto, los v.p. de T son todo el espectro ya que en dimensión finita

$T \in \mathcal{L}(E)$ es inyectivo si y solo si $T \in \mathcal{L}(E)$ es sobreyectivo

$$E = \ker(T) \oplus Img(T).$$

Definición 3.5. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, definimos el espectro puntual o disueto como

$$\sigma_p(T) = \sigma_{dis}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}\} \subset \sigma(T) \subset \mathbb{C}$$

Los elementos del espectro puntual son llamados valores propios de T.

- Si λ es un v.p. existe $x_\lambda \in E$ tal que $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$, entonces x_λ es llamado un vector propio asociado a λ.
- Si λ es un v.p. de T. Definimos la multiplicidad de λ como $\dim(\ker(T - \lambda Id))$

Definición 3.6. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, definimos el espectro escencial como

$$\sigma_{ess}(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \notin \sigma_p(T)\}$$
$$= \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(T - Id) = \{0\}\}$$

Definición 3.7. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Definimos el espectro continuo como

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \notin \sigma_p(T), \overline{Img(T - \lambda Id)} = E\}$$

Definición 3.8. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Definimos el espectro residual como

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \notin \sigma_p(T), \overline{Img(T - \lambda Id)} \neq E\}$$

Observación:
- $\{\sigma_p(T), \sigma_{ess}(T)\}$ forman una partición de $\sigma(T)$
- $\{\sigma_c(T), \sigma_r(T)\}$ forman una partición de $\sigma_{ess}(T)$
- En dimensión infinita, se tiene que

$$\sigma_{dis}(T) = \emptyset \quad \veebar \quad \sigma_c(T) = \emptyset \quad \veebar \quad \sigma_r(T) = \emptyset$$

- $\sigma(T)$ nunca es vacío.

Ejemplo: Consideremos $T_\lambda : \ell^p \longrightarrow \ell^p$ con $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
$$x \longmapsto T_\lambda(x) = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Encuentre $\sigma(T_\lambda)$, $\sigma_{dis}(T_\lambda)$, $\sigma_r(T_\lambda)$, $\sigma_c(T_\lambda)$

Jueves, 2 de febrero de 2023.

Proposición 3.9. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, se tiene que

$$\sigma(T) \subseteq \bar{B}(0, \|T\|) = \bar{D}(0, \|T\|) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$$

Demostración

Sea $|\lambda| \leq \|T\|$. P.D $T - \lambda Id$ es invertible

$$1 > \frac{\|T\|}{|\lambda|} \qquad T - \lambda Id = -(\lambda Id - T)$$
$$= -\lambda\left(Id - \frac{T}{\lambda}\right)$$

Así, como $\|T/\lambda\| < 1$, por el [Lema 3.3] se tiene que $Id - T/\lambda$ es invertible.

Lo que implica que $T-\lambda Id$ es invertible.

Ejemplo: Consideremos
$$S: \ell^p \to \ell^p$$
$$x \longmapsto (0, x_1, x_2, \dots).$$

Así, por la proposición anterior $\sigma(S) \equiv \overline{D}(0,1)$. Además, S es inyectivo pero no sobreyectivo

$$(S-\lambda Id)x = (0, x_1, x_2, \dots) - \lambda(x_1, x_2, \dots)$$
$$= (-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, x_2 - \lambda x_3, \dots)$$

Además, tenemos que $(S-\lambda Id)x$ es inyectivo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$; así $\sigma_p(S) = \emptyset$ y
$$\sigma_{ess}(T) = \sigma(T).$$

Si $|\lambda| < 1$, mostremos que $T-\lambda Id$ es no invertible.

Por absurdo, supongamos que $T-\lambda Id$ es sobreyectivo, i.e. existe $x_\lambda \in \ell^p$ tal que
$$(S-\lambda Id)x_\lambda = e_1$$

luego
$$(-\lambda x_1, x_2 - \lambda x_2, x_3 - \lambda x_3, \dots) = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

por lo tanto, $-\lambda x_1 = 1$ y $x_{n-1} - \lambda x_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $x_1 = -1/\lambda$ y $x_n = -1/\lambda^n$, por lo tanto,
$$x = \left(-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$$

pero esto no es posible pues $|\lambda| < 1$ y así $(1/\lambda) > 1$ con lo cual $x \notin \ell^p$. Por lo tanto $\sigma(S) = \overline{D}(0,1)$.

Corrección - Microcontrol 1 - Bimestre 2.

Pregunta 1.

Sean $p \in [1, +\infty[$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, definamos
$$T_\lambda : \ell^p \longrightarrow \ell^p$$
$$x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto T_\lambda(x) = (x_n \lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

a) Muestre que $\|T_\lambda\| = \|\lambda\|_{\ell^\infty}$

b) Muestre que si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_j = 0$, entonces T_λ no es inyectivo.

c) Muestre que si $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| > 0$, entonces T_λ es invertible.

d) Encuentre el espectro de T_λ sabiendo que el espectro es un conjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$. $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_{ess}(T)$.

Solución

Literal a)

Notemos que
$$\|T_\lambda x\|_{\ell^p}^p = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n \lambda_n|^p = \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^p |x_n|^p \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^p \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p$$
$$\Rightarrow \|T_\lambda x\|_{\ell^p} \leq \|\lambda\|_{\ell^\infty} \|x\|_{\ell^p}$$

Por otro lado, consideremos la base canónica de ℓ^p, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, así
$$\|\lambda\|_{\ell^\infty} \geq \|T_\lambda(e_n)\|_{\ell^p} = |\lambda_n| \quad \Rightarrow \quad \|\lambda\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \leq \|\lambda\|_{\ell^\infty}.$$

Así, se concluye que $\|T_\lambda\| = \|\lambda\|_{\ell^\infty}$.

literal b) Por hipótesis, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_j = 0$. Así, por absurdo, supongamos que T_λ es inyectivo, por lo tanto, $\ker(T_\lambda) = \{0\}$. No obstante, se tiene que

$$\text{span}\{e_j\} \subseteq \ker(T_\lambda) = \{0\}$$

lo cual no es posible. Por lo tanto, T_λ no es inyectivo.

Observación: Si $\lambda_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, pero $\inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| = 0$ el operador es inyectivo pero no sobreyectivo

literal c) Sea $z \in \ell^p$, vamos a probar que existe $x \in \ell^p$ tal que $T_\lambda x = z$. Así, definamos

$$\hat{T}: \ell^p \longrightarrow \ell^p$$
$$x \longmapsto \hat{T}(x) = \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Notemos que $\hat{T}$ está bien definido pues o $\lambda_n \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| > 0$ o $\lambda_n \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| > 0$.
Así, tomando $x_k = z_k / \lambda_k$, se tiene que

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{z_k}{\lambda_k}\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|z_k|^p}{\alpha^p}\right)^{1/p} \leq \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |z_k|^p\right)^{1/p} = \frac{1}{\alpha}\|x\|_{\ell^p} < +\infty$$

con $\alpha = \inf_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_n|$. Más aún, se sigue que

$$T_\lambda^{-1} = T_{\frac{1}{\lambda}}$$

y además $\left\|T_{\frac{1}{\lambda}}\right\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|\lambda_n|} = \frac{1}{\inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|}$

literal d) Para calcular el espectro del operador, notemos que $\beta \in \sigma(T_\lambda)$ si y solo si

$$T_\lambda - \beta \, Id$$

no es invertible. Así, como

$$(T_\lambda - \beta Id)(x) = T_\lambda(x) - \beta x = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}} - (\beta x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n(\lambda_n - \beta))_{n \in \mathbb{N}}.$$

entonces, dado que $(\lambda_n - \beta)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, entonces

$$T_{\tilde{\lambda}} := T_\lambda - \beta \, Id$$

Así, por el literal b), si $\lambda_i = \beta$ para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces $T_{\tilde{\lambda}}$ no es inyectivo y por lo tanto, tampoco invertible. Así

$$\overline{\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}} \subseteq \sigma(T_\lambda)$$

Pues es compacto

Recíprocamente, probemos que

$$\sigma(T_\lambda) \subseteq \overline{\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}}$$

Por contrarecíproco, si $\beta \notin \overline{\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}}$, mostremos que $T - \beta Id$ es invertible. Así, si tomamos $\Lambda = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$d(\beta, \Lambda) > 0 \iff \inf_{n \in \mathbb{N}} |\beta - \lambda_i| > 0$$

Así, por lo anterior, se tiene que $T - \beta Id$ es invertible y así

$$\sigma(T_\lambda) = \overline{\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}}.$$

Ahora, notemos que $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T_\lambda)$. En efecto, si $\beta \in \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$T_\lambda - \beta Id \qquad \text{no es inyectivo}$$

y así $\ker(T_\lambda - \beta Id) \neq \{0\}$. Recíprocamente, si $\beta \in \sigma_p(T)$, entonces existe $\hat{x} \in \ell^p$ tal que
no nulo

$$(T_\lambda - \beta Id)(\hat{x}) = 0$$

luego, se sigue que

$$T_\lambda \hat{x} = \beta \hat{x} \Rightarrow (\lambda_n \hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\beta \hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
$$\Rightarrow \lambda_n \hat{x}_n = \beta \hat{x}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \lambda_n = \beta \quad \text{como } \hat{x}\neq 0, \text{ existe } j\in\mathbb{N} \text{ tal que } \hat{x}_j \neq 0.$$

Así, se tiene que

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Por otro lado,

$$\sigma_{ess}(T_\lambda) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \notin \sigma_p(T)\}.$$
$$= \overline{\{\lambda_i : i\in\mathbb{N}\}} \setminus \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Más aún

$$\sigma_c(T_\lambda) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \notin \sigma_p(T),\ \overline{Img(T-\beta Id)} = E\}$$

Ahora, mostremos que para todo $n\in\mathbb{N}$ $e_n \in Img(T-\beta Id)$, lo cual se tiene y por tanto

$$\operatorname{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Img(T_\lambda - \beta Id) \subseteq \ell^p$$
$$\Rightarrow \overline{Img(T_\lambda - \beta Id)} = \ell^p$$

En efecto, mostremos que existe $x^{e_n} \in \ell^p$ tal que

$$(T_\lambda - \beta Id)x^{e_n} = e_n$$

Por lo tanto, notemos que

$$(T_\lambda - \beta Id)(x^{e_n}) = T_\lambda x^{e_n} - \beta Id\, x^{e_n} = ((\lambda_k - \beta)x_k^{e_n})_{k\in\mathbb{N}} = (e_n^k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Así para $n\neq k$, $e_n^k = 0$ y por lo tanto $x_k^{e_n} = 0$. Por otro lado, si $k=n$, entonces

$$x_k^{e_n} = \frac{1}{\lambda_k - \beta} \quad \text{con } \lambda_k - \beta \neq 0 \text{ pues } \beta \notin \sigma_p(T)$$

Así, $\sigma_c(T_\lambda) = \sigma_{ess}(T_\lambda)$ y por lo tanto $\sigma_r(T_\lambda) = \emptyset$.

Para el paso $p=+\infty$

$\sigma(T_\lambda) = \{\lambda_n : n\in\mathbb{N}\}$, $\sigma_d(T_\lambda) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\sigma_{ess}(T_\lambda) = \sigma_{ra}(T_\lambda)$ $\sigma_c(T_\lambda) = \emptyset$

Viernes, 3 de febrero de 2023.

Respecto al operador

$$S : \ell^p \longrightarrow \ell^p$$
$$x = (x_1, x_2, \dots) \longmapsto Sx = (0, x_1, x_2, \dots)$$

se tiene que

$$\sigma(S) = \bar{D}(0,1), \quad \sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_{ess}(S) = \bar{D}(0,1), \quad \sigma_c(S) = \emptyset$$

En efecto, si $\lambda \in \bar{D}(0,1)$, entonces

$$\overline{Img(S-\lambda Id)} \neq \ell^p$$

Para todo $|\lambda| = 1$ $\quad e_1 \notin Img(S-\lambda Id) \quad \operatorname{span}(e_n) \neq Img(T-\lambda Id)$

Como $Img(S-\lambda Id)$ es cerrado, entonces

$$\overline{Img(S-\lambda Id)} = Img(S-\lambda Id) \neq \ell^p.$$

Por otro lado, si consideramos

$$S^* : \ell^p \longrightarrow \ell^p$$
$$x = (x_1, x_2, \dots) \longmapsto S^* x = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Sabemos que $\sigma(S^*) \subseteq \overline{D}(0,1)$. Si $|\lambda|<1$, entonces

$$\ker(S^*-\lambda Id) \neq \{0\}$$

entonces $x_n^{\lambda} = \lambda^{n-1}$, pues $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$. Así

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (|\lambda|^{n-1})^p < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda|^{p(n-1)} < +\infty \quad \text{pues } |\lambda|<1. \text{ Así}$$

$$S^* x^{\lambda} = \lambda x^{\lambda}$$

$$\Rightarrow (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$$

$$\therefore D(0,1) \subseteq \sigma(S^*)$$

$$\Rightarrow \overline{D}(0,1) \subseteq \sigma(S^*)$$

Más aún, como $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T) \subseteq D(0,1)$, entonces $\sigma_p(T) \subseteq D(0,1)$. Recíprocamente, probamos que $D(0,1) \subseteq \sigma_p(T)$, para ello procedemos por contradicción, y mostramos que

$$(\sigma_p(S^*))^c \subseteq (D(0,1))^c$$

con lo que $D(0,1) = \sigma_p(S^*)$. Con esto: $\sigma_{ess}(S^*) = S$

Ahora, si tomamos $|\lambda|=1$. P.D. $\overline{Img(S^*-\lambda Id)} = \ell^p$. Para ello, probamos que [A]

$$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Img(S^*-\lambda Id).$$

$$\Rightarrow \operatorname{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Img(S^*-\lambda Id)$$

$$\Rightarrow \ell^p = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \subseteq \overline{Img(S^*-\lambda Id)} \subseteq \ell^p$$

$$\Rightarrow \overline{Img(S^*-\lambda Id)} = \ell^p$$

Por lo tanto, debemos probar que existe $x^{e_n} \in \ell^p$ tal que

$$S^* x^{e_n} - \lambda x^{e_n} = e_n.$$

luego

$$(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-ésimo}}}{1}, 0, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots) - (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$$

$$= (x_2 - \lambda x_1, x_3 - \lambda x_2, x_4 - \lambda x_3, \dots)$$

Así, $x_2 = \lambda x_1$, $x_3 = \lambda x_2$

$x_n = \lambda x_{n-1}$

$x_n = \lambda^{n-1} x_1$

$x_{n+1} - \lambda x_n = 1$

$x_{n+1} = 1 + \lambda x_n$

$x_{n+1} = 1 + \lambda^n x_1$

$x_{n+2} = 0$

$\vdots$

Entonces, tomando

$$x = (x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ (n-1)\text{-ésimo}}}{\lambda^{n-2} x_1}, \lambda^{n-1} x_1, 1 + \lambda^n x_1, 0, 0, \dots) \quad \text{y} \quad \lambda^{n+1} x_1 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \lambda^{-n}$$

Por lo tanto, $x \in \ell^p$. Así

$$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Img(S^*-\lambda Id)$$

siguiendo el razonamiento mostrado en A, se tiene que

$$\sigma_c(S^*) = S \quad \text{y} \quad \sigma_r(T) = \emptyset$$

Definición 3.10. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Llamaremos el conjunto resolvente de T notado como $R(T)$ al complemento de $\sigma(T)$, i.e. $R(T) = \sigma(T)^c$

Si $\lambda \in R(T)$, entonces llamaremos operador resolvente asociado a λ al operador $R_\lambda(T) = (T-\lambda Id)^{-1}$

Observación: Si se necesita encontrar $x \in E$ tal que $(T - \lambda Id)x = u$ para algún $u \in E$, entonces si $\lambda \in R(T)$, se tiene que

$$x = \underbrace{(T - \lambda Id)^{-1}}_{\text{Esto existe pues } \lambda \in R(T)} u.$$

Proposición 3.11 Identidad de la resolvente.
Sean $T \in \mathcal{L}(E)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in R(T)$

$$R_{\lambda_1} - R_{\lambda_2}(T) = (\lambda_1 - \lambda_2) R_{\lambda_1}(T) R_{\lambda_2}(T)$$

es decir que

$$(T - \lambda_1 Id)^{-1} - (T - \lambda_2 Id)^{-2} = (\lambda_1 - \lambda_2)(T - \lambda_1 Id)^{-1}(T - \lambda_2 Id)^{-2}.$$

Demostración
Notemos que $T_\lambda R_\lambda = Id$, por lo tanto

$$\begin{aligned} R_{\lambda_1} - R_{\lambda_2} &= R_{\lambda_1}(T_{\lambda_2} R_{\lambda_2}) - (R_{\lambda_1} T_{\lambda_1}) R_{\lambda_2} \\ &= R_{\lambda_1}(T_{\lambda_2} - T_{\lambda_1}) R_{\lambda_2} \\ &= R_{\lambda_1}(\cancel{T} - \lambda_2 Id - \cancel{T} + \lambda_1 Id) R_2 \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)(R_{\lambda_1} R_{\lambda_2}) \end{aligned}$$

Así, se sigue que

$$R_{\lambda_1} - R_{\lambda_2} = (\lambda_1 - \lambda_2) R_{\lambda_1} R_{\lambda_2}$$

Note que la demostración requiere que las operadores sean biyectivos, i.e. sobreyectivos e inyectivos.

Por 7.2-3 [Introductory Functional Analysis Kreyszig] se tiene que el rango de T_λ es X.

Teorema 3.12 - Espectro compacto-
Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, entonces $\sigma(T)$ es compacto no vacío de $\mathbb{C}$.

Demostración
Por la [Proposición 3.9] $\sigma(T)$ es acotado, por lo que resta probar que es cerrado.

Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma(T)$ tal que $\lambda_n \to \lambda$. P.D. $\lambda \in \sigma(T)$. Sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$T - \lambda_n Id$$

no es invertible. Por absurdo, supongamos que $\lambda \notin \sigma(T)$, entonces $\lambda \in R(T)$ y $T_\lambda = (T - \lambda Id)$ es invertible. Como $Inv(E)$ es abierto, entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(T_\lambda, r) \subseteq Inv(E)$$

Luego, como

$$\| T_\lambda - T - \lambda_n Id \| = |\lambda_n - \lambda|,$$

entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (Por la arquimediana) tal que

$$|\lambda_n - \lambda| < r \qquad \forall n \geq n_0$$

Es decir, $T - \lambda_0 Id \in B(T_\lambda, 1)$ y por lo tanto es invertible, lo cual es absurdo.

Resta probar que es no vacío.

Martes, 7 de febrero de 2023.

Continuación demostración [teo 3.12]

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach complejo.

Diremos que $f: \Omega \to E$ es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[f(z_0 + h) - f(z_0) \right] \quad \text{existe}$$

así, si el límite anterior existe, se tiene que

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[f(z_0+h) - f(z_0) \right]$$

Diremos que f es analítica en $z_0 \in \Omega$ si existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z-z_0)^n x_n \qquad \forall z \in B(z_0, r)$$

donde r es conocido como el radio de convergencia.

$$r = d(z_0, \partial\Omega)$$

Proposición 3.13. Se tiene que f es analítica en z_0 si y solo si f es holomorfa en z_0.

Proposición 3.14 Sea $f: \Omega \to E$ una función analítica (holomorfa) en Ω tal que f es acotada. Entonces f es constante.

.... continuación (demostración teo 3.12)

Con los resultados enunciados, podemos mostrar que $\sigma(T)$ es no vacío. Supongamos lo contrario, es decir que existe $T \in \mathcal{L}(E)$ tal que

$$\sigma(T) = \emptyset \qquad R(T) = \mathbb{C} \qquad \begin{aligned} g: R(T) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ \lambda &\longmapsto g(\lambda) = (T - \lambda Id)^{-1} \end{aligned}$$

P.D. g es holomorfa en $R(T)$.

- $\lim_{\lambda \to +\infty} \| g(\lambda) \|_E = 0$
- g es acotada

$g(\lambda)$ es continua ya que es composición de aplicaciones continuas

$$\begin{aligned} S: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ \lambda &\longmapsto T - \lambda Id \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Phi: Inv(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ A &\longmapsto A^{-1} \end{aligned}$$

S es continua — es continua

Con lo que $g(\lambda) = \Phi(S(\lambda))$

Mostremos que $\Phi: Inv(E) \to \mathcal{L}(E)$ es continua. Como $Inv(E)$ es un grupo con la composición, basta mostrar que Φ es continua con la identidad Id. P.D. Φ es continua en $Inv(E)$

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Inv(E)$ tal que $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ en $\mathcal{L}(E)$ P.D. $\lim_{n\to+\infty} A_n^{-1} = A^{-1}$

Como Φ es continua en Id, entonces para $(A_n A)^{-1}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n A^{-1} = Id \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} A A_n^{-1} = Id \iff \lim_{n\to+\infty} A_n^{-1} = A.$$

Una demostración más detallada está en la Exposición 9 de AEBH del 2022 A

Consideramos $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Inv(E)$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = Id. \qquad \text{P.D.} \lim_{n\to+\infty} T_n^{-1} = Id \quad \text{en } \mathcal{L}(E, \|\cdot\|_E)$$

Notemos que

$$\|T_n^{-1} - Id\| = \|T_n^{-1}(Id - T_n)\| \leq \|T_n^{-1}\| \, \|Id - T_n\|, \quad \text{luego } T_n^{-1} = (Id - (Id - T_n))^{-1}$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ $\|T_n - Id\| < 1$, con esto

$$(Id - (Id - T_n))^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (Id - T_n) \qquad \|T_n^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|Id - T_n\|^k = \frac{1}{1 - \|Id - T_n\|}$$

luego

$$\|T_n^{-1} - Id\| = \|T_n^{-1}(Id - T_n)\| \leq \|T_n^{-1}\| \, \|Id - T_n\| = \frac{\|Id - T_n\|}{1 - \|Id - T_n\|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

P.D. g es holomorfa en $R(T) = \mathbb{C}$. P.D. $\forall \lambda_0 \in R(T)$

$$g'(\lambda_0) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \quad \text{existe}$$

utilizando la identidad del resolvente, se tiene que

$$g(\lambda) - g(\lambda_0) = R_T(\lambda) - R_T(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0) R_T(\lambda) R_T(\lambda_0)$$
$$= (\lambda - \lambda_0) g(\lambda) g(\lambda_0)$$

Luego, se tiene que

$$\frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda - \lambda_0} g(\lambda) g(\lambda_0)$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} g(\lambda) g(\lambda_0) = g^2(\lambda)$$

P.D. $g(\lambda)$ es acotado.

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \| g(\lambda) \| = 0$$

luego $\| g(\lambda) \| = \| (T - \lambda Id)^{-1} \|$

Así, si $|\lambda| > \|T\|$, entonces

$$T - \lambda Id = -\lambda \left(-\frac{T}{\lambda} + Id \right) = -\lambda (Id - T/\lambda)$$

Luego, se sigue que

$$\| (T - \lambda Id)^{-1} \| = \frac{1}{\lambda} \left(Id - T/\lambda \right)^{-1} \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \frac{T}{\lambda} \right\|^n = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{\left(1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$$

g es continua, por tanto existe $M > 0$ tal que

$$| g(\lambda) | \leq M \qquad \forall \lambda \in B(0, \|T\|)$$

luego

$$| g(\lambda) | = \max \left\{ \hat{K}, \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \right\} \qquad \text{con } \hat{K} = \sup_{\lambda \in B(0, \|T\|)} \{ M : |g(\lambda)| \leq M \}$$

Por lo tanto, g es acotada y además $\lim_{\lambda \to +\infty} |g(\lambda)| = 0$.

Utilizando el teorema de Liouville, tenemos que al ser g holomorfa y acotada, g tiene que ser acotada, como $\lim_{\lambda \to +\infty} g(\lambda) = 0$, entonces $g(\lambda) = 0$, lo cual es absurdo.

Definición 3.15 - Radio espectral.
Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, donde E es un espacio de Banach. Definamos el radio espectral

$$\rho(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Teorema 3.19 ver Brezis

Ejercicio 6.23

radio espectral

Kreyszig teo 7.5-5 demostración

Observación $\sigma(T) \subseteq \bar{D}(0, \sigma(T)) \subseteq \bar{D}(0, \|T\|)$.

Teorema 3.19 - Radio espectral.
Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, entonces

$$\rho(T) = \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{1/n}$$

Demostración
Notemos que si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces

$$|\lambda|^n \leq \|T^n\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

$$\rho(T) \leq \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Jueves, 9 de febrero de 2023.

Ejercicio 1. Consideremos $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $(E, \|\cdot\|_\infty)$, definamos $A \in \mathcal{L}(E)$

$$Af(x) = \int_0^1 (3x + y/2) f(y)\, dy$$

a) Encontrar $\|A\|$

b) Encontrar $\sigma(A)$ $\qquad\qquad \sigma(A) = \{V_p\} \cup \sigma_{ess}$

c) Encontrar el operador resolvente

d) Resolver la ecuación $Af(x) - f(x) = g(x)$. $\qquad g(x) = 2x^2$

a) Notemos que $Af(x)$ es continua pues es un polinomio de grado 1.

$$Af(x) = 3x\int_0^1 f(y)dy + \int_0^1 \frac{y}{2} f(y) dy$$

Otra forma de verlo es

$$Af(x) = 3x\, J_1(f) + J_2(f)$$

con

$$J_1 : E \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad J_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto J_1(f) = \int_0^1 f(y)dy \qquad\qquad f \longmapsto J_2(f) = \int_0^1 \frac{y}{2} f(y) dy$$

Como A es de rango finito, ie. $\dim(\mathrm{Img}(A)) < +\infty$, entonces A es compacto. Y como A es compacto, entonces $\sigma(A) = \sigma_P(A)$

$\|A\|_\infty = ?$

$$\|Af\| = \left\| \int_0^1 (3x + y/2) f(y)\, dy \right\|$$

$$\leq 3 \max_{x\in[0,1]} |x|\, \|f\|_\infty + \left| \int_0^1 y/2\, f(y)\, dy \right|$$

$$\leq 3\|f\|_\infty + \int_0^1 |y/2|\, |f(y)|\, dy$$

$$\leq 3\|f\|_\infty + \frac{1}{2}\int_0^1 y\, \|f\|_\infty\, dy$$

$$\leq 3\|f\|_\infty + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\|f\|_\infty = \|f\|_\infty \cdot \left(3 + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{13}{4}\right)$$

Luego $\|A\| = \left(\frac{13}{4}\right)$.

b) $\sigma(A) = \sigma_P(A) \cup \{0\}$. Vamos a encontrar todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que existe $f_\lambda \in \mathrm{Img}(A)$ tal que $f_\lambda \neq 0$.

$$Af_\lambda(x) = \int_0^1 (3x + y/2) f_\lambda(y) dy = \lambda f_\lambda(x). \qquad f_\lambda(x) = ax + b.$$

$$3x\, J_1(f_\lambda) + J_2(f_\lambda) = \lambda f_\lambda \qquad (1)$$

[A] ↓

Integrando [1], se tiene que

$$\int_0^1 \left(3x\, J_1(f_\lambda) + J_2(f_\lambda)\right) dx = \frac{3}{2} J_1(f_\lambda) + J_2(f_\lambda) = \lambda J_1(f_\lambda)$$

$$\Rightarrow J_1(f_\lambda)\left(\frac{3}{2} - \lambda\right) + J_2(f_\lambda) = 0.$$

Nuevamente, integrando [1]

$$\int_0^1 \frac{x}{2}\left(3x\, J_1(f_\lambda) + J_2(f_\lambda)\right) dx = \lambda J_2(f_\lambda)$$

$$\int_0^1 \frac{3}{2} x^2 J_1(f_\lambda) dx + \int_0^1 \frac{x}{2} J_2(f_\lambda)\, dx = \lambda J_2(f_\lambda)$$

$$\frac{3}{2} J_1(f_\lambda) \int_0^1 x^2 dx + J_2(f_\lambda)\int_0^1 \frac{x}{2}\, dx = \lambda J_2(f_\lambda)$$

$$\frac{1}{2} J_1(f_\lambda) + \frac{1}{4} J_2(f_\lambda) = \lambda J_2(f_\lambda)$$

[A]

Con esto, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1(f_\lambda) \\ J_2(f_\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right) - \left(\frac{1}{2}\right)(1) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \lambda\left(\frac{6}{4}\right) - \lambda\left(\frac{1}{4}\right) + \lambda^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{7}{4}\lambda + \lambda^2 - \frac{4}{8}$$

$$= \lambda^2 - \frac{7}{4}\lambda - \frac{1}{8}$$

Resolviendo:

$$\lambda = \frac{+\frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - 4(1)\left(-\frac{1}{8}\right)}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{\frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{8}{16}}}{2}$$

$$\frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{\frac{57}{16}}}{2}$$

$$= \frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{57}{64}}$$

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

$$\lambda_1 = \frac{7}{8} + \frac{\sqrt{57}}{8} \qquad \lambda_2 = \frac{7}{8} - \frac{\sqrt{57}}{8}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\lambda_1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1(f_\lambda) \\ J_2(f_\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$J_1(f_\lambda) = ?$

$J_2(f_\lambda) = ?$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\left(\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{57}}{8}\right) & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}-\left(\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{57}}{8}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1(f_\lambda) \\ J_2(f_\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8}(5-\sqrt{57}) & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8}(5+\sqrt{57}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1(f_\lambda) \\ J_2(f_\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo anterior,

$$f_{\lambda_1} = x\frac{J_1(f_{\lambda_1})}{\lambda_1} + \frac{J_2(f_{\lambda_1})}{\lambda_1} \qquad f_{\lambda_2} = x\frac{J_1(f_{\lambda_2})}{\lambda_2} + \frac{J_2(f_{\lambda_2})}{\lambda_2}$$

Ahora, notemos que

$R(A) = \{\{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2\}\}^c$. Por lo tanto,

$R_\beta(A) = (A-\beta Id)^{-1}$

$(A-\beta Id)\,u = g(x)$; Repitiendo el proceso anterior [A], se obtiene que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\beta & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}-\beta \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} J_1(u) \\ J_2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(g) \\ J_2(g) \end{pmatrix}$$

Luego, como la matriz es invertible, entonces

$$\begin{pmatrix} J_1(u) \\ J_2(u) \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\left(\frac{1}{4}-\beta\right)-\frac{1}{2}}}_{1/P(B)} \begin{pmatrix} 1/4-\beta & -1 \\ -1/2 & 3/2-\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1(g) \\ J_2(g) \end{pmatrix}$$

$(e^{x+y}) = (e^x)^y$

$3x\,J_1(u) + J_2(u) - \beta u = g$.

$$\Rightarrow u = \left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(g - 3x\,J_1(u) - J_2(u)\right)$$

$A(x)$

$= \int_0^1 e^{xy} f(y)\,dy$

resolver:

análogamente

$\int_0^1 e^{x+y} f(y)\,dy$

$$\underbrace{u = -\frac{1}{\beta}\left(g - \frac{3x}{P(B)}\left(\left(\frac{1}{4}-\beta\right)J_1(g) - J_2(g)\right)\right) - \frac{1}{P(B)}\left(-\frac{1}{2}J_1(g) + \left(\frac{3}{2}-\beta\right)J_2(g)\right)}$$

$(A-BI)^{-1} : E \longrightarrow E$

$u \longmapsto (A-BI)^{-1} =$

$(A - Id)f = 2x^2$ $\qquad g(x) = 2x^2$ $\qquad \beta = 1$

Ejercicio 2. Considere el operador $A \in \mathcal{L}(E)$, con $E = (C([0,1]), \mathbb{R})$ y $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_\infty$, definido por

$$Af(x) = \int_0^1 e^{xy} f(y)\,dy$$

a) Encontrar $\|A\|$
b) Encontrar $\sigma(A)$
c) Encontrar el operador resolvente
~~d) Resolver la ecuación.~~

literal a)

Notemos que

$$\|Af(x)\| = \left|\int_0^1 e^{xy} f(y)\,dy\right| \le \int_0^1 |e^{xy} f(y)|\,dy \le \|f\|_\infty \int_0^1 |e^{xy}|\,dy = \|f\|_\infty \int_0^1 |e^x|\,|e^y|$$

$$\le \|f\|_\infty |e^x| (e-1) = C\,\|f\|_\infty \quad \text{con} \quad C = e(e^{-1}+1) = e(1-e^{-1})$$

luego, si $f=1$, entonces

$$|Af(x)| = \int_0^1 e^{x+y}\,dy = e^x \int_0^1 e^{-y}\,dy = e^x(e^{-1}+1) \Rightarrow \|Af\| = \cancel{e(e-1)} = e(1-e^{-1})$$

Así, se sigue que

$$\|A\| = e\cancel{(e-1)} = e(1-e^{-1})$$

literal b) Notemos que la imagen del operador es de dimensión finita igual a 1, por lo tanto

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}.$$

Así, vamos a encontrar todos los valores propios.

$$Af_\lambda(x) = \int_0^1 e^{x-y} f(y)\,dy = \lambda f_\lambda \qquad f_\lambda(x) = ax+b$$

$$= \int_0^1 e^x e^{-y} f(y)\,dy = e^x \int_0^1 e^{-y} f(y)\,dy .$$

luego definiendo

$$\frac{e^{2x}}{2}$$

$$J_1 : (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto J_1(x) = \int_0^1 e^{-y} f(y)\,dy.$$

Por lo tanto,

$$Af_\lambda(x) = e^x J_1(f) = \lambda f_\lambda(x).$$

Así, se tiene que

$$e^{-y} e^x J_1(f) = e^{-y}\lambda f_\lambda(x) = \lambda J_1(f_\lambda)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{x} e^x J_1(f_\lambda) = \lambda J_1(f_\lambda)$$

$$\int_0^1 e^{2x} J_1(f_\lambda) = \lambda J_1(f_\lambda)$$

$$\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) J_1(f_\lambda) = \lambda J_1(f_\lambda)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}} \qquad \sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda\}$$

Viernes, 10 de febrero de 2023.

Ejercicio. Considere $H = L^2([0,1])$, $T \in \mathcal{L}(H)$ y (Ejer 25 - pág 190 [4].)

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t)\,dt \quad \text{con} \quad K(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & \text{si } 0 \le x \le t \le 1 \\ t(1-x) & \text{si } 0 \le t \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Muestre que $Img(T) \subseteq \mathcal{C}([0,1])$

b) $\sigma(T)$ y los valores propios de T

c) $\|T\|$.

d) Demuestre que

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)\cdot \operatorname{sen}(n\pi t)}{n^2} = K(x,t) = \min(x,t) - xt$$

literal a)

Como $T \in \mathcal{L}(H)$, $\|Tf\|_{L^2} \le C\|f\|_{L^2}$

$$\|Tf\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |Tf(x)|\,dx = \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,t) f(t)\,dt \right|^2 dx$$

$$\left| \int_0^1 K(x,t) f(t)\,dt \right| \le \int_0^1 |K(x,t) f(t)\,dt| \le \left(\int_0^1 |K(x,t)|^2\,dt \right)^{1/2} \|f\|_{L^2}$$

$$\le \left(\int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} |K(x,t)|^2\,dt \right)^{1/2} \|f\|_{L^2}$$

$$= \sup_{t\in[0,1]} |K(x,t)| \; \|f\|_{L^2}$$

Por lo tanto

$$\|Tf\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}^2 \int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} |K(x,t)|^2\,dx \le \|f\|_{L^2}^2 \, \|K\|^2_{L^2\times L^2} \le \|f\|^2_{L^2}$$

$$\therefore \|Tf\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$$

P.D. $Img(T) \subseteq \mathcal{C}([0,1])$

$$|Tf(x_1) - Tf(x_2)| = \left| \int_0^1 K(x_1,t) f(t)\,dt - \int_0^1 K(x_2,t) f(t)\,dt \right|$$

Notemos que $$A:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(x,t)\longrightarrow\begin{cases}x(1-t) & 0\le x\le t\le 1\\ t(1-x) & 0\le t\le x\le 1\end{cases}$$

$K(x,t)=\min(x,t)-xt$, donde

$K(x,t)$ es una función continua ya que es la suma de dos funciones continuas.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,1]$, tal que $x_n\to x$, luego
$$Tf(x_n)=\int_0^1 K(x_n,t)f(t)\,dt.$$
Así, como
$$\int_0^1|K(x,t)f(t)|\,dx\le\int_0^1|f(t)|\,dx=|f(t)|$$
Usando el teorema de convergencia dominada se sigue el resultado.

literal b)

$f_\lambda(0)=0$
$f_\lambda(1)=1$

Si $\lambda\in\sigma_p(T)$, entonces existe $f_\lambda\in H$ tal que
$$T(f_\lambda)=\lambda f_\lambda$$
$\leftarrow$ Puesto que los valores propios satisfacen esta propiedad entonces $\lambda f_\lambda\in\mathrm{Img}(T)$

luego
$$Tf_\lambda(x)=\int_0^1K(x,t)f(t)\,dt=\int_0^xK(x,t)f(t)\,dt+\int_x^tK(x,t)f(t)\,dt$$
$$=(1-x)\int_0^x tf_\lambda(t)\,dt+x\int_x^1(1-t)f_\lambda(t)\,dt=\lambda f_\lambda(x)\in C([0,1])$$
Como $f_\lambda\in\mathrm{Img}(T)$ y utilizando el primer teorema fundamental del cálculo.
$$\lambda f_\lambda'(x)=-\int_0^x tf_\lambda(t)\,dt+\cancel{(1-x)xf_\lambda(x)}+\int_x^1(1-t)f_\lambda(t)\,dt-\cancel{x(1-x)f_\lambda(x)}$$
$$=-\int_0^x tf_\lambda(t)\,dt+\int_x^1(1-t)f_\lambda(t)\,dt$$
$$\lambda f_\lambda''(x)=-xf_\lambda(x)-(1-x)f_\lambda(x)=-xf_\lambda(x)-f_\lambda(x)+xf_\lambda(x)=-f_\lambda(x)$$
Con esto, se tiene la siguiente EDO $f_\lambda''(x)+\frac{f_\lambda}{\lambda}(x)=0$. luego el polinomio asociado es
$$p^2+\frac{1}{\lambda}=0\quad\Rightarrow\quad p^2=-\frac{1}{\lambda}$$
Tenemos los siguientes casos:

- $\lambda>0$ $\quad m=\pm i\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$

$$y(x)=C_1\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)+C_2\cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$
$$y(0)=C_2=0$$
$$y(1)=C_1\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)=0$$
$$C_1\neq0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\pi k\text{ con }k\in\mathbb{Z}^+$$
$$\lambda=\frac{1}{(\pi k)^2}\text{ con }k\in\mathbb{Z}^+$$

- si $\lambda<0$

$$y(x)=C_1e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x}+C_2e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x}$$
$$y(0)=C_1+C_2=0$$
$$y(1)=C_1e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}+C_2e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$$
$$=-C_2e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}+C_2e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}=C_2\left(e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}-e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}\right)=0$$
$$\Rightarrow C_2=0.$$
$$\therefore y(x)=0$$

Así, $\sigma_p(T)=\left\{\left(\frac{1}{\pi n}\right)^n:n\in\mathbb{N}\right\}$

$$p(T) - p(\alpha Id) \quad \text{no es invertible}$$

$$p(T) - p(\alpha) = p(T) - \lambda Id$$

Así $\lambda \in \sigma(p(T))$.

Recíprocamente, si $\lambda \in \sigma(p(T))$. P.D. Existe $\alpha \in \sigma(T)$ tal que $\lambda = p(\alpha)$. Consideremos el polinomio $p(x) - \lambda$, notemos que es de grado n y por lo tanto existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$p(x) - \lambda = \beta(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

con $\beta \neq 0$. Así, se sigue que

$$p(T) - \lambda Id = \beta(T-\alpha_1 Id)(T-\alpha_2 Id)\cdots(T-\alpha_n Id)$$

Así, como $p(T) - \lambda Id$ no es invertible entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$T - \alpha_j Id \quad \text{no es invertible},$$

por lo tanto, $\alpha_j \in \sigma(T)$ y así $\lambda = p(\alpha_j)$, con lo que se sigue el resultado.

Martes, 14 de febrero de 2023

Control 1 - Bimestre 2.

Pregunta 2: Corrección

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios de Banach. y $T \in \mathcal{L}(E,F)$

$Img(T)$ es cerrada si y solo si $dist(x, Ker(T)) \leq c\|x\|$

$\Rightarrow$ Definamos

$$\begin{aligned} \hat{T} : E/Ker(T) &\to Img(T) \\ [x] &\to \hat{T}[x] = T(x) \end{aligned}$$

Así, por isomorfismos de Banach, se sigue que

$$\|[x]\| = dist(x, Ker(T)) \leq c\|\hat{T}[x]\| = c\|T(x)\| \leq c\|x\|.$$

Capítulo 4: Operadores Compactos en Espacios de Hilbert.

Consideramos E y F dos espacios de Banach.

Definición 4.1. Sea T una aplicación lineal de E en F. Decimos que T es compacto si $T(\overline{B}_E)$ es relativamente compacta en $(F, \|\cdot\|_F)$, i.e.,

$$\overline{T(\overline{B}_E)}^{\|\cdot\|_F} \quad \text{es compacta}$$

en $(F, \|\cdot\|_F)$.

Observación: El conjunto de los operadores compactos de E en F se lo notará $K(E,F)$ y más aún $K(E,F) \subseteq \mathcal{L}(E,F)$.

En efecto, si $T \in K(E,F)$, por lo tanto $\overline{T(\overline{B}_E)}$ es compacto, más aún es acotado y así

$$\|Tx\| \leq c \qquad \forall x \in \overline{B}_E$$

Así, $T \in \mathcal{L}(E,F)$

Proposición 4.2. Sea T una aplicación lineal de E en F. Las siguientes afirmaciones son equivalencias

a) T es compacto
b) Para todo $A \subseteq E$, $T(\overline{A})$ es relativamente compacto en $(F, \|\cdot\|_F)$
c) Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada, se tiene que $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente
d) Para toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite un valor adherente en $(F, \|\cdot\|_F)$.

Por lo tanto

$$f_\lambda(x) = c_i \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \qquad \|T\| = \rho(T) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2$$

Ejercicio 2. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, entonces ① $\sigma(T) = \overline{\sigma(T^*)}$. conjugado Si $T \in \mathcal{L}(E)$ y p un polinomio, entonces

② $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$

$p(x) = x^2 + 3x + 1$

$P(T) = T^2 + 3T + Id$

$\sigma(P(T)) = p(\sigma(T)) = \{\beta = \lambda^2 + 3\lambda + 1 : \lambda \in \sigma(T)\}$

③ Si $S, T \in \mathcal{L}(E)$, $T \in Inv(E)$

$0 \notin \sigma(T) \qquad \sigma(T^{-1}) = \frac{1}{\sigma(T)} = (\sigma(T))^{-1}$

Demostración

literal 3)

P.D $\sigma(T^{-1}) = \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Para probar la igualdad vamos a probar ambas contenencias

$(\subseteq)$

Sea $\lambda \in \sigma(T^{-1})$; así, como T es invertible, entonces $\lambda \neq 0$. Ahora, como

$$\sigma(T^{-1}) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T^{-1} - \lambda Id) \text{ no es invertible}\}$$

entonces $T^{-1} - \lambda Id$ no es invertible por hipótesis. Más aún, como

$$T^{-1} - \lambda Id = \lambda T^{-1}\left(\frac{1}{\lambda} Id - T\right)^{-1}$$

entonces el operador

$$\left(\frac{1}{\lambda} Id - T\right)$$

no es invertible, i.e $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T)$. Con esto, se sigue que

$$\sigma(T^{-1}) \subseteq \sigma(T).$$

Recíprocamente, probemos que $\sigma(T) \subseteq \sigma(T^{-1})$. Sea $\lambda \in \sigma(T)$, cualquiera, por lo tanto, el operador

$$T - \lambda Id$$

no es invertible, luego

$$T - \lambda Id = \lambda T\left(\frac{1}{\lambda} Id - T^{-1}\right)$$

así, el operador

$$\left(\frac{1}{\lambda} Id - T^{-1}\right)$$

no es invertible y así, $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$. Por lo tanto

$$(\sigma(T))^{-1} = \sigma(T^{-1})$$

literal 2) Mostremos que $p(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$.

Sea $\lambda \in p(\sigma(T))$; así, existe $\alpha \in \sigma(T)$ tal que $\lambda = p(\alpha)$. Luego, consideremos el polinomio $p(x) - p(\alpha)$. Notemos que α es una raíz del polinomio y así existe un polinomio de grado menor, digamos q, tal que

$$p(x) - p(\alpha) = (x - \alpha) q(x)$$

De esta manera, se sigue que

$$p(T) - p(\alpha Id) = (T - \alpha Id) q(T).$$

Así, como $\alpha \in \sigma(T)$, entonces $T - \alpha Id$ no es invertible y por lo tanto

Demostración

a) $\Rightarrow$ b)

Como A es acotado, entonces existe $M>0$ tal que
$$\bar{A} \subseteq \bar{B}(0,M),$$
luego
$$T(\bar{A}) \subseteq T(\bar{B}(0,M)) = M\,T(\bar{B}(0,1)) \Rightarrow \overline{T(\bar{A})} \subseteq M\,\overline{T(\bar{B}_E)}$$

Completar las implicaciones restantes usando las propiedades de espacios métricos.

¡!

Luego, $M\,\overline{T(\bar{B}_E)}$ es compacto ya que toda homotecia es continua y la imagen de un compacto a partir de una función continua es compacto.

Por lo tanto, $T(\bar{A})$ es relativamente compacta en $(F, \|\cdot\|_F)$.

Proposición 4.3. Se tiene que $K(E,F)$ es un s.e.v. cerrado de $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$.

Demostración

Basta mostrar que si $T_1, T_2 \in K(E,F)$, entonces $T_1+T_2 \in K(E,F)$, i.e. $(T_1+T_2)(\bar{B}_E)$ es relativamente compacto. Consideremos
$$A = \overline{T_1(\bar{B}_E)} \quad \text{y} \quad B = \overline{T_2(\bar{B}_E)} \quad \text{luego} \quad A\times B \text{ es compacto en } F\times F$$

Definamos
$$\begin{aligned} \oplus : F\times F &\longrightarrow F \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned}$$

Entonces $\oplus(A\times B)$ es compacta en F, luego
$$(T_1+T_2)(\bar{B}_E) \subseteq \oplus(A\times B)$$
$$\Rightarrow \overline{(T_1+T_2)(\bar{B}_E)} \subseteq \oplus(A\times B)$$

Por lo tanto, $T_1+T_2 \in K(E,F)$.

Ahora, resta probar que $K(E,F)$ es cerrado. Así, sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K(E,F)$ tal que $T_n \to T$ en $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$. Mostremos que $T\in K(E,F)$. Notemos $A = \overline{T(\bar{B}_E)}$, así queremos probar que A es compacto. Para la demostración del resultado, haremos uso de la Proposición 0.30.

Así, como $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(E,F)$, entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que
$$\|T_{n_0} - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon$$
tomando $K_\varepsilon = \overline{T_{n_0}(\bar{B}_E)}$. Mostremos que
$$\forall x \in \bar{B}_E \qquad \inf_{y\in K_\varepsilon} \|Tx - y\| < \varepsilon$$

En efecto,
$$\inf_{y\in K_\varepsilon} \|Tx-y\| \leq \|Tx - T_{n_0}(x)\| \leq \|T - T_{n_0}(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon, \qquad \forall x\in \bar{B}_E$$

así, se sigue el resultado deseado.

Proposición 4.4. Sean E, F, G espacios de Banach, entonces

- Si $T\in\mathcal{L}(E,F)$ y $S\in K(F,G)$ entonces $ST\in K(E,G)$
- Si $T\in K(E,F)$ y $S\in\mathcal{L}(F,G)$ entonces $ST\in K(E,G)$

En particular, si $E=F=G$ se tiene que $K(E)$ es un ideal de la álgebra de Banach $\mathcal{L}(E$

Recordemos que $(A, \|\cdot\|_A)$ es un espacio de Banach es dicho una álgebra de Banach si existe una operación

$$\odot : A \times A \longrightarrow A$$
$$(a,b) \longmapsto a \odot b$$

tal que verifique que A es un álgebra y $\|a \odot b\|_A \leq \|a\|_A \|b\|_A$

Demostración [Proposición 4.4]

Supongamos que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y $S \in K(E,F)$.
P.D. $ST(\overline{B_E})$ es relativamente compacta en $(G, \|\cdot\|_G)$
Notemos que

$$T(\overline{B_E}) \subseteq \overline{T(\overline{B_E})}$$

$$\Rightarrow ST(\overline{B_E}) \subseteq S\overline{T(\overline{B_E})} \subset \overline{ST(\overline{B_E})} \quad \text{compacto}$$

Así, ST es compacto

La segunda proposición se concluye directamente pues la imagen de un compacto mediante una función continua es compacto.

Proposición 4.5. Sea $T \in K(E,F)$, entonces T envía convergencias débiles en convergencias fuertes, es decir, se tiene que

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad T(x_n) \longrightarrow T(x)$$

Demostración

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x_n \rightharpoonup 0$. P.D. $T(x_n) \longrightarrow 0$. Por absurdo, supongamos que esto no es cierto. Por lo tanto,

$$(\exists \hat{\varepsilon} > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k_n > n)(\|T(x_{k_n})\| > \hat{\varepsilon})$$

Luego, consideremos el siguiente proceso

- Para $n=1$, existe $k_1 > 1$ $\quad \|T(x_{k_1})\| > \hat{\varepsilon}$
- Para $n = k_1$, existe $k_2 > k_1$ $\quad \|T(x_{k_2})\| > \hat{\varepsilon}$

Así, podemos construir una sucesión $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|Tx_{k_n}\|_F > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces $(Tx_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente fuertemente que notaremos de igual manera $(Tx_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ahora, como $(Tx_{k_n})_n$ converge débilmente a 0_F, por unicidad del límite $(Tx_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente al 0_F lo cual no es cierto. Con lo que se sigue el resultado

Observación: Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ envía convergencias débiles en fuertes, no implica que T sea compacto. En efecto, consideremos

$$Id : (\ell^1, \sigma(\ell^1, \ell^\infty)) \longrightarrow (\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1}) \qquad \text{no es continua}$$

$$x_n \longrightarrow x \iff x_n \longrightarrow x \quad \text{en } \sigma(\ell^1, \ell^\infty)$$

Pero se tiene que Id_E es compacto si y solo si $\dim(E) < +\infty$. (Lema de Riez)
Más aún, si definimos la inversa

$$Id^{-1} : (\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1}) \longrightarrow (\ell^1, \sigma(\ell^1, \ell^\infty))$$

se tiene que esta es continua, y ambas (Id, Id^{-1}) son secuencialmente continuas.

Otro contraejemplo que podemos obtener de la observación anterior es el siguiente

Si $X \neq \emptyset$ y sobre este definimos τ_1 y τ_2 dos topologías tales que las convergencias son equivalentes, i.e.

$$x_n \longrightarrow x \text{ en } \tau_1 \text{ si y solo si } x_n \longrightarrow x \text{ en } \tau_2$$

Esto no implica que $\tau_1 \approx \tau_2$.

Observación: Si E es un espacio de Banach reflexivo entonces la recíproca de la proposición [4.5] es verdad.

En efecto, si consideramos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en E. P.D. $(T(x_n))$ admite una subsucesión que converge fuertemente.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y E es reflexivo, entonces existe $(x_{n_k})_k$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente, i.e., existe $x\in E$ tal que $x_{n_k}\longrightarrow x$. Por hipótesis, $T(x_n)\longrightarrow T(x)$ fuertemente.

Por lo tanto, $(T(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge fuertemente.

Consideremos $\lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$ y $p\in\,]1,+\infty[$

$$\begin{aligned} T_\lambda: \ell^p &\longrightarrow \ell^p \\ x &\longmapsto T_\lambda(x)=(x_n\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Entonces T_λ es compacto si y solo si $\lambda_n\to 0$.

$\Rightarrow$ Si suponemos que T_λ es compacto, entonces como $e_n\rightharpoonup 0$,

$$\|T_\lambda e_n\|\longrightarrow 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_n\longrightarrow 0.$$

$\Leftarrow$ Como ℓ^p es reflexivo, entonces si $x_n\rightharpoonup 0$ y mostramos que $T_\lambda x_n\rightarrow$ entonces $T_\lambda\in K(\ell^p)$.

$$\|T_\lambda x^n\|_{\ell^p}^p=\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k\lambda_k|^p=\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k x_k^n|^p+\sum_{k=N+1}^{+\infty}|\lambda_k x_k^n|^p \qquad [\Delta]$$

Ahora, para $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{K}$ una sucesión, podemos construir otra sucesión $(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$\tilde{\alpha}_1=\alpha_1\qquad \tilde{\alpha}_2:=\sup\{\alpha_n: n>1\},\qquad \tilde{\alpha}_3=\sup\{\alpha_n:n>2\},\ \ldots$$

$$\lim_{n\to+\infty}\tilde{\alpha}_n=\limsup\alpha_n$$

Revisar el resultado y las cotas.

Con esto, consideremos el siguiente análisis

$$\sum_{k=N+1}^{M}|\lambda_k x_k^n|^p\le|\tilde{\lambda}_N|^p\sum_{k=N+1}^{M}|x_k^n|^p\le|\tilde{\lambda}_N|^p\|x^n\|^p\le C|\tilde{\lambda}_n|^p$$

luego en lo anterior $[\Delta]$

$$\|T_\lambda x^n\|_{\ell^p}^p\le\sum_{k=1}^{m}|\lambda_k x_k^n|^p+C|\tilde{\lambda}_n|^p$$

Viernes, 24 de febrero de 2023.

(Continuando el ejercicio)

Supongamos que $\lambda_n\to 0$. P.D. $T_\lambda\in K(\ell^p)$

Definamos

$$\begin{aligned} T_N:\ell^p&\to\ell^p\\ x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}&\mapsto(x_1\lambda_1,\ldots,x_n\lambda_n,0,\ldots)\end{aligned}$$

P.D. $\|T_N-T_\lambda\|\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$. Notemos que $T_N\in K(\ell^p)$ ya que $\dim(\mathrm{Img}(T_N))<+\infty$.

Sea $x\in\overline{B}_{\ell^p}$, se sigue que

$$\|(T_N-T_\lambda)x\|_{\ell^p}^p=\sum_{n=N+1}^{+\infty}|\lambda_n x_n|^p\le|\tilde{\lambda}_N|^p\sum_{n=N+1}^{+\infty}|x_n|^p\le|\tilde{\lambda}_N|^p$$

De esta manera, se sigue que

$$\|(T_N-T_\lambda)(x)\|_{\ell^p}^p\le|\tilde{\lambda}_N|^p\xrightarrow[N\to+\infty]{}0.$$

Por lo tanto, $T_\lambda\in K(\ell^p)$ pues es el límite de una sucesión de operadores compactos.

Definición 4.6. Sea $T\in\mathcal{L}(E,F)$. Decimos que T es de rango finito si $\dim(\mathrm{Img}(T))<+\infty$.

Observación $\mathcal{R}(E,F)=\{T\in\mathcal{L}(E,F):\dim(\mathrm{Img}(T))<+\infty\}$ es un s.e.v. de $\mathcal{L}(E,F)$

Con esto, se tiene que

$$R(E,F) \subseteq K(E,F) \Rightarrow \overline{R(E,F)} \subseteq K(E,F)$$

En general, no se tiene que $K(E,F) \subseteq \overline{R(E,F)}$

Ahora, busquemos condiciones para que se cumpla la igualdad.

¿Si $(E, \|\cdot\|_E)$ admite una base de Schauder, entonces $K(E,F) \subseteq \overline{R(E,F)}$?

Supongamos $T \in K(E,F)$ y $x \in \overline{B}_E$, entonces

$T_N = T P_N \in K(E,F)$ P.D $T_N \to T$

$$P_N = \sum_{n=1}^{N} e_n^*(\cdot) e_n$$

Notemos que

$$\|(T_N - T)x\| = \|(T P_N - T)x\| = \|T(P_N - Id)x\|$$

$\leq \|T\| \, \|P_N - Id\|$ ← Esto no converge a cero pues si lo hiciera la Id fuera un operador compacto.

$\leq \|T\| \, \|(P_N - Id)(x)\|$ ← Esto sí converge al cero pero puntualmente

¿Otro camino?

Proposición 4.7. Sean $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1})$ y $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2})$ dos espacios de Hilbert. Sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $T \in \overline{R(H_1, H_2)}$

b) $T \in K(H_1, H_2)$

c) $T(\overline{B}_{H_1})$ es compacto

d) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \to Tx$ en $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2})$

e) Todo sistema ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H_1 verifica que

$$\lim_{n\to+\infty} \|Te_n\|_{H_2} = 0.$$

Demostración

a) ⇒ b) Evidente

b) ⇒ c) Supongamos que $T \in K(H_1, H_2)$. P.D. $T(\overline{B}_{H_1})$ es compacto en $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2})$

Bastaría mostrar que $T(\overline{B}_{H_1})$ es cerrado. Sea $y_n = T(x_n)$ con $x_n \in B_{H_1}$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado en H_1 y este es reflexivo entonces existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x_{n_k} \rightharpoonup x$$

Como $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, entonces $Tx_{n_k} \rightharpoonup Tx$, luego por unicidad del límite $y_{n_k} \to Tx$

$$Tx = y.$$

c) ⇒ d) Notemos que lo anterior nos da que c) ⇔ d), luego por la proposición [4.5] se sigue el resultado.

d) ⇒ e) Consideremos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal, entonces se tiene por la desigualdad de Bessel

$$\forall x \in H_1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$ ← Por lo tanto, la serie es convergente.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |\langle x, e_n\rangle| = 0 \iff e_n \rightharpoonup 0$$

$$\therefore Te_n \to 0 \quad (H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2})$$

(Por hipótesis)

e) ⇒ a) P.D $T \in \overline{R(H_1, H_2)}$

Por absurdo, supongamos que $T \notin \overline{R(H_1, H_2)}$. Vamos a construir un sistema ortonormal $(\tilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\|T\tilde{e}_n\| > \tilde{\varepsilon}$ para algún $\tilde{\varepsilon} > 0$.

Como $T \notin \overline{\mathcal{R}(H_1, H_2)}$, entonces existe $2\hat{\varepsilon} > 0$ tal que (Consideremos $H_1 = H_2$)

$$B(T, 2\hat{\varepsilon}) \cap \mathcal{R}(H_1, H_2) = \emptyset$$

Así, para $R \in \mathcal{R}(H_1, H_2)$, luego $\|T - R\| > \hat{\varepsilon}$. En particular $\|T - 0\| > \hat{\varepsilon}$, luego existe $e_0 \in H_1$ tal que

$$\|T\| = \|Te_0\| \qquad \text{con} \quad \|e_0\| = 1$$

Consideremos $P_0 = \langle \cdot, e_0 \rangle e_0 \in \mathcal{R}(H_1)$. Luego existe $e_1 \in H_1$ tal que

$$\|T - TP_0\| = \|(T - TP_0)e_1\| > \hat{\varepsilon} \qquad \|e_1\| = 1$$

Luego, definiendo $P_1 = \langle \cdot, e_0 \rangle e_0 + \langle 0, e_1 \rangle e_1$, entonces existe $e_2 \in H_1$, con $\|e_2\| = 1$ tal que

$$\|T - TP_1\| = \|(T - TP_1)e_2\| > \hat{\varepsilon}$$

Así podemos construir una sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\|T - TP_{n-1}\| = \|(T - TP_{n-1})e_n\| > \hat{\varepsilon}$$

Ahora, como $Id - P_n$ es una proyección ortogonal, tenemos que $\|Id - P_n\| \leq 1$. Luego

$$\hat{\varepsilon}\,\|(Id - P_{n-1})e_n\| \leq \hat{\varepsilon} < \|T(Id - P_{n-1})e_n\|$$

Consideremos $\tilde{e} = \dfrac{(Id - P_{n-1})e_n}{\|Id - P_{n-1}\|}$. P.D. $\tilde{e}_n$ es un sistema ortonormal tal que

$$\|T\tilde{e}_n\| > \hat{\varepsilon} \qquad \text{con} \quad \|\tilde{e}_n\| = 1$$

Se puede argumentar para $H_1 \neq H_2$

P.D. $(\tilde{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia ortogonal.

Para $n \neq m$, sin pérdida de generalidad, consideremos $n < m$. Luego,

$$\tilde{e}_n \in Img(Id - P_{n-1})$$

$$e_m \in Img(Id - P_{m-1})$$

$H_1 = Img(P_{n-1}) \oplus$ [redacted]

$= Img(P_{n-1}) \oplus$ [redacted]

$$Img(Id - P_{n-1}) \subseteq Img(Id - P_{m-1})$$

$$x - P_{n-1}(x) = x - P_{n-1}(x) + \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n$$

$$\tilde{e}_n \in Img(Id - P_{m-1}) \qquad H_1 = Img(P_{n-1}) \oplus Img(P_{n-1})^{\perp}$$

$$H_1 = Img(P_{n-1}) \oplus \overline{Img(Id - P_{n-1})}$$

$$\tilde{e}_n \in Img(P_{m-1})^{\perp}$$

$$\tilde{e}_m \in Img(P_{m-1})$$

$$\langle \tilde{e}_n, \tilde{e}_m \rangle = 0.$$

Lunes, 27 de febrero de 2023

Teorema 4.8. - Schauder - Sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $T \in K(E)$
b) $T^* \in K(E')$

Para demostrar el teorema anterior, haremos uso del siguiente resultado

Teorema 4.9 - Ársela-Ascoli - Sea K un espacio métrico compacto y consideremos $C(K) = \{ f : K \to \mathbb{K} \text{ continuas} \}$ $(C(K), d_\infty(\cdot,\cdot))$ con

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)|$$

espacio métrico completo.

Sea $\mathcal{K} \subseteq C(K)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $\mathcal{K}$ es un conjunto compacto relativamente en $(C(K), d_\infty(\cdot,\cdot))$
b) $\mathcal{K}$ es equicontinuo y Para todo $x \in K$ $\{f(x) : f \in \mathcal{K}\}$ es relativamente compacto en $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

› Recordemos que $\hat{\mathcal{K}} \subseteq C(K)$ (K puede ser cualquier espacio métrico) es dicho equicontinuo si ~~$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)$ tal que $d(x,y)<\delta \Rightarrow d_\infty(f,g)<\varepsilon$~~ es equicontinuo para todo punto de K.

› Decimos que $\hat{\mathcal{K}} \subset C(K)$ es equicontinuo en $x_0 \in K$ si para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta(\varepsilon, x_0)>0$ tal que

$$(\forall f \in \hat{\mathcal{K}})(\forall y \in B(x_0,\delta)) \Rightarrow |f(x_0)-f(y)|<\varepsilon$$

Observación: Notemos que $\hat{\mathcal{K}} \subseteq C(K)$ es relativamente compacto si y solo si $\mathcal{K}$ es acotado y $\mathcal{K}$ es equicontinuo.

Demostración (Teorema 4.8)

(a⇒b) Sea $T \in K(E)$, cualquiera. P.D. $T^* \in K(E')$

Llamamos $K = \overline{T(\overline{B_E})}$, el cual es compacto por hipótesis. Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T^*(\overline{B_{E'}})$ mostremos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fuertemente.

Como para todo $n\in\mathbb{N}$ $v_n \in T^*(\overline{B_{E'}})$, entonces existe $w_n \in \overline{B_{E'}}$ tal que

$$v_n = T^*(w_n)$$

Así, definimos

$$\hat{\mathcal{K}} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n : K \to \mathbb{K} \\ x \longmapsto \varphi_n(x) = \langle w_n, x\rangle_{E'\times E} \end{array} \right\}$$

con $\hat{\mathcal{K}} \subseteq C(K)$. P.D. $\hat{\mathcal{K}}$ es relativamente compacto en $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$

P.D $\hat{\mathcal{K}}$ es acotado y $\hat{\mathcal{K}}$ es equicontinuo.

Notemos que

$$\|\varphi_n\| = \sup_{x\in K} |\varphi_n(x)| \Rightarrow |\varphi_n(x)| = |\langle w_n, x\rangle_{E'\times E}| \leq \underbrace{\|w_n\|_{E'}}_{\leq 1}\underbrace{\|x\|}_{<M} \leq M \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Pues K es compacto.

Por lo tanto, $\mathcal{K}$ es acotado.
P.D. $\mathcal{K}$ es equicontinuo. Sea $x_0 \in K$, cualquiera.

$$|\varphi_n(x_0)-\varphi_n(y)| = |\langle w_n, x_0-y\rangle| \leq \|w_n\|\,\|x_0-y\| = \|x_0-y\| = \varepsilon = \delta$$

Por lo tanto $\mathcal{K}$ es equicontinuo en $x_0 \in K$ y así $\mathcal{K}$ es equicontinuo.

Entonces, utilizando el teorema de Arcela-Ascoli tenemos que $\mathcal{K} = \{\varphi_n : n\in\mathbb{N}\}$ es relativamente compacto en $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$. Es decir existe una subsucesión $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $\varphi \in C(K)$ (Continua pero no necesariamente lineal) tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \|\varphi_{n_k}-\varphi\|_\infty = \lim_{k\to+\infty}\left(\sup_{x\in K} |\varphi_{n_k}(x)-\varphi(x)|\right) = 0$$

Luego

$$\sup_{x\in K} |\varphi_{n_k}(x)-\varphi(x)| = \sup_{\hat{x}\in B_E} |\langle w_{n_k}, T\hat{x}\rangle_{E'\times E} - \varphi(T\hat{x})|$$

$$= \sup_{\hat{x}\in B_E} |\langle T^* w_{n_k}, \hat{x}\rangle - \varphi(T\hat{x})|$$

$$= \sup_{\hat{x} \in B_E} |\langle v_{n_k}, \hat{x} \rangle - \varphi(T\hat{x})| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Fácilmente, se puede mostrar que $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(E', \|\cdot\|_{E'})$, por lo tanto, convergente.

b) ⇒ a)

Sea $T^* \in K(E')$. P.D. $T \in K(E)$.

Por lo anterior, sabemos que si $T^* \in K(E')$, entonces $T^{**} \in K(E'')$, más aún

$$J_E T = T^{**} J_E \quad \leftarrow \text{Ver clave } (30/01/2023)$$

$$\Rightarrow \quad T = J_E^{-1} (\underbrace{T^{**} J_E}_{\text{compacto}}) \leftarrow \text{Teorema 4.4}$$

Así, T es compacto.

Alternativa de Fredholm

Teorema 4.10. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y $K \in K(E)$. Se tiene los siguientes enunciados

a) $\dim(\ker(Id - K))$ es finita
b) $\mathrm{Img}(Id - K)$ es cerrada

$$\mathrm{Img}(Id - K)^{\perp} = \ker(Id - K^*)$$
$$\mathrm{Img}(Id - K) = {}^{\perp}\ker(Id - K^*)$$

c) $\ker(Id - K) = \{0_E\}$ si y solo si $E = \mathrm{Img}(Id - K)$
d) $\dim(\ker(Id - K)) = \dim(\ker(Id - K^*))$

Demostración

literal a) Consideremos $Q = \ker(Id - K)$. P.D. $\overline{B_Q}$ es compacta para la topología fuerte

$\overline{B_Q} \subseteq \overline{K(\overline{B_E})}$ ← compacto. En efecto, si $u \in \overline{B_Q}$

$$\|u\|_E \leq 1 \quad \text{y} \quad u - Ku = 0$$

$$Ku = u \qquad u \in K(\overline{B_E})$$

$\overline{B_Q}$ es compacto fuertemente si Q es de dimensión finita.

Lema (Riez) 4.11. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, F, G s.e.v. tales que

- F es cerrado
- $F \subsetneq G$

Entonces para todo $\varepsilon \in]0,1[$ existe $y_\varepsilon \in G$ y $y_\varepsilon \notin F$ tal que

$$\|y_\varepsilon\| = 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{dist}(y_\varepsilon, F) > 1 - \varepsilon$$

Observación: Si F es de dimensión finita o reflexivo se puede considerar $\varepsilon = 0$.

literal b) P.D. $\mathrm{Img}(Id - K)$ es cerrado. Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{Img}(Id - K)$ y $y = \lim_{n \to +\infty} y_n$.
P.D. $y \in \mathrm{Img}(Id - K)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = (Id - K) u_n$, entonces sin pérdida de generalidad podemos asumir que para todo $n \in \mathbb{N}$ $y_n \neq 0$.

$$d_n = d(u_n, \ker(Id - K)) > 0$$

$$y_n = (Id - K) u_n - (Id - K) v_n = (u_n - v_n) - K(u_n - v_n)$$

Por lo tanto, existe $v_n \in \ker(Id - K)$ tal que

$$d_n = \|u_n - v_n\|_E \qquad \text{ya que } \dim(\ker(Id - K)) < +\infty.$$

Ahora, mostremos que $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Por absurdo supongamos que $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es acotado; así existe $(u_{n_k} - v_{n_k})$ subsucesión tal que no es convergente, i.e.

$$\lim_{k \to +\infty} \|u_{n_k} - v_{n_k}\| = +\infty.$$

Considerando $w_{n_k} = \frac{u_{n_k} - v_{n_k}}{\| u_{n_k} - v_{n_k} \|}$ tenemos que $\lim_{k \to +\infty} w_{n_k} - K(w_{n_k}) = 0$. [A]

Pues $w_{n_k} - K(w_{n_k}) = \frac{y_{n_k}}{\| u_{n_k} - v_{n_k} \|}$ $\quad \| w_{n_k} - K(w_{n_k}) \| \leq \frac{H}{\| u_{n_k} - v_{n_k} \|} \longrightarrow 0$

$$\lim_{k \to +\infty} w_{n_k} = \lim_{k \to +\infty} K(w_{n_k})$$

Como w_{n_k} es acotada, existe una subsucesión que la notaremos de la misma forma tal que existe $z \in E$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} K(w_{n_k}) = z. \quad \text{Usando [A]}.$$

Por lo tanto, $z \in Ker(Id - K)$. y así

$$1 = d(w_{n_k}, Ker(Id - K)) = \frac{1}{\| u_{n_k} - v_{n_k} \|} d(u_n, Ker(Id - K))$$

$$1 = \lim_{k \to +\infty} d(w_{n_k}, Ker(Id - K)) = \underbrace{d(z, Ker(Id - K))}_{=0} = \frac{d_{n_k}}{d_{n_k}} = 1 \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

Por lo tanto, $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.

Así, existe $l \in E$ y $(u_{n_k} - v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} (u_{n_k} - v_{n_k}) = l$$

Además, como

$$y_n = u_n - K(u_n) - (v_n - K(v_n))$$

$$y_n + K(u_n - v_n) = u_n - v_n$$

$$\lim_{k \to +\infty} u_{n_k} - v_{n_k} = y + l$$

$$u_{n_k} - v_{n_k} = y_{n_k} + K((u_{n_k} - v_{n_k})) \xrightarrow[k \to +\infty]{} y + l$$

$$g = l + y \quad \Rightarrow \quad g + K(g) = y$$

$$y_{n_k} = u_{n_k} - v_{n_k} + K(u_{n_k} - v_{n_k})$$

$$y = g - K(g)$$

Así, $y \in Img(Id - K)$.

literal c):

$\Rightarrow$ Supongamos que $Ker(I - K) = \{0_E\}$. P.D. $Img(Id - K) = E$

Por absurdo, supongamos que $E \neq Img(Id - K)$, i.e., $Img(Id - K) \subsetneq E$. Así, notando

$$E_1 := Img(Id - K) \subsetneq E.$$

Luego, E_1 es un espacio de Banach y más aún $K(E_1) \subseteq E_1$. Así, consideremos la restricción del operador T sobre E_1, entonces

$$K_1 = K|_{E_1} \in K(E_1)$$

Analogamente, como $Img(Id - K_1) \subsetneq E_1$, entonces, notando $E_2 = Img(Id - K_1)$, se sigue que $K_1|_{E_2} \in K(E_2)$, tomando $K_2 = K_1|_{E_2}$ y repitiendo el proceso de manera inductiva podemos encontrar una sucesión

$$E_n = (Id - K)^n(E)$$

de espacios completos cerrados. Usando el lema de Riesz para $\varepsilon = 1/2$, podemos obtener una sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\| u_n \| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad dist(u_n, E_{n+1}) > 1/2 \quad \text{con } u_n \in E_n$$

Ahora, notemos que

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m) \quad \text{con} \quad n,m \in \mathbb{N}.$$

Teorema 6.6. [1] Alternativa de Fredholm. Pág 160.

Luego, sin pérdida de generalidad, si $n>m$, entonces

$$E_{n+1} \subseteq E_n \subseteq E_{m+1} \subseteq E_m$$

Por lo tanto, se sigue que

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}$$

Así, se sigue que

$$\|Tu_n - Tu_m\| = \|(-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n) - u_m\|$$

$$\geq \inf_{\alpha \in E_{m+1}} \|\alpha - u_m\| \qquad \text{con } \alpha = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n$$

$$= \operatorname{dist}(u_m, E_{m+1})$$

$$\geq \frac{1}{2}.$$

Pero esto no es posible pues $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B_E}$, $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{T(B_E)}$, compacto, y por lo tanto admite una subsucesión convergente. Así, se sigue que

$$\operatorname{Img}(Id - K) = E.$$

($\Leftarrow$) Recíprocamente, si suponemos que $\operatorname{Img}(Id-K) = E$, entonces por la observación de la clase del (30/01/2023), se tiene que

$$E^{\perp} = \operatorname{Img}(Id-K)^{\perp} = \operatorname{Ker}(Id - K^*)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}(Id - K^*) = \{0_E\}$$

Luego, como $K^* \in \mathcal{K}(E')$ y por la implicación anterior

$$\operatorname{Img}(Id - K^*) = E'$$

Usando nuevamente la observación

$$\operatorname{Ker}(Id - K^*) = \{0_{E'}\}$$

literal d) Sea $d = \dim(\operatorname{Ker}(Id-K))$ y $\hat{d} = \dim(\operatorname{Ker}(Id-K^*))$. P.D. $\hat{d} \leq d$. Por absurdo, supongamos que $d < \hat{d}$. Así, como $d < +\infty$ y $\operatorname{Ker}(Id-K)$ es un s.e.v. de dimensión finita, entonces admite un suplementario topológico digamos D; así

$$D \cap \operatorname{Ker}(Id-K) = \{0\}$$

$$\text{y } D + \operatorname{Ker}(Id-K) = E$$

Luego, por la proposición 2.3, existe P una proyección tal que $P \in \mathcal{L}(E,E)$ y además $\operatorname{Img}(P) = \operatorname{ker}(Id-K)$. Por otro lado, consideremos

$$\operatorname{Ker}(Id-K^*)^{\perp} = \operatorname{Img}(Id-K)$$

el cual tiene codimensión finita $\hat{d}$, así, admite un suplementario topológico de dimensión $\hat{d}$, denotado por F tal que

$$F \cap \operatorname{Img}(Id-K) = \{0\} \qquad F + \operatorname{Img}(Id-K) = E, \quad \text{con } \dim(F) = \hat{d}$$

Luego, como $d < \hat{d}$, entonces existe

$$\xi : \operatorname{Ker}(Id-K) \longrightarrow F$$

la cual es inyectiva pero no sobreyectiva. Con esto, definamos

$$S = K + \xi \circ P.$$

Notemos entonces que $S \in K(E)$ pues

$$S = \underbrace{T}_{} + \underbrace{\xi \circ P}_{\text{compacto por ser de rango finito}}$$

compacto por ser la combinación lineal de compactos

P.D. $Ker(Id - S) = \{0\}$. En efecto, si $u \in Ker(Id - S)$, entonces

$$0 = (Id - S)u = u - Su = u - (T + \xi \circ P)u. = u - Tu - (\xi \circ P)u$$

$$\Rightarrow 0 = (u - Tu) - \xi \circ Pu$$

así $u \in Ker(Id - K)$ y $\xi u = 0$, i.e., $u = 0$. Así, por el literal anterior, se tiene que

$$Img(Id - S) = E.$$

Pero esto no es posible pues existe $f \in F$ con $f \notin Img(\xi)$ [Pues ξ no era sobreyectiva]

Así, hemos probado que $\hat{d} \leq d$. Con esto

$$\dim(Ker(Id - K^*)) \leq \dim(Ker(Id - K))$$

aplicando esto a K^*, se sigue que

$$\dim(Ker(Id - K^{**})) \leq \dim(Ker(Id - K^*)) \leq \dim(Ker(Id - K))$$

No obstante, como

$$Ker(Id - K) \subseteq Ker(Id - K^{**})$$

$$\Rightarrow \dim(Ker(Id - K)) \leq \dim(Ker(Id - K^{**}))$$

Así

$$\dim(Ker(Id - K^*)) = \dim(Ker(Id - K))$$

como se quería.

Martes, 28 de febrero de 2023.

Observación: La alternativa de Fredholm permite resolver el siguiente problema

Encontremos $u \in E$ espacio de Banach tal que

$$(Id - K)u = g \qquad \text{[A]}$$

← Problema no homogéneo

con $g \in E$, dado, y $K \in K(E)$.

Si existe una única solución tenemos que analizar el problema homogeneo

$$(Id - K)u = 0 \quad (\text{Problema homogéneo})$$

Si la solución del operador anterior es $u = 0$, entonces por la alternativa de Fredholm existe una única solución u_g para el problema [A]

$$(Id - K)u_g = g.$$

Ahora, si consideramos el operador

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to E \\ g &\mapsto \varphi(g) = u_g \end{aligned}$$

$\varphi : (Id - K)^{-1}$ es continuo.

- Si $Ker(Id - u) \neq \{0_E\}$, entonces $\dim(Ker(Id - u)) = n < +\infty$.

Existen $(e_1, \dots, e_n) \subsetneq E$ l.i. tales que
$$(Id - K) e_i = 0 \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$
Usando el segundo literal de la alternativa de Fredholm
$$Img(Id - K) = {}^{\perp}(Ker(Id - K^*))$$
Si $g \in {}^{\perp}(ker(Id - K^*))$ entonces existe $u \in E$ tal que
$$(Id - K) u = g$$
y, por lo tanto, todas las soluciones del problema son de la forma
$$span\{(e_i)_{i=1}^{n}\} + u_p$$
donde u_p es una solución particular del problema no homogéneo.

- Si $g \in {}^{\perp}(ker(Id - K^*))$
$$ker(Id - K^*) = \{f \in E' : f - K^* f = 0\}$$
donde
$$K^* f : E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto K^*_f(x) = \langle K^* f, x \rangle_{E' \times E} = \langle f, Kx \rangle_{E' \times E}$$
- Si $g \notin {}^{\perp}(ker(Id - K^*))$ el problema no homogéneo no admite solución
- Si $E = H$, con H un espacio de Hilbert, K es compacto y autoadjunto, entonces si $ker(Id - K) = n$ y $(e_i)_{i=1}^{n}$ es una base para
$$ker(Id - K)$$
Entonces el problema homogéneo $(Id - K) u = g$ tiene solución si y solo si
Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ $\quad \langle g, e_i \rangle_H = 0.$

Decimos que $A \in \mathcal{L}(E, F)$ es un operador de Fredholm si

- $\dim(ker(A)) < +\infty$
- $Img(A)$ es cerrada
- Codimension finita

Índice

$Id(A) = \dim(ker(A)) - \text{codimensión}(Img(A))$

Ejemplo: Si K es un operador compacto, entonces
$$A = I - K$$
es un operador de Fredholm con $Ind(A) = 0$.

Proposición 4.12. Sea $T \in \mathcal{K}(E)$. Se tiene lo siguiente

a) $0 \in \sigma(T)$
b) $\sigma(T) = V.P. \cup \{0\}$.

y se tiene una de las siguientes alternativas

a) $\sigma(T) = \{0\}$
b) $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\text{conjunto finito de valores propios}\}$.
c) $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_\varepsilon \quad \varepsilon > 0\}$

tal que $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = 0$ $\quad \lambda_\varepsilon$ es un punto aislado

Si E es separable

d) $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$. $\lambda_n \to 0$ λ_n punto aislado.

Viernes, 3 de marzo de 2023.

Definición 4.13. Sea H un espacio de Hilbert. Decimos que $(E_i)_{i\in I}$ s.e.v. cerrado de H es una suma hilbertiana si

a) Para todo $i \neq j \in I$ $E_i \perp E_j$

b) $H = \bigoplus_{i \in I} E_i$

Observación: Si H es separable, entonces decimos que $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.e.v. cerrados de H son una suma Hilbertiana si

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \text{ con } n \neq m \qquad E_n \perp E_m$$

$$H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

Observación: - Si T es autoadjunto de H en H, entonces

$$\sigma(T) \subseteq \mathbb{R} \qquad \sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$$

- Si T es semidefinido positivo ($\langle Tx, x\rangle \geq 0$) y autoadjunto, entonces

$$\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$$

- Si T es normal $(TT^* = T^*T)$, entonces

$$\sigma_d(T) = \sigma_d(T^*) \qquad \ker(T) = \ker(T^*).$$

Teorema 4.14. Sea H un espacio de Hilbert. Sea $T \in K(E)$ normal (autoadjunto), entonces

$$H = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)}} \ker(T - \lambda \, Id) \quad \text{es una suma hilbertiana}$$

La notación $(\perp)$ idica que los conjuntos son ortogonales dos a dos.

Observación: Si H es separable,

$$H = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda_n\in\sigma_p(T)}} \ker(T - \lambda_n Id) \qquad \forall \lambda \in \sigma_p(T)$$

$$\dim(\ker(T - \lambda\, Id)) < +\infty.$$

Ejercicio 1. Sea $H = \ell^2$, $A \subseteq \ell^2$

$$A = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} x_n < 0 \right\}$$

$\tilde{A} \subseteq \ell^2$

$$\tilde{A} = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n} = 0 \right\}$$

P.D. A y $\tilde{A}$ son cerrados fuetemente

¿A es compacto?

¿$\tilde{A}$ es compacto?

Solución:

$(x^k)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\lim_{k\to+\infty} x^k = x$ P.D $x \in A$.

Notemos que

$$x_n = x_n - x_n^k + x_n^k$$

luego

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}' x_n - x_n^k + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^k}_{\to 0}$$

Usando convergencia dominada en series se tiene el resultado.

Definamos

$$T : \ell^2 \to \ell^2 \qquad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\varphi : \operatorname{Img} T \to \mathbb{K} \qquad \frac{x_n}{n} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}$$

$$\overline{\operatorname{Img} T} = \operatorname{Img} T \iff \exists \alpha > 0 \text{ tal que } \|Tx\| \geq \alpha \|x\|$$

Como ambos son espacios vectoriales, entonces no son compactos.

Ejercicio 2. Sean $F = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ y $E = (C'([0,1]), \|\cdot\|_\infty + \|\cdot'\|_\infty)$

Para $\alpha \geq 1$

$$Lip_\alpha = \{ f \ \alpha\text{-Lipschitz} \quad \|f\|_\alpha = |f(0)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

$E \hookrightarrow F$ es compacta — literal a)

$i : E \to F$, $i(f) \mapsto f$

$Lip_\alpha \to F$ es compacta — literal b)

literal a)

Notemos que

$$\|f\|_F = \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_E$$

P.D $i(\overline{B}_E)$ es relativamente compacto en $(F, \|\cdot\|_F)$

Usando el teorema de Arcela-Ascoli, resta probar que

- $\overline{B}_E$ es acotada en $(F, \|\cdot\|_F)$ y $\overline{B}_E$ equicontinua en $(F, \|\cdot\|_F)$

a) $f \in \overline{B}_E \Rightarrow \|f\|_F \leq \|f\|_E = 1$

b) Sea $f \in \overline{B}_E$

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{\tilde{x}\in[0,1]} |f(\tilde{x})|\,|x-y| \leq \|f\|_E\,|x-y| \leq |x-y| = \varepsilon = \delta$$

Así, por Arcela-Ascoli, i es compacto.

literal b)

$\forall f \in Lip\text{-}\alpha$ P.D. $\|f\|_F \leq c\|f\|_\alpha$

$$|f(x)| = |f(0) - f(0) + f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)|$$

$$\leq |f(0)| + \frac{|x|^\alpha}{|x|^\alpha} |f(x) - f(0)|$$

$$= |f(0)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = \|f\|_\alpha$$