Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas

Prof: Paul Acevedo

Composición: 6 horas teórico - 2 horas práctica

Aprendizaje autónomo: 4 horas

Pre-requisitos: Teoría de la medida e integración (
Calculo de Fourier con aplicaciones a
Teoría de operadores lineales acotac

Bibliografía.
[4]: Mitrea, D.
[5]: Chamorro, D. Vol 1.
[6]: Chamorro D. Vol 2.

Objetivo: Analizar de forma cualitativa una EDP elíptica de 2do orden con condiciones de frontera

EDP definición (segundo orden)
↳ Tipos
  ↳ Elíptica

Condiciones de frontera
↳ Dirichlet
↳ Neumann
↳ Robin
} homogéneas y no homogéneas

Analizar una EDP ≠ Resolver una EDP → Hallar de forma explícita (analítica o numérica) la función que satisface el problema diferencial

↳ Determinar la existencia de solución ← ¿Qué se entiende por solución?
↳ Determinar si la solución encontrada es única
↳ Analizar la estabilidad de la EDP

División del curso (Contenido)

Cap 1. Marco funcional para el estudio cualitativo de una EDP
- Propiedades adicionales que poseen los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$
- Espacios de Sovolev

Cap 2. Análisis cualitativo de una EDP elíptica de 2do orden con condiciones de frontera
- Diferenciar un problema diferencial de un problema variacional
- Definir una solución para un problema variacional
- Existencia, Unicidad, y Estabilidad (Regularidad)
- Espectro del Laplaciano.

Bibiografía

[1] Haim, B. (2011) Functional Analysis, Sobolev spaces and PDE's

[2] Evans, L. (2010) PDE

[3] Demengel, F & Demengel, G (2012) Functional Spaces for the Theory of Elliptic P.D.E.

Metodología del aula invertida.

Recursos

↳ Teoría a aprender (conceptos, resultados: demostración)

↳ Tomar apuntes
› Sacar resúmenes } Generar sus propios apuntes

Evaluación

Tutorías: Lunes de 4pm a 5pm (Virtuales)

Al menos con 24 horas de anticipación

Control 1	15%	acumulativo
Control 2	25%	acumulativo
Control 3	35%	acumulativo
Talleres y exposiciones	25%	
	100%	

Miércoles, 8 de noviembre de 2023.

Bibliografía complementaria.

[4] Lieb & Loss - Analysis (Espacios de Lebesgue y Sobolev, problemas autovalores)

[5] Adams, Fournier - Sobolev spaces

[6] Jost - Postmodern Analysis (Propiedades de la integral de Lebesgue
Espacios de Lebesgue y Sobolev
Cálculo de variaciones, teoría de EDP
Espectro del Laplaciano

Consideremos la ecuación diferencial ← ecuación de Poisson

Problema de valores en la frontera. ⇒ (P) $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto y acotado

condición de Dirichlet homogenea

Dada una función $f: \Omega \to \mathbb{R}$, ¿existe $u: \underset{\Omega}{\overset{\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(\Omega)}{\|}} \to \mathbb{R}$ tal que satisface (P)?

Condiciones no homogeneas son de la forma $u = g$
Datos: Ω, f, g

A la función g se la conoce como función prescrita en la frontera

Datos: Ω, f

Dependiendo de la información de f, Ω y g existen diversas metodologías para analizar el problema (P)

Sección: Espacios de funciones continuas

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto.

$$C^0(\Omega) = C(\Omega) = C(\Omega; \mathbb{R}) = \{u: \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ es continua (en } \Omega)\}$$

Funciones continuas de Ω a X → $= C(\Omega; X)$

Notemos que $(C^0(\Omega), \mathbb{R}, +, \cdot)$ conforma un espacio vectorial

Observación: Una solución clásica mantiene las igualdades en todo punto

Dados. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto acotado y $f \in C^0(\Omega)$.

¿Qué significa que exista u tal que satisfaga (P)? ← Definición de solución para el problema (P)

Recordemos que

$$x \in \Omega : \Delta u(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x) = \operatorname{div}(\nabla u)(x)$$

$\Delta u(x)$

$= \operatorname{div}(\nabla u)(x)$

Laplaciano

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right) \qquad \vec{F} = (f_1, \dots, f_m) \qquad \operatorname{div}\vec{F}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_i)(x)$$

con $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^m$

Importante: Si f es F-diferenciable en $x \in \mathcal{U}$ entonces f posee todas sus derivadas parciales de primer orden en x. $\left(f: \mathcal{U} \subseteq \prod_{i=1}^{n} E_i \to F\right)$

↳ El conjunto de las soluciones es el conjunto de las funciones con segundas derivadas parciales de la misma variable continuas.

Como este espacio no brinda una estructura adecuada, consideramos el espacio $C^2(\Omega)$.

Así, la existencia de una solución quiere decir que existe $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(adh(\Omega))$ tal que

$\forall x \in \Omega \quad \Delta u(x) = f(x)$

$\forall \omega \in \partial\Omega \quad u(\omega) = 0$

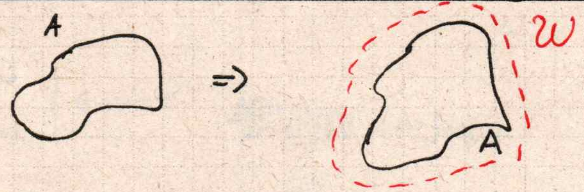
A la función u se la denomina solución clásica de (P)

Si definimos $C^2(A)$, A debe ser abierto.

$C^2(Adh(\Omega))$

Notación Brezis Pág 201 Cap 8

Cuando se define sobre un cerrado se considera que el conjunto se extiende a un abierto



← Esto es más complicado pues requiere extensión

Ahora, definamos

$$C^m(\Omega) = \{u \in C^0(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N, |\alpha| \leq m \quad \partial^\alpha u \in C^0(\Omega)\}$$

Notación de multíndice

$\alpha \in \mathbb{N}_0^N \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ multíndice $\quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad$ orden de $\alpha \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial_N^{\alpha_N}}$$

A los elementos $C^m(\Omega)$ se las denomina funciones de clase C^m

Notación

$$C^m(\Omega) = \{u \in C^0(\Omega) : \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad D^k u \in C^0(\Omega)\}$$

Jueves, 9 de noviembre de 2023.

Notemos que $C^m(\Omega)$ es un s.e.v. real de $C^0(\Omega)$

Por otro lado, definamos

$$C^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^{m}(\Omega) \quad \text{s.e.v. de } C^{0}(\Omega)$$

Observación: La intersección de subespacios vectoriales siempre es un s.e.v.

A los elementos de $C^{\infty}(\Omega)$ se los denomina funciones suaves o infinitamende diferenciables

Observación: $C^{0}(\Omega)$, $C^{m}(\Omega)$, $C^{\infty}(\Omega)$ son e.v. reales pero no son e.v. normados.

Sin embargo, sí es posible dotarlos de una topología, convirtiéndolas en espacios vectoriales topológicos

Estudio de teoría de distribuciones

$\uparrow$

e.v. topológicos.

Soporte de una función

Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y abierto

El soporte de u, denotado por $\operatorname{supp}(u)$, se define por

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\} \quad \leftarrow \text{e.u.}$$

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}^{\,\Omega} \quad \leftarrow \text{topología.} \quad \leftarrow \text{e.u.t.}$$

Cuando el soporte se define en un conjunto sin topología, se toma el soporte sin la clausura

Note que la clausura siempre es respecto a la topología de subespacio.

Ejemplos:

1) $u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$\operatorname{supp}(u) = [0, +\infty[$

¿ Si $x \in \operatorname{supp}(u) \Rightarrow u(x) \neq 0$? No

2) $v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto v(x) = 1$

$\operatorname{supp}(v) = \mathbb{R}$

3) $w: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto w(x) = 1$

$\operatorname{supp}(w) =]0,1[$

$$v = w = \begin{cases} \operatorname{Dom}(v) = \operatorname{Dom}(w) \\ \operatorname{Img}(v) = \operatorname{Img}(w) \end{cases}$$

¿ $v = w$? No

Propiedades Sean $u: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacío, abierto

1) $\operatorname{Supp}(u)$ es cerrado (en Ω)
2) Si $x \notin \operatorname{supp}(u)$ $\quad (x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(u))$ entonces $u(x) = 0$
3) $\operatorname{supp}(u) = \emptyset \Rightarrow u = 0$
4) Si $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi = 1$ sobre $\operatorname{supp}(u)$ entonces $u = \varphi u$.

Observación 1) $\operatorname{supp}(u) = \Omega \setminus \left(\bigcup_{\substack{w \text{ es abierto} \\ u=0 \text{ en } w}} w \right)$ con la topología inducida en Ω

$\leftarrow$ Esta es una definición equivalente

Observación 2) a) ¿ $x \in supp(u) \Rightarrow u(x) \neq 0$? No necesariamente (puede estar en la clausura)

b) ¿ $x \notin supp(u) \Rightarrow u(x) = 0$? Verdadero.

c) ¿ $x \in supp(u) \Rightarrow u(x) = 0$? No necesariamente.

d) ¿ $x \notin supp(u) \Rightarrow u(x) \neq 0$? Falso. (Por la observación anterior)

e) ¿ $u(x) \neq 0 \Rightarrow x \in supp(u)$? Verdadero.

f) ¿ $u(x) = 0 \Rightarrow x \notin supp(u)$? No necesariamente

g) ¿ $u(x) \neq 0 \Rightarrow x \notin supp(u)$? Falso

h) ¿ $u(x) = 0 \Rightarrow x \in supp(u)$? No necesariamente

Ejemplo para la parte f), el ejemplo de la parte 1.

$u(-2) = 0$ pero $-2 \notin supp(u)$

Espacios de funciones continuas a soporte compacto

Notaremos a este conjunto $C_c^0(\Omega)$ y se definen como

$$C_c^0(\Omega) = \{ u \in C^0(\Omega) : supp(u) \text{ es compacto} \}$$

(X, τ) un e.t. $Y \subseteq X$. s.e.t.

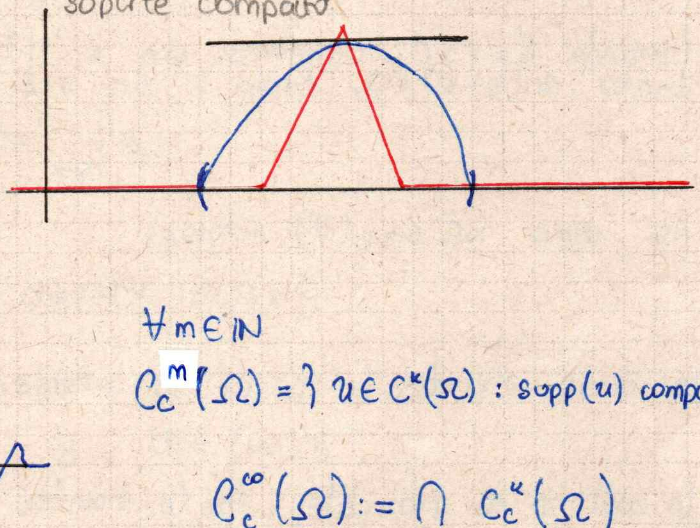
- ¿ $A \subseteq Y$ abierto (en Y) (cerrado) (compacto) $\Rightarrow$ A abierto (en X)? (cerrado) (compacto) No necesaria. V si Y es cerrado en X / No necesar. V si Y es abierto en X / V
- ¿ $A \subseteq Y$ abierto (en X) (cerrado) (compacto) $\Rightarrow$ A abierto (en Y)? (cerrado) (compacto) V / V / V

$$A \subseteq Y \text{ compacto (en } Y) \Leftrightarrow A \subseteq Y \text{ compacto (en } X)$$

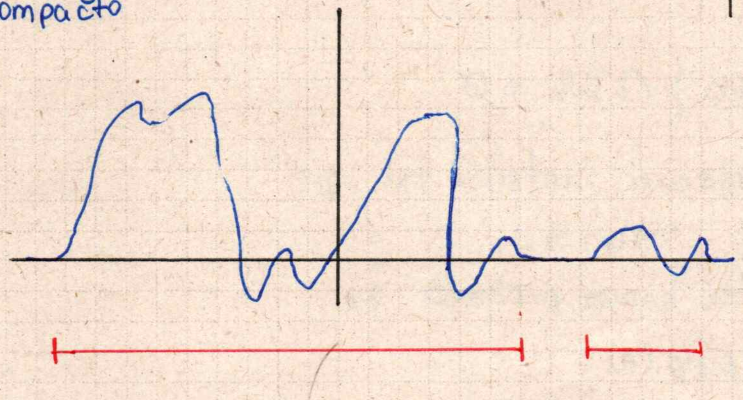
Un ejemplo de un elemento $C_c^0(\Omega)$

$$h(x) = \begin{cases} -|x| + 1 \quad (x^2 - 1) & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

La función del ejemplo 3 $\boxed{\text{no}}$ es a soporte compacto



Otro ejemplo de una función a soporte compacto



$\forall m \in \mathbb{N}$

$$C_c^m(\Omega) = \{ u \in C^k(\Omega) : supp(u) \text{ compacto} \}$$

$$C_c^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_c^k(\Omega)$$

Ahora si consideramos $u \in C_c^1(a,b)$ $(N=1)$

$\text{supp}(u)$ es compacto contenido en (a,b)

$$u' : (a,b) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto u'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

* ¿ $\text{supp}(u')$ vs $\text{supp}(u)$?

¿ Existe una relación de contenencia entre ambos soportes?

Consideremos una función que solo tenga 1 derivada (no más)

Consideremos la función $u \in C_c^1(a,b)$. P.D. $\text{supp}(u') \subseteq \text{supp}(u)$.

Sea $x \in \text{supp}(u')$, cualquiera. P.D. $x \in \text{supp}(u)$

Por absurdo, supongamos que $x \notin \text{supp}(u)$. Así, como

$$\text{supp}(u)^c = \bigcup_{\substack{\omega \text{ abierto} \\ u=0 \text{ en } \omega}} \omega$$

entonces existe ω_x un abierto de Ω tal que

$$x \in \omega_x \subseteq \text{supp}(u)^c \quad \text{y} \quad u(z)=0 \quad \forall z \in \omega_x \qquad [1]$$

Ahora, probemos que $u'=0$ en ω_x

En efecto, sea $z \in \omega_x$, cualquiera.

P.D. $u'(z)=0 \iff \lim_{t\to 0} \frac{u(z+t)-u(z)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{u(z+t)}{t} = 0$ por [1]

Como ω_x es abierto, existe $r>0$ tal que

$$B_r(z) \subseteq \omega_x \qquad [2]$$

Así, por definición de límite, sea $\varepsilon>0$, buscamos $\delta>0$ tal que

$$|t|<\delta \Rightarrow \left|\frac{u(z+t)}{t}\right| < \varepsilon$$

tomando $\delta = r > 0$ tenemos que si $|t|<\delta$, entonces $z+t \in B_r(z)$ y por lo tanto $u(z+t)=0$. Como z fue arbitrario, hemos probado que

$$u'\big|_{\omega_x} = 0$$

Así, como $x \in \text{supp}(u')$ entonces

$$\{x \in \Omega : u'(x) \neq 0\} \cap \omega_x \neq \emptyset$$

es decir, existe un ω en la intersección anterior tal que

$$u'(\omega) = 0 \quad \text{y} \quad u'(\omega) \neq 0$$

lo cual no es posible. Por lo tanto, hemos probado que

$$\text{supp}(u') \subseteq \text{supp}(u)$$

Para mostrar que las contenencias son estrictas consideremos

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{-|\tan(x)|} & \text{si } |x| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Martes, 14 de noviembre de 2023

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y abierto

$$C_c^k(\Omega) = \{ u \in C^k(\Omega) : \text{supp}(u) \text{ es compacto} \} \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

$$C_c^0(\Omega) = \{ u \in C^0(\Omega) : \text{supp}(u) \text{ es compacto} \}$$

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_c^k(\Omega)$$

Sabemos que $C_c^0(\Omega), C_c^k(\Omega), C_c^\infty(\Omega)$

¿Son s.e.v. reales?

- $0 \in C_c^0(\Omega)$
- $u, v \in C_c^0(\Omega)$: $\text{supp}(u+v) \subseteq \Omega$
- $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in C_c^0(\Omega)$: $\text{supp}(\alpha u) \subseteq \Omega$ compacto.

$$\text{supp}(\alpha u) = \overline{\{ x \in \Omega : f(\alpha u) \neq 0 \}} = \bigcup_{\omega \text{ abierto y } f(u) \text{ se anula en } \omega} \omega$$

Consideremos los siguientes casos $|\alpha| \leq 1$ y $|\alpha| > 1$

Así, si $x \in \text{supp}(\alpha u)$ y $|\alpha| \leq 1$, entonces $x \in \text{supp}(u)$

- $\text{supp}(u+v) \subseteq \text{supp}(u) \cup \text{supp}(v)$

Si $x \in \Omega$: $(u+v)(x) \neq 0 \Rightarrow u(x) + v(x) \neq 0 \Rightarrow \{ u(x) \neq 0 \lor v(x) \neq 0 \}$

$$\Leftrightarrow \{ x \in \Omega : u(x) \neq 0 \} \cup \{ x \in \Omega : v(x) \neq 0 \}$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ $\text{supp}(\alpha u) = \text{sup}(u)$

Recuerde que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Si $\text{supp}(u)$ es compacto $[u \in C_c^0(\Omega)]$ entonces ¿Se puede dotar de una norma a $C_c^0(\Omega)$? Sí $\rightarrow$ [a]

Definamos

$$\|u\|_{C_c^0(\Omega)} = \max_{x \in \text{supp}(u)} |u(x)|$$

Consideremos $u \in C_c^0(\Omega)$

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \text{supp}(u) \\ 0 & x \notin \text{supp}(u) \end{cases} \qquad \begin{aligned} v : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto v(x) \end{aligned}$$

Para efecto de realizar cualquier tipo de operaciones con u, basta restringir $u|_{\text{supp}(u)}$

[a] $\rightarrow$ Sí, pues el $\text{supp}(u)$ es el que permite definir una norma sobre este espacio

Ahora, consideremos el espacio $C_c^k(\Omega)$

$\left(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right)$ completo

$\left(C^0([a,b]), \|\cdot\|_1\right)$ no es completo

$\left(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right)$ no es completo

$\left(C^1([a,b]), \|\cdot\|_1\right)$ no es completo

$\left(C^1([a,b]), \|\cdot\|_*\right)$ $\quad \|u\|_* = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ es completo

En C^1 además podemos definir

$$\|u\|_\# = \left[\left(\int_a^b |u(x)|^2 dx\right) + \left(\int_a^b |u'(x)|^2 dx\right)\right]^{1/2}$$

~~propiedades sobre una función~~

Propiedades sobre un espacio normado

1) Cambia la completitud del conjunto según la norma considerada

2) la continuidad de una función depende de las normas se definen en los espacios normados

En base a lo anterior, podemos considerar

$$\|u\|_{C_c^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_\infty \rightarrow \text{Espacio completo}$$

Los espacios $C_c^0(\Omega)$ y $C_c^k(\Omega)$ se pueden dotar de una norma para convertirlas en espacios normados (en algunos casos e. Banach)

Sin embargo, estos espacios no brindan las condiciones adecuadas para que ciertas funciones útiles para el estudio de las EDP tengan propiedades de continuidad. Y en este contexto, se definen topologías adecuadas que hace que las funciones mencionadas tengan buenas propiedades.

$\left(C_c^\infty(\Omega), \tau_{ind}\right)$ e.v. topológico

↳ Topología del límite inductivo.

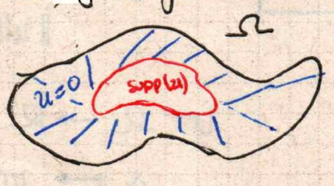
Funciones reales (complejas) definidas sobre $C_c^\infty(\Omega)$ tengan propiedades de continuidad
[Distribuciones] ↳ Introducción a la teoría de distribuciones.

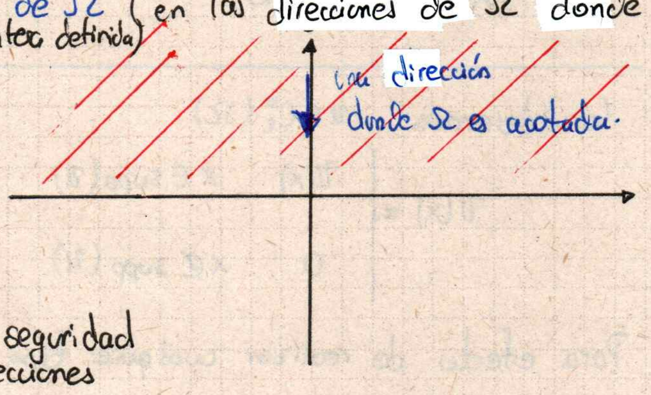
Observación Si $u \in C_c^0(\Omega)$, entonces $\operatorname{supp}(u) \subseteq \Omega$ y es compacto.

¿Qué podemos decir de los valores de la función u cuando estos están en las cercanías de la frontera de Ω (en las direcciones de Ω donde sean acotadas, y tenga una frontera definida)

Los valores de la función son cero cuando $x \in \Omega$ y $x \notin \operatorname{supp}(u)$

⇓





Intuitivamente, se genera una franja de seguridad alrededor de la frontera de Ω (o en las direcciones donde Ω es acotado)

¿Valores de u sobre $\partial\Omega$ (en las direcciones donde Ω es acotado)?

↳ No está definido.

En general, es incorrecto decir que u es cero en la frontera.

Proposición Se tiene que $u \in C_c^0(\Omega)$.

$$\operatorname{dist}\big(\operatorname{supp}(u), \partial\Omega\big) > 0$$

Miércoles, 15 de noviembre de 2023.

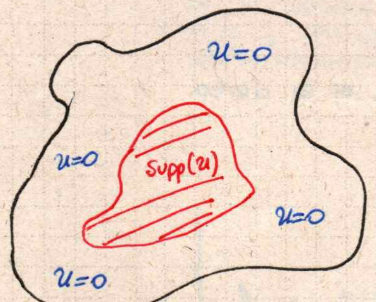
Por contradicción, supongamos que $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \partial\Omega) = 0$, i.e.,

$$\inf_{\substack{z \in \operatorname{supp}(u) \\ w \in \partial\Omega}} \|z - w\| = 0$$

Luego existen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $\|z_n - w_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Sea $u \in C_c^0(\Omega)$, i.e., $u : \Omega \to \mathbb{R}$ en $(\operatorname{supp}(u))^c$ la función se anula.

La afirmación: « La función u se anula en la frontera » no es cierta. Pues u no está definida en la frontera de Ω.



- Como u es continua en el supp(u) que es compacto, entonces u es uniformemente continua.

¿Es posible extender continuamente de forma única la función u a la frontera?

Notar que u se puede extender por cero fuera de su soporte a todo $\mathbb{R}^N$.

$$v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad v\big|_{\Omega} = u$$

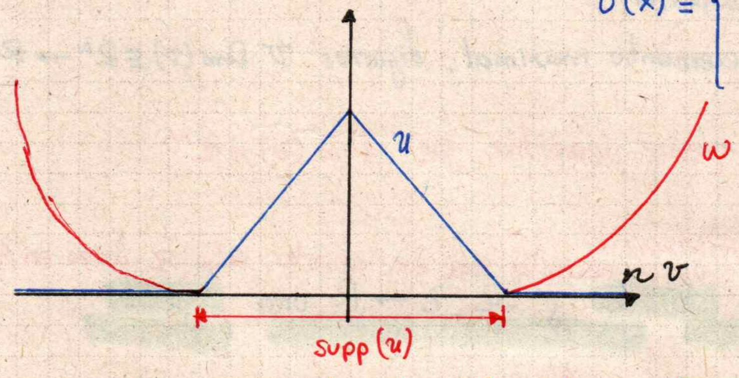
continua.

Entonces v es una extensión continua de u en $\mathbb{R}^N$

¿Es la extensión continua de u en $\mathbb{R}^N$ única? No

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \operatorname{supp}(u) \\ 0 & \text{si } x \notin \operatorname{supp}(u) \end{cases}$$

$x \notin \mathbb{R}^N \setminus \operatorname{supp}(u)$



Otros ejemplos de extensión

Dada una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ continua, ¿bajo qué condiciones sobre u es posible extender continuamente u a un conjunto que contenga a Ω (o $\overline{\Omega}$)

¿Existe $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^N$) continua tal que $v\big|_{\Omega} = u$?

$$\omega : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \omega(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \operatorname{supp}(u) \\ 0 & x \notin \operatorname{supp}(u) \end{cases}$$

$x \in \overline{\Omega} \setminus \operatorname{supp}(u)$

Ejemplo:

Consideremos

$$u : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto u(x) = \tan(x)$$

u es continua en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ es abierto en $\mathbb{R}$

u no posee una extensión continua a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Para $N>1$, si u es acotada, ¿Es posible extenderla continuamente?

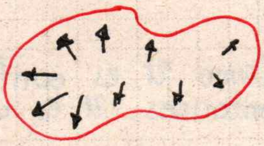
Pregunta. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ continua y acotada.

¿Proposición? Existe $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua tal que $v\big|_{\Omega} = u$

Problema: Existe una dificultad en cuanto a las direcciones.

No constructivista

↳ Lema de Zorn
Axioma de elección



Esta proposición es un análisis y al inicio de su desarrollo no se conoce si es cierto.

(Idea)

Para la demostración, consideremos

$$X = \left\{ v : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \Omega \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^N \\ v \text{ continua y acotada en } A \\ v\big|_{\Omega} = u \end{array} \right\}$$

Supongamos

Sea $A \subseteq X$ totalmente ordenado.

↳ Probamos que A tiene una cota superior

Por el Lema de Zorn, X posee un elemento maximal, digamos $v : \mathrm{Dom}(v) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua y acotada en $\mathrm{Dom}(v)$.

Conclusión: El problema se general al querer demostrar que $\mathrm{Dom}(v) = \mathbb{R}^N$.

Proposición - Teorema de extensión continua -

no se necesita que sea abierto, solo Ω denso en A

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ (A,) no vacío y abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua, existe $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ (A) continua (única) tal que

$$v\big|_{\Omega} = u$$

Más aún, v es uniformemente continua.

Demostración

Definamos

$$v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto v(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ \lim_{n\to+\infty} u(x_n) & x \in \overline{\Omega}\setminus\Omega \end{cases}$$

con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Ω tal que $x_n \to x$

P.D. v está bien definida

Podemos considerar una versión más general

Sean (X,d) y $(Y,\hat{d})$ dos espacios métricos, $f: S \to Y$ con S denso en X, entonces existe $\hat{f}$ una extensión uniformemente continua en $\overline{S}$.

Definamos la función $\hat{f}: \overline{S} \to Y$, como

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in S \\ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) & \text{con } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{S}\setminus S \end{cases}$$

Notando $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$

Mostremos que g está bien definida. Así, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{S}\setminus S$ cualquiera tal que $x_n \to x$

↳ P.D. $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ existe.

Puesto que f es uniformemente continua, se sabe que

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall a,b\in S)\ (d(a,b)<\delta \Rightarrow \hat{d}(f(a),f(b))<\varepsilon) \qquad [1]$$

Así, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \delta \qquad \forall n,m \geq N$$

De esta manera, usando [1], se sigue que

$$d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N$$

es decir, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y como Y es completo, existe $z \in Y$ tal que

$$f(x_n) \to Y.$$

↳ Ahora, mostremos que el límite es independiente de la sucesión, i.e., si $x_n \to x$ y $z_n \to x$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n)$$

Consideremos la sucesión

$$w_n = (x_1, z_1, x_2, z_2, \ldots)$$

Así, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que (el máximo de los naturales que hacen converger la sucesión)

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{y} \quad d(z_n, x) < \varepsilon$$

Así, para $n > H$ par, se sigue que

$$d(w_n, x) = d(z_n, x) < \varepsilon$$

y si $n > H$ es impar, entonces

$$d(w_n, x) = d(x_n, x) < \varepsilon$$

Con esto, se sigue que

$$\lim_{n \to \infty} w_n = x$$

Así, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son subsucesiones convergentes, entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(w_n) = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = x$$

Así, la definición de g es independiente de la sucesión

Ahora, mostremos que g es uniformemente continua

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Por [1], existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall a,b \in S \qquad d(a,b) < \delta \Rightarrow \hat{d}(f(a), f(b)) < \varepsilon/3 \qquad [2]$$

Ahora, sean $a,b \in \overline{S}$ tal que $d(a,b) < \delta/3$, entonces existen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $P \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(a_n, a) < \frac{\delta}{3} \quad \text{y} \quad d(b_n, b) < \frac{\delta}{3} \qquad \forall n \geq P$$

Usando la desigualdad triangular, se tiene que

$$d(a_n, b_n) < d(a_n, a) + d(a,b) + d(b_n, b) < \delta$$

y así, por [2],

$$\hat{d}(f(a_n), f(b_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Además, como $f(a_n) \to g(a)$ y $f(b_n) \to g(b)$, entonces existe $Q \in \mathbb{N}$ tal que

$$\hat{d}(f(a_n), g(a)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \hat{d}(f(b_n), g(b)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Usando la desigualdad triangular, se sigue que

$$\hat{d}(g(a), g(b)) \leq \hat{d}(f(a_n), g(a)) + \hat{d}(f(a_n), f(b_n)) + \hat{d}(f(b_n), g(b)) < \varepsilon \quad \forall n \geq R$$

con $R = \max\{P, Q\}$. Así, g es uniformemente continua.

Si h es otra extensión continua de f en $\overline{S}$, entonces para $a \in \overline{S}$ existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ tal que $a_n \to a$. Puesto que h es continua, entonces

$$h(a_n) \to h(a)$$

No obstante, $h(a_n) = f(a_n)$ y más aún $f(a_n) \to f(a)$, luego

$$h(a) = f(a).$$

Por lo tanto, la extensión es única.

Jueves, 16 de noviembre de 2023

Teorema: Sean $\Omega, \Gamma \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacíos tales que $\Omega \subseteq \Gamma$ y $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
Si u es uniformemente continua y Ω denso en Γ, entonces existe una única función $v: \Gamma \to \mathbb{R}$ tal que

a) $v\big|_{\Omega} = u$

b) v es continua

Más aún, v es uniformemente continua.

Demostración

Unicidad Supongamos que existen $v_1, v_2 : \Gamma \to \mathbb{R}$ tales que
$$v_1\big|_{\Omega} = u \qquad v_2\big|_{\Omega} = u$$

v_1 y v_2 son uniformemente continuas.

P.D. $v_1 = v_2$

P.D. $(\forall x \in \Gamma)(v_1(x) = v_2(x))$

$\forall x \in \Omega$: $v_1(x) = u(x) = v_2(x)$

$\forall x \in \Gamma \setminus \Omega$: existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en Ω tal que $x_n \to x$ en $\mathbb{R}^N$

Por continuidad de v_1
$$v_1(x_n) \to v_1(x) \quad \Rightarrow \quad u(x_n) \to v_1(x) \qquad [A]$$

Del mismo modo, por continuidad de v_2
$$v_2(x_n) \to v_2(x) \Rightarrow u(x_n) \to v_2(x) \qquad [B]$$

Por [A] y [B], $v_1(x) = v_2(x)$.

Existencia: Definamos $v: \Gamma \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u(x_n) & \text{si } x \in \Gamma \setminus \Omega \text{ donde } x_n \to x \text{ con } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega \end{cases}$$

P.D. v está bien definido.

1) P.D. $(\forall x \in \Gamma)(\exists!\, y \in \mathbb{R})\ y = v(x)$

Sea $x \in \Gamma$. Existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en Ω tal que $x_n \to x$ en $\mathbb{R}^N$

Si $x \in \Omega$: $\exists!\, y \in \mathbb{R}$ $y = v(x)$

P.D $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n)$ existe

P.D $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$

Como u es uniformemente continua y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Por completitud de $\mathbb{R}$ $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$

Tomando $y = \lim\limits_{n\to\infty} u(x_n)$ pues por definición $v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = y$

- Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en Ω tal que $z_n \to x$ en $\mathbb{R}$ P.D. $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u(z_n)$

Definamos $w_n = u(x_n) - u(z_n)$ P.D. $w_n \to 0$.

$$\iff \lim_{n\to\infty} \Big(u(x_n) - u(z_n) \Big) = 0$$

Pues los límites existen $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u(x_n) = \lim_{n\to\infty} u(z_n)$

Propiedad $u: X \to Y$ con u uniformemente continua.

1) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $X \Rightarrow (u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

2) $\underbrace{\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesiones en } X}$ $\big(x_n - y_n \to 0 \Rightarrow u(x_n) - u(y_n) \to 0 \big)$

Note que las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no necesitan converger en X. Basta que su diferencia converja.

Probar esto en casa.

P.D.

1) $v\big|_{\Omega} = u$ (directo por definición)

2) v es continua

P.D v es uniformemente continua en Σ

Sea $\boxed{\varepsilon} > 0$, cualquiera. P.D. Existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x,y \in \Sigma \qquad \|x-y\| < \delta \Rightarrow |v(x) - v(y)| < \varepsilon$$

Sean $x,y \in \Sigma$ entonces existen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$

Como u es uniformemente existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$\forall x,y \in \Omega \qquad \|x-y\| < \hat{\delta} \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \boxed{\varepsilon}$$

Por otro lado, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\underset{\forall n \geq N_1}{\|x_n - x\| < \frac{\hat{\delta}}{3}} \quad \text{y} \quad \|y_m - x\| < \frac{\hat{\delta}}{3} \qquad \forall m \geq N_2$$

Luego, notemos que

$$\|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x - y\| + \|y_n - y\|$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{2\hat{\delta}}{3} + \|x - y\| \qquad [1]$$

Tomando $\delta = \frac{\hat{\delta}}{3} > 0$, se tiene que para todo $x,y \in \Sigma$ tales que $\|x-y\| < \delta$

P.D. $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$

Por [1], $\forall n \geq N$: $\|x_n - y_n\| < \hat{\delta}$. Entonces, por [*]

$$\forall n \geq N : |u(x_n) - u(y_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Notar que

$\forall n \geq N: \ |v(x) - v(y)| \leq |v(x) - v(x_n)| + |v(x_n) - v(y_n)| + |v(y_n) - v(y)|$ [B]

$= |v(x) - u(x_n)| + |u(x_n) - u(y_n)| + |u(y_n) - u(y)|$

Entonces, existen $N_4, N_5 \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq N_4 \ : |v(x) - u(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall n \geq N_5 \ : |v(y) - u(y_n)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

La suma de funciones unif. es unif. continua. Más aún, también lo es el producto por escalar.

Tomando $M = \max\{N, N_4, N_5\}$ natural, de lo anterior [B] se sigue que

$$|v(x) - v(y)| < \varepsilon$$

Espacios vectoriales de funciones continuas con extensión continua a la frontera

Definamos los siguientes conjuntos $u \in C^0(\Omega)$

Ejemplos

$C^0(\overline{\Omega})$ → No es la clausura. $= \{ u: \Omega \to \mathbb{R}$: u es uniformemente continua en todos los subconjuntos acotados de $\Omega \}$ (u continua)

Contraparte

$C^0(\mathrm{adh}(\Omega))$

$= \{ u: \mathrm{Adh}(\Omega) \to \mathbb{R} : u$ es continua (en $\mathrm{Adh}(\Omega)$) $\}$

Consideremos $k \in \mathbb{K}$

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = k$

$g: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \mathrm{sen}(x)$

$h: \Omega \subseteq [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x) = \ln(x)$

entonces f es uniformemente compacta, i.e.,

$f \in C^0(\overline{\Omega})$

entonces $g \in C^0(\overline{\Omega})$

entonces $h \in C^0(\overline{\Omega})$

Por otro lado, para el conjunto $C^0(\mathrm{Adh}(\Omega))$, cualquier función continua sobre $\overline{\Omega}$ está ahí.

Ahora, notemos que las funciones uniformemente continuas también son continuas.

Entonces si f es uniformemente continua en $\mathrm{Adh}(\Omega)$, entonces $f \in C^0(\mathrm{adh}(\Omega))$, luego $f|_{\Omega} \in C^0(\overline{\Omega})$

- En principio no existe relación entre los conjuntos.

▷ Si $u \in C^0(\overline{\Omega})$ entonces existe $v: \mathrm{Adh}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $v|_{\Omega} = u$ y v es continua en $\mathrm{Adh}(\Omega)$

Miércoles, 22 de noviembre de 2023.

Observación: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío. Recordemos que (Ω, τ_Ω) es un espacio topológico.

$$u: \Omega \to \mathbb{R}$$

Entonces $\mathrm{supp}(u) = \mathrm{Adh}_\Omega \{ x \in \Omega : u(x) \neq 0 \}$; $\mathrm{supp}(u) \subseteq \Omega$

Definición en topología.

$C_c^0(\Omega) = \{ u \in C^0(\Omega) : \mathrm{supp}(u)$ es compacto $\}$

Análisis Funcional: $\operatorname{supp}(u) = \operatorname{Adh}_{\mathbb{R}^n} \{ x \in \Omega : u(x) \neq 0 \}$ $\quad \Omega \subseteq \operatorname{supp}(u)$

Notemos que estas dos definiciones difieren.

Recordemos que un conjunto es compacto en la topología inducida si y solo si es compacto en la topología general.

Uso del soporte

$$C_c^0(\Omega) = \{ u \in C^0 : \operatorname{supp}(u) \subset\subset \Omega \}$$

Compactamente contenido en Ω

$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$A \subset\subset \Omega \iff \overline{A}^{\mathbb{R}^n} \subseteq B$ y $\overline{A}$ es compacto.

Observación: Para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto:

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega, \operatorname{supp}(u)) > 0$$
$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 0$$

Ejemplo: Consideremos la siguiente función

$$u : B(0,2) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto u(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & (x,y) \in B(0,1) \\ 0 & (x,y) \in B(0,2) \setminus B(0,1) \end{cases}$$

$u \in C^0(B(0,2))$ $\qquad \operatorname{supp}(u) = \overline{B}(0,1) \subset\subset B(0,2)$

$$\therefore u \in C_c^0(B(0,2))$$

Por otro lado, si consideramos

$$v : B(0,2) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto v(x,y) = x^2 + y^2 \qquad v \in C^0(B(0,2))$$

Así,

$\operatorname{supp}(u) = B(0,2)$ topológico $\qquad \operatorname{supp}(u) = \overline{B}(0,2)$ Análisis Funcional

No obstante $u \notin C_c^0(B(0,2))$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío

$$C^0(\overline{\Omega}) = \{ u \in C^0(\Omega) : u \text{ es uniformemente continua en subconjuntos acotados de } \Omega \} \qquad [A]$$

$$C^0(\operatorname{Adh}(\Omega)) = \{ u : \operatorname{Adh}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ es continua en } \operatorname{Adh}(\Omega) \}$$

$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \Sigma$ denso en Σ

Si u es uniformemente continua en Ω

$\Rightarrow$ Existe una única función $v : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua tal que $v|_{\Omega} = u$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. P.D $(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x, y \in \Sigma)(\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|v(x) - v(y)\| < \varepsilon)$

$$|v(x)-v(y)| \leq |v(x)-v(x_n)| + |v(x_n)-v(y_n)| + |v(y_n)-v(y)|$$

$(x_n)_n$ sucesión tal que $x_n \to x$

$(y_n)_n$ sucesión tal que $y_n \to y$ $\qquad \forall n \geq N \quad |x_n - y_n| < \hat{\delta} \Rightarrow |u(x_n) - u(y_n)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall n \geq K \qquad |v(x)-v(y)| < \varepsilon$

¿Existe alguna contenencia entre los conjuntos dados en [A]?

Sea $u \in C^0(Adh(\Omega))$. Notar que $u \in C^0(\Omega)$.

Sea $A \subseteq \Omega$ acotado.

$Adh(A)$ compacto $\qquad Adh(A) \subseteq Adh(\Omega)$

Como u es uniformemente continua en $Adh(\Omega)$ y $Adh(A)$ es compacto, entonces u es uniformemente continua en $Adh(A)$. En particular, u es uniformemente continua en A. $\therefore u \in C^0(\bar{\Omega})$.

Así, se tiene la siguiente inclusión: $C^0(Adh(\Omega)) \subseteq C^0(\bar{\Omega})$

Por otro lado. $u \in C^0(\bar{\Omega})$. Existe $v \in C^0(Adh(\Omega))$ tal que $v|_{\Omega} = u$.

Esto quiere decir que todas las funciones de $C^0(\bar{\Omega})$ pueden ser extendidas de forma única a $Adh(\Omega)$ continuamente.

Por lo tanto, podemos definir

$$\widetilde{C^0(\bar{\Omega})} = \{ v \in C^0(Adh(\Omega)) : v \text{ es la extensión continua de } u \in C^0(\bar{\Omega}), \text{ para cualquier } u \in C^0(\bar{\Omega}) \}$$

$$\Rightarrow \widetilde{C^0(\bar{\Omega})} \equiv C^0(Adh(\Omega))$$

Haciendo uso de la misma notación para u y su extensión

$$C^0(\Omega) = C^0(Adh(\Omega))$$

Por lo tanto,

$C^0(\bar{\Omega})$: Espacio de funciones continuas en Ω con extensión continua a la $Adh(\Omega)$.

* Definición.

Para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$C^k(\bar{\Omega}) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| \leq k \quad \partial^\alpha u \in C^0(\bar{\Omega}) \}$$

$\partial^{(0,\dots,0)} u = u$.

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\bar{\Omega})$$

Note que $C^0(\bar{\Omega})$, $C^k(\bar{\Omega})$ y $C^\infty(\bar{\Omega})$ s.e.v. de $C^\infty(\Omega)$ (no normados)

$C^0(\bar{\Omega})$, $C^k(\bar{\Omega})$ y $C^\infty(\bar{\Omega})$ e.v. topológicos. (espacios de Fréchet)

- Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto y acotado o funciones acotadas

$$C_b^0(\bar{\Omega}) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ y acotado} \}$$

entonces este espacio es normado con la norma $\|u\| = \max_{x \in Adh(\Omega)} |u(x)|$

Más aún, $C^0_b(\bar{\Omega})$ es un espacio de Banach.

$B(0,R)$

Observación: Si notamos

$f(x,y) = x^2+y^2$ $Adh(\Omega)$ contin

$$UC(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ es uniformemente continua en } \Omega \}$$

$f(x,y) \in C(Adh(\Omega))$

entonces

$$UC(\Omega) \subseteq C^0(\bar{\Omega}) \qquad \left| \begin{array}{l} C_{unif} \subsetneq C^0(Adh(\Omega)) \\ C_{unif} \subseteq C^0(\bar{\Omega}) \end{array} \right|$$

$$\not\supseteq$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y abierto $\quad u \in C^0(\bar{\Omega})$ pero $u \notin UC(\Omega)$

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

u es continua en $\mathbb{R}$ pero no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$

No obstante, u es uniformemente continua en subconjuntos acotados.

$$UC(\Omega) \not\supseteq C^0(Adh(\Omega))$$

$$UC(\Omega) \equiv \widehat{UC(\Omega)} \subseteq C^0(Adh(\Omega))$$

Por otro lado, podemos definir

$$C^k_b(\bar{\Omega}) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \forall |\alpha| \leq k \quad \partial^\alpha u \in C^0_b(\bar{\Omega}) \}$$

es un espacio normado con la norma

$$\|u\|_{C^k_b(\bar{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{C^0_b(\bar{\Omega})}$$

y más aún, es un espacio de Banach.

Observación: Una norma equivalente es

$$|||u||| := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{C^0_b(\bar{\Omega})}$$

Observación: Consideremos $C^1_b(\bar{\Omega})$

① ¿ $\varphi(u) := \|\nabla u\|_{C^0_b(\bar{\Omega})}$ es una norma en $C^1_b(\bar{\Omega})$?

$$\|\nabla u\|_{C^0_b(\bar{\Omega})} = \max_{x \in Adh(\Omega)} |\nabla u(x)| = \max_{x \in Adh(\Omega)} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}(x)\right)^2}$$

donde $|\cdot|$ es la norma euclídea.

φ no es norma pues si $\varphi(u) = 0$ no necesariamente $u = 0$.

② ¿ $\Psi(u) = \|u\|_{C^0_b(\bar{\Omega})}$ es una norma en $C^1_b(\bar{\Omega})$? Sí, pues es la norma de un subespacio.

Sin embargo, $(C^1_b(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0_b(\bar{\Omega})})$ no es completo.

En efecto, si consideramos $N=1$, $\Omega=(-1,1)$ y

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad u_n=\sqrt{x^n+\frac{1}{n^2}}$$

se sigue que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C_0^1(\bar{\Omega})$ pero no converge en $C_0^1(\bar{\Omega})$

En matemática una identificación entre dos espacios es la existencia de una biyección entre los espacios

Funciones regulares $\rightarrow$ función posee derivadas continuas

Jueves, 23 de noviembre de 2023

$C^0(\bar{\Omega})$, $C^0(\mathrm{Adh}(\Omega))$

$\exists!$ extensión continua a $\mathrm{Adh}(\Omega)$

$$u\in C^0(\bar{\Omega}) \Rightarrow \exists!\ \tilde{u}\in C^0(\mathrm{Adh}(\Omega))$$

$$u\in C^0(\mathrm{Adh}(\Omega)) \Rightarrow u\big|_{\Omega}\in C^0(\bar{\Omega})$$

$\tilde{u}$ extensión

$u|$ restricción

La relación entre los espacios se basa en el uso de estos «operadores»

Si $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado

$C^0(\mathrm{Adh}(\Omega))$ es un espacio de Banach con la norma $\|u\|=\sup\limits_{x\in \mathrm{Adh}(\Omega)}|u(x)| = \max\limits_{x\in \mathrm{Adh}(\Omega)}|u(x)|$

$C^0(\bar{\Omega})$ es un espacio normado con la norma

$$\|u\|=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|=\max_{x\in \mathrm{Adh}}|\tilde{u}(x)| = \max_{x\in\bar{\Omega}}|u(x)|$$

Más aún, también es un espacio de Banach

Extensión a la adherencia.

$k\in\mathbb{N}$ $\qquad C^k(\bar{\Omega})=\{u:\Omega\to\mathbb{R} \mid \forall|\alpha|\le k\ \partial^\alpha u\in C^0(\bar{\Omega})\}$

es un espacio de Banach con la norma $\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})}=\max\limits_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha u\|_{C^0(\bar{\Omega})}$

$$=\max_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\Omega}|\partial^\alpha u(x)|=\max_{|\alpha|\le k}\max_{x\in \mathrm{Adh}(\Omega)}|\partial^\alpha\tilde{u}(x)|$$

Observación

$C^\infty(\bar{\Omega})$ es un e.v. topológico no normado (con ninguna norma completa) a pesar de que Ω sea acotado.

Sección: Derivadas débiles

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

- f es continua en $[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$

  ↳ funciones Riemman Integrables **¡Notación!**

- f es continua en $[a,b] \setminus J$, $\text{card}(J) < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$

- f es continua en $[a,b] \setminus I$, $\text{card}(I) = \aleph_0 \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$ Sí

  Para esto, considere la función

$$\mathcal{U}: [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \mathcal{U}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$\mathcal{U}$ es continua en $[0,1]$ excepto en $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Teorema (Riemann - Lebesgue)

Si tenemos $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Leftrightarrow f$ es acotada y $\lambda(\{x \in [a,b] : f \text{ es discontinua en } x\}) = 0$

Ejemplo

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$$

El conjunto de puntos donde f no es continua es $[0,1]$, luego la medida de este conjunto es 1 y más aún no es Riemann integrable.

Este ejemplo muestra que existen funciones Riemann integrables (integral clásica) (Darboux Integrable) y por lo tanto se generó la necesidad de crear una nueva noción de integral [Integral de Lebesgue]

$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda = 0 \quad \text{pues} \quad f = 0 \quad \lambda\text{-c.t.p.}$$

Esto motiva el concepto de derivada débil en contraste con el de derivada clásica.

Martes, 28 de noviembre de 2023.

Integral de Riemann

↳ funciones acotadas y continuas en $[a,b]$, excepto, posiblemente, una cantidad contable de puntos

No existe la necesidad de generalizar la integral de Riemann.

Para funciones que son acotadas y

$$\lambda(\{x \in [a,b] : f \text{ no es continua en } x\}) > 0$$

se vio la necesidad de generalizar la integral (integral de Lebesgue)

Esta nueva noción de integral (integral de Lebesgue) coincide con la noción previa (integral de Riemann) cuando la función es Riemann integrable y además ambas integrales coinciden.

Esta misma idea se desea replicar para el concepto de derivada de una función.

Abstración $\leftarrow$ Extracción de las cualidades fundamentales de alguna situación

Conceptos independientes del contexto.

Ideas

- Existencia de funciones que pueden ser derivables en cierto sentido que no lo sea en el sentido clásico.
- Cambio de enfoque (partición del dominio por partición de la imagen)

Consideremos el caso $N=1$, $\Omega =]a,b[\subseteq \mathbb{R}$, $a<b$ y $u:\Omega \to \mathbb{R}$

$$u \in C^1(\overline{]a,b[}) \Rightarrow \exists!\, \tilde{u} \in C^1([a,b]) \text{ tal que } \tilde{u}\big|_{]a,b[} u$$

Luego, como

$$\tilde{u} \in C^1([a,b]) \Rightarrow \forall x \in]a,b[: \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{u}(x+h)-\tilde{u}(x)}{h} \text{ existe}$$

denotamos por

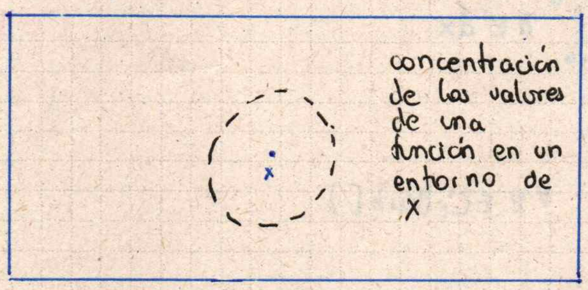
$$\tilde{u}'(x) = \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{u}(x+h)-\tilde{u}(x)}{h}$$

Realicemos un cambio de enfoque de la definición de derivada de u. (definición puntual), considerando la acción de dicha derivada sobre cierto tipo de funciones especiales. (funciones test)

Analogía (Física)

Medición de la temperatura en un punto del espacio

¿Es posible realizar esta medición en la realidad? No, la temperatura es una propiedad global de un sistema



Ω

$\simeq$ soporte de una función

$$\underbrace{\int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx}$$

Acción de la temperatura sobre φ.

Depende de las características del instrumento de medición

- Existen distintos conjuntos de funciones test (dependerá de las necesidades que tengamos)

Notar que φ tenderá a estar «concentrada» cerca de la ubicación del instrumento de medida y será cero una vez que este suficientemente lejos de la bombilla.

- A las φ se las denomina funciones test

Retornando a nuestro objetivo inicial, consideramos la acción de la derivada de u sobre una función $\varphi \in C_c^1(]a,b[)$

$u \in C^1([a,b])$ y $\varphi \in C^1_c(]a,b[)$

Teorema de integral por partes

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)\,dx = u(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx$$

$$\int_a^b u'(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx = [*]$$

u' es la derivada en el sentido usual

$$[*] = u\tilde{\varphi}\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\tilde{\varphi}'(x)\,dx$$ ← Haciendo uso de la extensión única

$$= u(b)\cancelto{0}{\tilde{\varphi}(b)} - u(a)\cancelto{0}{\tilde{\varphi}(a)} - \int_a^b u(x)\tilde{\varphi}'(x)\,dx$$ ← Pues $supp(\varphi) = supp(\tilde{\varphi})$

$$= -\int_a^b u(x)\tilde{\varphi}'(x)\,dx.$$

$supp(\varphi') \subseteq supp(\varphi)$

Por lo tanto, se sigue que

$$\int_a^b u'(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx = -\int_a^b u(x)\tilde{\varphi}'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx$$

$$\int_{supp(\varphi)} u'(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx + \int_{[a,b]\setminus supp(\varphi)} \cancelto{0}{u'(x)\tilde{\varphi}(x)}\,dx$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\forall \varphi \in C^1_c(a,b) : \int_a^b u'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx$$

El caso $\varphi \in C^1_c(]a,b[)$ nos limita solo a la primera derivada. Por eso cambiamos a $C^\infty(]a,b[)$

Proposición Dado $u \in C^1([a,b])$, se cumple que

$$\forall \varphi \in C_c^{1(\infty)}(]a,b[) : \int_a^b u'\varphi\,dx = -\int_a^b u\varphi'\,dx \quad [A]$$

Por otro lado, si $u \in C^1([a,b])$ y existe $v \in C^0([a,b])$ tal que

$$\forall \varphi \in C_c^{1(\infty)}(]a,b[) : \int_a^b v\varphi\,dx = -\int_a^b u\varphi'\,dx \quad [B]$$

entonces $v = u'$.

En efecto, como

$$\int_a^b u\varphi'\,dx = -\int_a^b u'\varphi\,dx \qquad \forall \varphi \in C_c^{1(\infty)}(]a,b[)$$

entonces

$$\int_a^b v\varphi\,dx = \int_a^b u'\varphi\,dx \qquad \forall \varphi \in C_c^{1(\infty)}(]a,b[)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{(v-u')}_{[**]}\varphi\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^{1(\infty)}(]a,b[)$$

Teorema Fundamental del Cálculo de variaciones

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y abierto y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Si $\int_\Omega u\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $u = 0$ c.t.p. en Ω.

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \forall K \subset\subset \Omega,\ u \in L^1(K) \} \quad \text{e.v. real.}$$

Utilizando el resultado anterior y dado que

$$\left.\begin{array}{l} v \in C^0([a,b]) \\ u' \in C^0([a,b]) \end{array}\right\} \Rightarrow v - u' \in C^0([a,b]) \in L^1_{loc}([a,b]).$$

- Si $|\Omega| < \infty$ $L^\infty(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ $\forall p \geq 1$
- En general $L^\infty(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$

Por lo tanto, $u - v' = 0$, c.t.p. y dado que son continuas

$$u = v'$$

Conclusión: Por [A] y [B] se ha demostrado que la definición puntual de derivada de una función coincide con una definición integral dada en [B].

Ahora, consideremos $N \geq 2$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y abierto.

$$u \in C^1(\overline{\Omega}) \Rightarrow \exists!\ \tilde{u} \in C^1(\mathrm{Adh}(\Omega)) \quad \tilde{u}\big|_\Omega = u.$$

Consideremos el caso de las derivadas direccionales

$$x \in \Omega \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x + te_i) - u(x)}{t}$$

Se puede relajar las hipótesis de la frontera a frontera de Lipschitz.

Teorema de Gauss-Green.

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado con frontera suficientemente regular* y $u \in C^1(\Omega)$, se tiene que

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} u(x) . n_i \, dS(x) \qquad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

donde $n = (n_1, \dots, n_N)$ es el vector normal exterior unitario a la frontera de Ω ($\partial\Omega$) y n_i es la componente i-ésima de n.

$$\forall x \in \partial\Omega \qquad n(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$$

Teorema de integración por partes (caso $N \geq 1$)

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado con frontera de clase 1, y $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ se tiene que

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \qquad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, v(x)\, dx = -\int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i \, dx$$

---

* La frontera del conjunto puede ser parametrizada localmente por funciones suficientemente regulares. (Para nuestro caso C^1)

Demostración.

Notar que $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ y por el teorema de Gauss-Green

$$\forall i \in \{1,\dots,n\} \quad \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(uv)\,dx = \int_{\partial\Omega} u v n_i \, ds(x)$$

$$\parallel$$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Observación:

1) Dado que $C_c^1(\Omega) \subseteq C^1(\Omega)$, entonces para todo $u \in C^1(\Omega)$ y $v = C_c^1(\Omega)$

$\forall i \in \{1,\dots,N\}$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u \cancel{v}^{0} n_i \, ds(x)$$

$$= -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

$$\int_\Omega g \varphi \, dx = \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

2) Notar que si $v \in C_c^1(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx, \quad \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}$$ son finitas

si $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(\Omega)$.

El caso más general se tiene en el contexto de distribuciones.

$L^1_{loc}(\Omega)$ es el caso más general para funciones.

Martes, 28 de noviembre de 2023 (Clase de la tarde)

Definición. - Derivada débil - Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y abierto, y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ($u \in L^1_{loc}(\Omega)$)

Se dice que u posee derivada débil (de 1er orden) respecto a x_i, (en Ω) $i \in \{1,\dots,N\}$, si existe $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_i \varphi \, dx = -\int u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

Se denotará a la derivada débil de u respecto a x_i usando la misma notación que para la derivada parcial clásica respecto a x_i, es decir

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

El contexto aclarará qué tipo de derivada denotamos con esta notación.

Proposición Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ posee derivada débil respecto a x_i, entonces esta es única salvo que se redefina en conjuntos de medida nula.

Demostración.

Sean $v_i^{(1)}$ y $v_i^{(2)}$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ tales que

$$\forall \varphi \in C^1_c(\Omega) : \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v_i^{(1)} \varphi\, dx$$

$$\forall \varphi \in C^1_c(\Omega) : \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v_i^{(2)} \varphi\, dx$$

$$\therefore \forall \varphi \in C^1_c(\Omega) : \int_\Omega v_i^{(1)} \varphi\, dx = \int_\Omega v_i^{(2)} \varphi\, dx$$

$$\therefore \forall \varphi \in C^1_c(\Omega) : \int_\Omega (v_i^{(1)} - v_i^{(2)}) \varphi\, dx = 0$$

$$\therefore \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega) : \int_\Omega \underbrace{(v_i^{(1)} - v_i^{(2)})}_{\in L^1_{loc}(\Omega)} \varphi\, dx = 0$$

$$\overset{\text{TFCV}}{\Rightarrow} \quad v_i^{(1)} = v_i^{(2)} \quad \text{c.t.p.}$$

Ejemplos

1) Sea $u:]-1,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por $u(x) = |x|$.

P.D. $u \in L^1_{loc}(]-1,1[)$.

P.D. Para todo compacto $K \subset]-1,1[$ (compactamente contenido). $\int_K |u| < \infty$

Consideremos $K = [\alpha, \beta]$ con $-1 < \alpha, \beta < 1$. (No es necesario)

Como $u \in C]-1,1[$, entonces $u \in R(K)$. Así, $u \in L^1_{loc}(K)$ y por tanto $u \in L^1_{loc}(]-1,1[)$

$L^1_{loc}(\Omega) = \{ u: \Omega \to \mathbb{R} \mid \forall K \subseteq \Omega$ compacto, $u \in L^1(K) \}$

$\forall A \subset\subset \Omega,\ u \in L^1(A)$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$ $\qquad \int_A |u|\, dx = \int_\Omega |u| \chi_A\, dx \leq \int_\Omega |u| \chi_{\bar{A}}\, dx = \int_{\bar{A}} |u|\, dx$

De lo anterior, se deduce que, si $A \subseteq \Omega$

$$L^1(\Omega) \Rightarrow L^1(A)$$

Sea $\varphi \in C^1_c(]-1,1[)$

$$\int_{]-1,1[} u \varphi'\, dx = \underbrace{\int_{]-1,1[} |x| \varphi'(x)}_{\substack{u \in C^0(]-1,1[) \\ \text{pues } u \notin C^1(]-1,1[) \\ \text{pues } u \text{ no es diferenciable} \\ \text{en el sentido clásico }]-1,1[}} = \int_{]-1,0[} (-x) \varphi'(x)\, dx + \int_{[0,1[} x \varphi'(x)\, dx$$

Notemos que

$\int_{]-1,0[} (-x) \varphi'(x)\, dx$ $\qquad v(x) = -x$ es continua en $]-1,0[$. Más aún, v es uniformemente continua en $]-1,0[$.

$$\Rightarrow \exists!\ \tilde{v} : [-1,0] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua } y \ \tilde{v}\Big|_{]-1,0[} = v$$

v es diferenciable en $]-1,0[\ \Rightarrow \ v'(x) = -1 \ , \ x \in]-1,0[$

v' es uniformemente continua en $]-1,0[$

$$\Rightarrow \exists!\ \tilde{v}' : [-1,0] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua } y \ \tilde{v}'\Big|_{]-1,0[} = v'$$

$$\tilde{v}' = (\tilde{v})' \quad (\text{Ejercicio})$$ ¡Revisar!

$$\therefore \ \tilde{v} \in C^1([-1,0]) \qquad \varphi \in C^1_c(]-1,1[)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists!\ \tilde{\varphi} \in C^1([-1,1])$$

$$\tilde{\varphi}\Big|_{[-1,0]} \in C^1([-1,0])$$

Con esto, podemos escribir

$$\int_{-1}^{0} \tilde{v}\tilde{\varphi}'\,dx = \tilde{v}\tilde{\varphi}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \tilde{v}'\tilde{\varphi}\,dx$$

$$= \tilde{v}(0)\tilde{\varphi}(0) - \tilde{v}(-1)\cancelto{0}{\tilde{\varphi}(-1)} - \int_{-1}^{0} \tilde{v}'\tilde{\varphi}\,dx$$

$$= \tilde{v}(0)\tilde{\varphi}(0) - \int_{-1}^{0} (-1)\tilde{\varphi}(x)\,dx$$

Análogamente, para la integral restante

$$\int_0^1 x\varphi'(x)\,dx$$

$$\int_0^1 \tilde{\omega}\tilde{\varphi}'\,dx = \tilde{\omega}(1)\tilde{\varphi}(1) - \tilde{\omega}(0)\tilde{\varphi}(0) - \int_0^1 \tilde{\omega}'\tilde{\varphi}\,dx$$

$$= -\tilde{\omega}(0)\tilde{\varphi}(0) - \int_0^1 \tilde{\varphi}\,dx$$

Por tanto, la integral

$$\int_{-1}^{0} \tilde{v}\tilde{\varphi}'\,dx + \int_0^1 \tilde{\omega}\tilde{\varphi}' = \cancelto{0}{\tilde{v}(0)}\tilde{\varphi}(0) - \cancelto{0}{\tilde{\omega}(0)}\tilde{\varphi}(0) + \int_{-1}^{0}\tilde{\varphi}(x)\,dx - \int_0^1 \tilde{\varphi}(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0}\tilde{\varphi}(x)\,dx - \int_0^1 \tilde{\varphi}(x)\,dx$$

$$= -\left(\int_{-1}^{0} (-1)\tilde{\varphi}(x)\,dx + \int_0^1 \tilde{\varphi}\,dx\right)$$

$$= -\int_{-1}^{1} f(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx \qquad \text{donde} \quad f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-1,0[\\ 1 & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

$$= -\int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)\,dx \ .$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\therefore \int_{\mathbb{R}} u\varphi' \, dx = -\varphi(0)$$

$$\exists v = -\int_{\mathbb{R}} v\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$$

Nos realizamos la pregunta

$$¿\, \exists v \in L^1_{loc}(\Omega) : \int_{\mathbb{R}} v\varphi \, dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \, ?$$

¡δ_0 es una distribución regular!

NO lo es,
¡δ_0 es una distribución singular!

Tarea.

Por contradicción, suponer que existe $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} v\varphi \, dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Al llegar a la contradicción, δ_0 no es una distribución regular.

$\therefore \delta_0$ no puede ser identificado con una función en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$

En conclusión, u no posee derivada débil en $\mathbb{R}$, aún cuando $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

En el sentido de las distribuciones

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \qquad \text{Incorrecto.}$$

Induce un subespacio de distribuciones

Ejemplo 2) Considere $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$, excepto en $x_0 \in \mathbb{R}$, donde x_0 es un punto de discontinuidad de primera especie o de salto, tanto para u como para u'.

Si consideramos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es un punto de discontinuidad de salto o de primera especie si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

existen (son finitos) pero sus valores no coinciden.

El salto de la función f en x_0, denotado por $[u](x_0)$ o $J_u(x_0)$, se define como

$$[f](x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Analizas si u posee derivada débil

Es claro que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Sea $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$, arbitraria pero fija

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi' \, dx = \int_{-\infty}^{x_0} u\varphi' \, dx + \int_{x_0}^{\infty} u\varphi' \, dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_a^{x_0^-} u\varphi' \, dx + \lim_{b \to \infty} \int_{x_0^+}^{\infty} u\varphi' \, dx$$

$$\int_{-1}^{1} u \varphi' \, dx = \int_{-1}^{1} f \varphi \, dx$$

Notar que $f \in L^1_{loc}(]-1,1[)$

f es acotada en $(-1,1)$ y continua en $(-1,1)$ excepto $x=0$

Sea $K \subseteq (-1,1)$ compacto $\quad f$ es acotada en K y continua en K, excepto posiblemente en $x=0$ $(0 \in K)$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{R}(K) \Rightarrow f \in L^1(K)$$

Así, u posee derivada débil en $(-1,1)$, cuya derivada débil u' está dada por

$$u' : (-1,1) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1[\\ -1 & \text{si } x \in]-1,0[\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}\Big|_{(-1,1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

λ_N medida de Lebesgue N-dimensional

$A \subseteq E$. E $N-1$ dimensional

$\lambda_N(A) = 0$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, d\lambda_N(x) = \int_{\partial\Omega} u \, n_i \, dS(x)$$

Medida de superficie $N-1$ dimensional

Miércoles, 29 de noviembre de 2023.

Ejemplo:
$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Analizar si u posee derivada débil (en $\mathbb{R}$)

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ pues u es acotada y continua excepto en $x=0$

$$\therefore u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

Sea $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R})$, arbitraria pero fija.

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi' \, dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot \varphi' \, dx}^{\,0} + \int_{0}^{\infty} 1 \cdot \varphi' \, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_0^b \varphi' \, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\varphi(b) - \varphi(0) \right)$$

$$= \lim_{b \to \infty} \varphi(b) - \lim_{b \to \infty} \varphi(0) = -\varphi(0).$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \lim_{c \to x_0^-} \int_a^c u \varphi' \, dx + \lim_{b \to \infty} \lim_{d \to x_0^+} \int_d^b u \varphi' \, dx \qquad [*]$$

Notemos que

$$u(x_0) = \begin{cases} u_1(x) & \text{si } x < x_0 \\ u_2(x) & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

luego, considerando la extensión

$$u_1 :]-\infty, x_0] \to \mathbb{R} \quad y \quad u_2 : [x_0, \infty[\to \mathbb{R},$$

entonces, aplicando integración por partes a [*] y notando a la extensión con la misma función

$$\int_a^c u(x) \varphi'(x) \, dx = \int_a^c u_1(x) \varphi'(x) \, dx$$

$$= u_1(x) \varphi(x) \Big|_a^c - \int_a^c u_1'(x) \varphi(x) \, dx$$

Análogamente,

$$\int_d^b u(x) \varphi'(x) \, dx = \int_d^b u_2(x) \varphi'(x) \, dx$$

$$= u_2(x) \varphi(x) \Big|_d^b - \int_d^b u_2'(x) \varphi(x) \, dx$$

Por lo tanto, de [*]

- $$\lim_{a \to -\infty} \lim_{c \to x_0^-} \int_a^c u \varphi' \, dx = \lim_{a \to \infty} \lim_{c \to x_0^-} \left(u_1(c) \varphi(c) - u_1(a) \cancel{\varphi(a)}^{0} - \int_a^c u_1'(x) \varphi(x) \, dx \right)$$

$$= \lim_{c \to x_0^-} \left(u(c) \varphi(c) - \lim_{a \to \infty} \int_a^c u_1'(x) \varphi(x) \, dx \right)$$

- $$\lim_{b \to \infty} \lim_{d \to x_0^+} \int_d^b u(x) \varphi'(x) \, dx = \lim_{b \to \infty} \lim_{d \to x_0^+} \left(u_2(b) \cancel{\varphi(b)}^{0} - u_2(d) \varphi(d) - \int_d^b u_2'(x) \varphi(x) \, dx \right)$$

$$= \lim_{d \to x_0^+} \left(- u_2(d) \varphi(d) - \lim_{b \to \infty} \int_d^b u_2'(x) \varphi(x) \, dx \right)$$

Uniendo las integrales

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi' \, dx = \lim_{c \to x_0^-} \left(u_1(c) \varphi(c) - \lim_{a \to \infty} \int_a^c u_1'(x) \varphi(x) \, dx \right)$$

$$+ \lim_{d \to x_0^+} \left(- u_2(d) \varphi(d) - \lim_{b \to \infty} \int_d^b u_2'(x) \varphi(x) \, dx \right)$$

$$= \lim_{c \to x_0^-} u_1(c) \varphi(c) - \int_{-\infty}^{x_0^-} u_1'(x) \varphi(x) \, dx + \lim_{d \to x_0^+} u_2(d) \varphi(d) - \int_{x_0^+}^{b} u_2'(x) \varphi(x) \, dx$$

$$= \lim_{c \to x_0^-} \varphi(c)\, u(c) - \lim_{d \to x_0^+} u(d)\,\varphi(d) - \int_{-\infty}^{\infty} u'(x)\,\varphi(x)\, dx$$

$$= \varphi(x_0) \lim_{c \to x_0^-} - \varphi(x_0) \lim_{d \to x_0^+} u(d) - \int_{\mathbb{R}} u'\varphi\, dx$$

$$= -\varphi(x_0) \left(\lim_{d \to x_0^+} u(d) - \lim_{c \to x_0^-} u(c) \right) - \int_{\mathbb{R}} u'\varphi\, dx$$

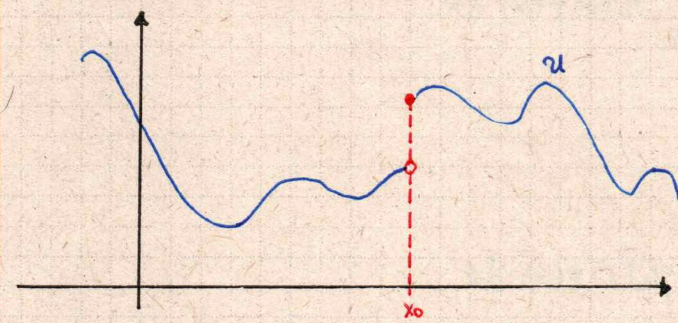
$$= -\varphi(x_0)\, [u](x_0) - \int_{\mathbb{R}} u'\varphi\, dx$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi'\, dx = -\varphi(x_0)[u](x_0) - \int_{\mathbb{R}} u'\varphi\, dx$$

$$= -\left(\varphi(x_0)[u](x_0) + \int_{\mathbb{R}} u'\varphi\, dx \right)$$

Jueves, 30 de noviembre de 2023.



Sea $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Sea $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi'\, dx =$$

Teorema de integración por partes generalizado

[funciones que son continuamente diferenciables a trozos]

Existencia de un cjto finito de puntos de discontinuidad de salto!

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi'\, dx = \int_{-\infty}^{x_0} u\varphi'\, dx + \int_{x_0}^{\infty} u\varphi'\, dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_a^{x_0^-} u\varphi'\, dx + \lim_{b \to \infty} \int_{x_0^+}^{b} u\varphi'\, dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[u\varphi \Big|_a^{x_0^-} - \int_a^{x_0^-} u'\varphi\, dx \right] + \lim_{b \to \infty} \left[u\varphi \Big|_{x_0^+}^{b} - \int_{x_0^+}^{b} u'\varphi\, dx \right]$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\lim_{x \to x_0^-} u(x)\varphi(x) - u(a)\varphi(a) - \int_a^{x_0^-} u'\varphi\, dx \right]$$

$$+ \lim_{b \to \infty} \left[u(b)\varphi(b) - \lim_{x \to x_0^+} u(x)\varphi(x) - \int_{x_0^+}^{b} u'\varphi\, dx \right]$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\varphi(x_0) \lim_{x \to x_0^-} u(x) - u(a)\varphi(a) - \int_a^{x_0^-} u'\varphi\, dx \right]$$

$$+ \lim_{b \to \infty} \left[u(b)\varphi(b) - \varphi(x_0) \lim_{x \to x_0^-} u(x) - \int_{x_0^+}^{\infty} u'\varphi\, dx \right]$$

$$= \varphi(x_0) \lim_{x\to x_0^-} u(x) - \int_{-\infty}^{x_0^-} u'\varphi\, dx - \varphi(x_0) \lim_{x\to x_0^+} u(x) - \int_{x_0^+}^{\infty} u'\varphi\, dx$$

$$= -\varphi(x_0)\,[u](x_0) - \int_{\mathbb{R}} u'\varphi\, dx$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi'\, dx = -\Big[\int_{\mathbb{R}} u'\varphi\, dx + \underbrace{\varphi(x_0)\,[u](x_0)}_{= \int_{\mathbb{R}} v\varphi\, dx} \Big]$$

Si u tuviera derivada débil y notando u_c' la derivada clásica, se tendría que

$$u' = u_c' + [u](x_0)\, v$$

Esto no es posible pues sería la delta de Dirac

Todo lo realizado arriba hace uso del teorema de integración por partes generalizado.

Sin hacer uso del resultado mencionado, podemos realizar lo siguiente

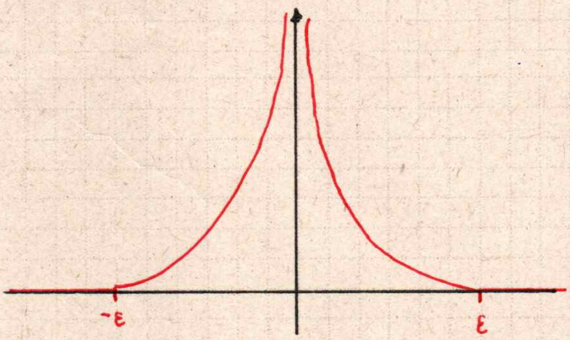
$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi'\, dx = \int_{-\infty}^{x_0-\frac{1}{n}} u\varphi'\, dx + \underbrace{\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} u\varphi'\, dx}_{\to 0} + \int_{x_0+\frac{1}{n}}^{\infty} u\varphi'\, dx \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Teo. Integración por partes usual

Ahora, consideremos la siguiente función

$$u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto u(x,y) = \begin{cases} \ln\left|\ln \|(x,y)\|_2\right| & \text{si } 0 < \|(x,y)\|_2 < \frac{1}{e} \\ 0 & \text{si } \|(x,y)\|_2 \geq \frac{1}{e} \end{cases}$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma euclideana



u es una función no acotada y discontinua escencialmente.

$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ No

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ Sí

$L^p(\Omega) \subsetneq L^1_{loc}(\Omega)$

$\forall p \in L^1_{loc}(\Omega)$.

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x,y)|^2\, d(\lambda\times\lambda)(x,y) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x,y)|^2\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\ln\left|\ln \|(x,y)\|_2\right| \right)^2 d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$$

$$= \int_0^{1/e} \int_0^{2\pi} \left(\ln|\ln(r)| \right)^2 r\, d\theta\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{1/e} \ln\left(|\ln(r)|\right)^2 r\, dr$$

$$\leq 2\pi \int_0^{1/e} (\ln r)^2 r\, dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{5}{4e^2}\right) < \infty$$

Para $0 < r < \frac{1}{e}$ $\quad |\ln(r)| = -\ln(r) = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$

$$e < \frac{1}{r} \Rightarrow 1 < \ln\left(\frac{1}{r}\right) < \frac{1}{r}$$

$$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right) < \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ln(|\ln r|) < \ln\left(\frac{1}{r}\right) = -\ln(r)$$

$$\ln\left(|\ln(r)|\right)^2 < \left(\ln(r)\right)^2$$

Por lo tanto, $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ y por lo tanto $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Veamos si u posee derivada débil respecto a las variables x e y.

Sea $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d(\lambda\times\lambda)(x,y) = \int_{B_2(0,\frac{1}{e})} u \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d(\lambda\times\lambda)(x,y)$$

$$u \in C^1\left(\overline{B_2(0,\tfrac{1}{e})}\right) \quad \varphi \in C^1\left(\overline{B_2(0,\tfrac{1}{e})}\right)$$

Notar que u posee derivadas parciales en el sentido usual en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi) - \frac{\partial u}{\partial x}\varphi$$

$$\int_{B_2(0,\frac{1}{e})} u \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d(\lambda\times\lambda)(x,y) = \int_{B_2(0,\frac{1}{e})} \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)\, d(\lambda\times\lambda)(x,y) - \int_{B_2(0,1/e)} \frac{\partial u}{\partial x}\varphi\, d(\lambda\times\lambda)(x,y)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)\, d(\lambda\times\lambda)(x,y)$$

$$- \int$$

donde

$\Omega_\varepsilon = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \varepsilon \leq \|(x,y)\|_2 \leq \frac{1}{e}\}$

Extensión de la derivada.

Sea $u \in C^1(\overline{(a,b)})$. Muestre $\widetilde{u'} = \widetilde{u}'$.

Por definición, se tiene que

- $\exists!\ \tilde{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{u}|_{(a,b)} = u$ continua
- $\exists!\ \widetilde{u'} : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{u'}|_{(a,b)} = u'$ continua.

Por lo anterior, se tiene que

$$\widetilde{u'} = \widetilde{u}' \quad \text{en} \quad (a,b)$$

Así, para $x = a$, notemos que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (a,b) \quad \text{y} \quad x_n \to x$$

Así, por el teorema del valor medio aplicado a $\tilde{u}$ en el intervalo (a, x_n), existe $c_n \in (a, x_n)$ tal que

$$\frac{\tilde{u}(x_n) - \tilde{u}(a)}{x_n - a} = \tilde{u}'(c_n) \qquad [*]$$

luego por teorema de estricción, se tiene que

$$c_n \to a \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

De donde, por lo anterior existe la derivada de $\tilde{u}$ en a. Análogamente, se muestra que existe la derivada en b, es decir, existen

$$\tilde{u}'(a) \quad \text{y} \quad \tilde{u}'(b)$$

Por otro lado, de [*] equivalentemente se tiene que

$$\frac{u(x_n) - \tilde{u}(a)}{x_n - a} = \tilde{u}'(c_n) = \tilde{u}'(c_n)$$

por lo que, tomando el límite cuando $n \to \infty$, se sigue que

$$\tilde{u}'(a) = \tilde{u}'(a)$$

como se quería (análogamente se tiene para $x = b$)

Martes, 5 de diciembre de 2023.

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto u(x,y) = \begin{cases} \ln|\ln \|(x,y)\|_2| & \text{si } 0 < \|(x,y)\|_2 < \frac{1}{e} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pues $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$

Retomando lo anterior, veamos que $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Basta ver que $\frac{\partial u}{\partial x} L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln \|(x,y)\|_2 \, \|(x,y)\|_2^2} & 0 \leq \|(x,y)\|_2 < \frac{1}{e} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

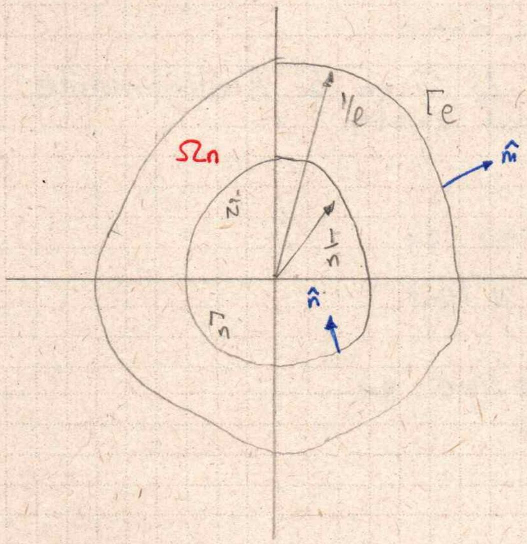
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx &= \int_{B(0,1/e)} \frac{|x|^2}{\ln(\|(x,y)\|)^2 \, \|(x,y)\|_2^4} \, dx \\
&\leq \int_{B(0,1/e)} \frac{\|(x,y)\|_2^2}{\ln(\|(x,y)\|^2) \, \|(x,y)\|_2^4} \, dx \\
&= \int_0^{1/e} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{(\ln r)^2 r^4} \cdot r \, d\theta \, dr \\
&= 2\pi \int_0^{1/e} \frac{dr}{r(\ln(r))^2} < \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\mathbb{R}^2)
\end{aligned}$$

Por lo anterior

$$\int_{B(0,1/e)} u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dx = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_n} \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi) \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi \, dx$$

Entonces $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)\,dx = \begin{cases} u \in C^1(\overline{\Omega}_n) \\ \varphi \in C^1(\overline{\Omega}_n) \end{cases}$ y Ω_n es un objeto de clase C^1

Aplicación del teorema de Gauss-Green $\displaystyle = \int_{\Gamma_n} u\varphi\, \hat{n}_x\, dS(x) + \cancel{\int_{\Gamma_e} u\varphi\, \hat{n}_x\, dS(x)}$ $u=0$ sobre Γ_e



Luego

$$\int_{\Gamma_n} |u\varphi\, \hat{n}_x|\, dS(x) \le \int_{\Gamma_n} |u||\varphi|\, dS(x)$$

$$\le \max_{x \in \overline{\Gamma}_n} |\varphi(x)| \int_{\Gamma_n} |u|\, dS(x)$$

En Γ_n $\|(x,y)\| = \frac{1}{n}$

$$\int_{\Gamma_n} |u|\, dS(x) = \int_{\Gamma_n} \left| \ln\left|\ln \frac{1}{n}\right| \right| dS(x)$$

$$= \left| \ln\left|\ln \frac{1}{n}\right| \right| \int_{\Gamma_n} dS(x)$$

$$= \frac{2\pi}{n} \left| \ln\left|\ln \frac{1}{n}\right| \right|$$

$$0 < \frac{1}{n} \left| \ln\left|\ln \frac{1}{n}\right| \right| < \left|\ln \frac{1}{n}\right| \cdot \frac{1}{n}$$

Por lo tanto

$$\left| \int_{\Gamma_n} |u\varphi\, \hat{n}_x|\, dS(x) \right| \le \int_{\Gamma_n} |u\varphi\, \hat{n}_x|\, dS(x)$$

$$\le 2\pi \max_{x \in \overline{B}(0,\frac{1}{e})} |\varphi(x)| \left| \frac{1}{n} \right| \left| \ln\left|\ln \frac{1}{n}\right| \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Por lo tanto, se ha probado que

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi$$

En conclusión

$$\left.\begin{array}{l} u \in L^2(\mathbb{R}^2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\mathbb{R}^2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\mathbb{R}^2) \end{array}\right\} \text{espacio de Sobolev}$$

Observaciones

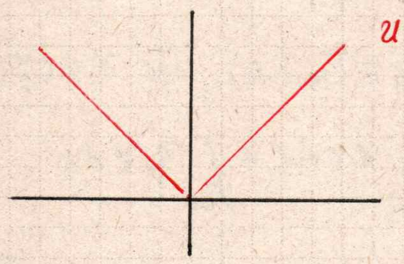
1) Todas las funciones que poseen discontinuidad de salto no son derivables débilmente

2) Las funciones que poseen discontinuidad escencial pueden o no ser derivables débilmente

$$u = \begin{cases} \ln|\ln \|(x,y)\|| & \text{si } x \in B(0,1/e) \\ 0 & \end{cases}$$

$u = \dfrac{1}{\|x\|^a}$ con $a+1 > N$ no es débilmente derivable

3) ¿Toda función continua es débilmente derivable (en su dominio)?



u es diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

u es débil derivable en $\mathbb{R}$

Función de Weierstrass: Función continua que no es diferenciable en ningún punto.
¿Tiene derivada débil?

Derivadas débiles de orden superior

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío y abierto, y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Se dice que u posee derivada débil α-ésima (o de orden $|\alpha|$) si existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \qquad \int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, dx$$

$$\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}, \quad |\alpha| \text{ el orden del multíndice de } \alpha \in \mathbb{N}_0^N$$

Notar que $\varphi \in C_c^{|\alpha|}(\Omega)$ también se puede utilizar como función test en la definición dada.

El hecho de utilizar funciones test en $C_c^\infty(\Omega)$ es para evitar aumentar la regularidad de las funciones test si se desea hablar de derivadas de orden mayor.

Observaciones

1) Se denotará por $v = \partial^\alpha u$ a la derivada débil α-ésima de u.
2) Si $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, entonces u posee todas sus derivadas débiles hasta el orden $|\alpha|$ que coinciden con las derivadas parciales clásicas.
3) Para que una función posea derivada débil $|\alpha|$ esta no necesita poseer derivada débil de órdenes menores

Proposición Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, posee derivada débil de orden $|\alpha|$, esta es única, salvo una redefinición en conjuntos de medida nula.

Proposición. Sean $u_1, u_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ que poseen derivadas débiles de orden $|\alpha|$, se tiene que

$u_1 + u_2$ posee derivada débil de orden $|\alpha|$ y

$$\partial^\alpha (u_1 + u_2) = \partial^\alpha u_1 + \partial^\alpha u_2$$

Además, para todo $c \in \mathbb{K}$ y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ posee derivada débil de orden $|\alpha|$, $c \cdot u$ posee derivada débil de orden $|\alpha|$

$$\partial^\alpha (cu) = c\, \partial^\alpha u$$

Operador derivada débil de orden $|\alpha|$

$$\partial^\alpha : L^1_{loc}(\Omega) \longrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$$
$$u \longmapsto \partial^\alpha u$$

Demostración

Como $u_1, u_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces para todo $c \in \mathbb{K}$ $\; cu_1 + u_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega (cu_1 + u_2)\varphi \, dx = \int_\Omega c u_1 \varphi \, dx + \int_\Omega u_2 \varphi \, dx = c\int_\Omega u_1 \varphi \, dx + \int_\Omega u_2 \varphi \, dx$$

$$= c(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \partial^\alpha u_1 \varphi \, dx + (-1)^\alpha \int_\Omega \partial^\alpha u_2 \varphi \, dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \underbrace{(c\,\partial^\alpha u_1 + \partial^\alpha u_2)}_{\in L^1_{loc}(\Omega)} \varphi \, dx$$

Así, $cu_1 + u_2$ posee derivada débil α-ésima, denotada por $\partial^\alpha(cu_1 + u_2)$, y por unicidad c.t.p.

$$\partial^\alpha(cu_1 + u_2) = c\,\partial^\alpha(u_1) + \partial^\alpha(u_2)$$

Proposición: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío.
Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ posee derivada débil α-ésima (en Ω), entonces
$\forall \Omega' \subseteq \Omega$ abierto medible : u posee derivada débil α-ésima (en Ω')

Supongamos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ posee derivada débil α-ésima en Ω.
P.D. $\forall \tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ abierto u posee derivada débil α-ésima, i.e.
Existe $\hat{v} \in L^1_{loc}(\tilde{\Omega})$ tal que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\tilde{\Omega}) \qquad \int_{\tilde{\Omega}} u\,\partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\tilde{\Omega}} \hat{v}\varphi \, dx \qquad [*]$$

Puesto que u posee derivada débil en Ω, existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \qquad \int_\Omega u\,\partial^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi \, dx$$

Entonces, notanto que $v \in L^1_{loc}(\tilde{\Omega})$, pues con la topología de subespacio, todo compacto en $\tilde{\Omega}$ es compacto en Ω, y por lo tanto si v es integrable en todo subconjunto compacto de $\tilde{\Omega}$ y así se sigue que $[*]$, luego como $\tilde{\Omega}$ es medible, la integral está bien definida. con lo que se sigue el resultado.

Más aún, si $\tilde{\Omega}$ es abierto es medible pues trabajamos en la σ-álgebra de Borel

Miércoles, 6 de diciembre de 2023.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. $u_1, u_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $c \in \mathbb{K}$.
Si u_1, u_2 poseen derivadas débiles α-ésimas
$\Rightarrow$ $c_1 u_1 + u_2$ poseen derivada débil α-ésima y
$$\partial^\alpha(cu_1 + u_2) = c\,\partial^\alpha u_1 + \partial^\alpha u_2$$

Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, definimos

$$W_\alpha = \{ u \in L^1_{loc}(\Omega) : u \text{ posee derivada débil } \alpha\text{-ésima} \} \subsetneq L^1_{loc}(\Omega)$$

el cual es un s.e.v. de $L^1_{loc}(\Omega)$, en efecto $0 \in W_\alpha$.

Operador derivada débil α-ésima

$$\partial^\alpha : W_\alpha \to L^1_{loc}(\Omega)$$
$$u \mapsto \partial^\alpha u$$

$C^1(\Omega)$

$$D : C^0(\Omega) \to C^0(\Omega)$$
$$u \mapsto Du$$

Con lo anterior, se sigue que ∂^α es lineal

Proposición ∂^α es un operador lineal cerrado

P.D. $(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $W_\alpha)$ $(u_n \to u$ en $L^1_{loc}(\Omega)$, $\partial^\alpha u_n \to v$ en $L^1_{loc}(\Omega)$
$\Rightarrow u \in W_\alpha$, $\partial^\alpha u = v)$

Recuerde que $L^1_{loc}(\Omega)$ no es normado, solo es un espacio de Fréchet.

Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $L^1_{loc}(\Omega)$ y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$u_n \to u \text{ en } L^1_{loc}(\Omega) \iff (\forall K \subsetneq \Omega \text{ compacto}) (\underbrace{u_n \to u \text{ en } L^1(K)}_{\|u_n - u\|_{L^1(K)} \to 0})$$

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en W_α tal que

$$u_n \to u \quad \text{en } L^1_{loc}(\Omega) \iff \forall K \subseteq \Omega \text{ comp.: } u_n \to u \text{ en } L^1(K)$$
$$\partial^\alpha u_n \to v \quad \text{en } L^1_{loc}(\Omega) \iff \forall K \subseteq \Omega \text{ comp.: } \partial^\alpha u_n \to v \text{ en } L^1(K)$$

P.D. $u \in W_\alpha$

Basta probar que existe $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \qquad \int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega w \varphi \, dx$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi \, dx \qquad ¿\int_\Omega u_n \partial^\alpha \varphi \, dx \to \int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi \, dx \,?$$

u_n en $L^1(K)$ $\forall K \subseteq \Omega$ comp — Sí

$$f \in L^1(X) \iff |f| \in L^1(X)$$

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$$

P.D. $\displaystyle\int_\Omega (u_n - u)\, \partial^\alpha \varphi \, dx \to 0$

P.D. $\displaystyle\left| \int_\Omega (u_n - u)\, \partial^\alpha \varphi \, dx \right|$

Notemos que

$$\left| \int_\Omega (u_n - u)\, \partial^\alpha \varphi \, dx \right| = \left| \int_{supp(\varphi)} \underbrace{(u_n - u)\, \partial^\alpha \varphi}_{L^1(supp(\varphi))} \, dx \right| \leq \int_{supp(\varphi)} |u_n - u| \, |\partial^\alpha \varphi| \, dx$$

$$\leq \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{supp} |u_n - u| \, dx \to 0$$

Por lo anterior,

$$\int_\Omega u\,\partial^\alpha \varphi\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\, \partial^\alpha \varphi\, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int \partial^\alpha u_n\, \varphi\, dx$$

$\downarrow$ $L^1(K)$ $\forall K \subseteq \Omega$ compacto

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\,\varphi\, dx$$

Tomando $\omega = v \in L^1_{loc}(\Omega)$, se sigue que $u \in W_\alpha$ y además $\partial^\alpha u = v$

W_α no es cerrado en $L^1_{loc}(\Omega)$

$(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $W_\alpha)$ $(u_n \to u$ en $L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow u \in W_\alpha)$ $\leftarrow$ Definición de cerrado.

Se puede construir una sucesión en W_α tal que $u_n \to \delta_0 \notin W_\alpha$

Noción de derivada débil es diferente a la noción de derivada usual

(noción global) (noción puntual)

Proposición $u \in W_\alpha(\Omega) \Rightarrow \forall \Omega' \subseteq \Omega$ abierto $u \in W_\alpha(\Omega')$

Demostración Directo.

Proposición Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y abierto y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

Si $u \in W_\lambda(\Omega)$ $\forall \lambda \in \mathbb{N}_0^n$, $|\lambda| \leq k$, entonces

$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \quad |\alpha| + |\beta| \leq k)\ (\partial^\alpha(\partial^\beta u) = \partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^{\alpha+\beta} u)$

- El operador derivada débil conmuta.

Demostración

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $|\alpha| + |\beta| \leq k$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega \partial^\beta u\, \partial^\alpha \varphi\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definición derivada} \\ \text{débil } \beta\text{-ésima}}}{=} (-1)^{|\beta|} \int_\Omega u \cdot \partial^\beta(\partial^\alpha \varphi)\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Propiedades de} \\ \text{la derivada clásica}}}{=} (-1)^{|\beta|} \int_\Omega u \cdot \partial^{\alpha+\beta} \varphi\, dx$$

$$= (-1)^{|\beta|} (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_\Omega \partial^{\alpha+\beta}(u)\, \varphi\, dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial^{\alpha+\beta}(u)\, \varphi\, dx$$

$$\therefore \partial^{\alpha+\beta}(u) = \partial^\alpha(\partial^\beta u)$$

Por definición de derivada débil α-ésima de $\partial^\beta u$.

Análogamente, se tiene que $\partial^{\alpha+\beta} = \partial^\beta(\partial^\alpha u)$

Las hipótesis de la proposición anterior se pueden relajar. Para el caso $\partial^\alpha(\partial^\beta u)=\partial^{\alpha+\beta}u$ se pueden reemplazar por

- $\partial^\beta u \in W_\alpha(\Omega)$
- $u \in W_\beta(\Omega)$
- $u \in W_{\alpha+\beta}(\Omega)$

En general, los espacios vectoriales W_α no son comparables, con la contenencia.

---

* Sea $u:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua no negativa

$$\int_a^b u(x)\,dx = 0 \Rightarrow x=0.$$

* Sea $u:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b) \qquad \int_a^b u\varphi\,dx = 0 \Rightarrow u=0$$ Demostración por contradicción

* Sea $u \in L^1_{loc}(a,b)$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b) \qquad \int_a^b u\varphi\,dx = 0 \Rightarrow u=0. \text{ c.t.p.}$$

Convolución y Regularización

Teorema 4.15 Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p \in [1,\infty]$. Entonces para $x \in \mathbb{R}^N$, ~~enton~~ la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable y definimos

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$$

Más aún, $f*g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

- El caso $p=\infty$ es trivial, en efecto $\qquad z=x-y \Rightarrow dz=-dz$

$$|f*g|(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dy \underbrace{\|g\|_\infty}_{<\infty}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz$$

$$< \infty.$$

Caso $p=1$, este se deduce de la aplicación del Teorema de Tonelli que $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$

- Para el caso $1<p<\infty$, se tiene que $g^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$, por lo tanto

$$y \mapsto |f(x-y)|\,|g(y)|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

$$\Leftrightarrow |f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N)$$

Entonces por lo anterior,

$$|F(x,y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^{p'}_y(\mathbb{R}^N), \qquad F(x,y) = f(x-y)g(y)$$

Por otra parte
$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1/p'} |f(x-y)|^{1/p} |g(y)| \in L^1_y(\mathbb{R}^N)$$
Aplicando la desigualdad de Hölder se sigue el resultado.

Notación Dada una función f en $\mathbb{R}^N$, definimos $\check{f}(x) = f(-x)$

Proposición Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, entonces
$$\int_{\mathbb{R}^N} (f * g) h = \int_{\mathbb{R}^N} g (\check{f} * h)$$

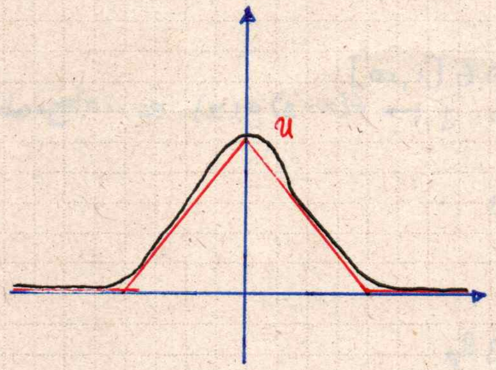
La demostración de este resultado es consecuencia de Tonelli, el teorema anterior y Hölder

Proposición 4.17. Definición de soporte

Sea $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función cualesquiera. Considere la familia $(\omega_i)_{i \in I}$

Clase, martes 11 de diciembre de 2023.

Convolución de funciones



$u \in C^0_c(\mathbb{R})$

- ¿ u posee derivada débil? Sí

  Sin embargo u no es diferenciable en $\mathbb{R}$
- ¿ Existe v función regular tal que «aproxime» a u?

  sentido a dicha aproximación

Para responder de forma afirmativa, se introduce el concepto de convolución de funciones

Sean u y $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medibles. Si para $x \in \mathbb{R}^N$,
$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y)||v(y)| \, dy < \infty$$
se requiere que esto sea una función medible para que exista la integral

entonces se define la convolución $u * v$ en x como
$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) v(y) \, dy$$

Si $u \in C^0(\mathbb{R}^N)$ y $v \in C^0(\mathbb{R}^N)$, ¿ $\underbrace{u * v \text{ está definida en } \mathbb{R}^N}_{\forall x \in \mathbb{R}^N:\ (u*v)(x) \in \mathbb{R}}$?

No, en general. Sin embargo, si $v \in C^0_c(\mathbb{R}^N)$, entonces

$u * v$ está definida en todo punto en $x \in \mathbb{R}^N$

En efecto, sea $x \in \mathbb{R}^N$
$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)| \, dy = \int_{supp(v)} |u(x-y)||v(y)| \, dy$$
$$\leq \max_{y \in supp(v)} |u(x-y)| \int_{supp(v)} |v(y)| \, dy < \infty$$

$y \in supp(v) \Rightarrow x - y \in \underbrace{\{x\} - supp(v)}_{\text{compacto}}$

$\Rightarrow \max_{y \in supp(v)} u(x-y)$

Notemos que toda función continua sobre $\mathbb{R}^N$ es localmente integrable.

Por lo anterior, podemos definir

$$u * v : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)\, v(y)\, dy.$$

P.D. $u * v$ es continua

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^N$ tal que $x_n \longrightarrow x$ en $\mathbb{R}^N$

P.D. $(u*v)(x_n) \to (u*v)(x)$ en $\mathbb{R}$

Notemos que

$$(u * v)(x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x_n - y)\, v(y)\, dy$$
$$= \int_{supp(v)} u(x_n - y)\, v(y)\, dy$$

Por el TCD.L

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x_n - y) v(y)\, dy \to \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) v(y)\, dy$$

Apliquemos teorema de convergencia dominada

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(y) = u(x_n - y)\, v(y) \quad \text{con } y \in supp(v)$$

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n|\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x_n - y)||v(y)|\, dy < +\infty$$

- $\exists g \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(y)| \leq |g(y)| \quad x \in \mathbb{R}^N$

Tomando

$(x_n)_n$ es convergente $\Rightarrow (x_n)_n$ es acotada

$$\hat{g}(y) = \max_{z \in \{x_n\} - supp(v)} |u(y-z)||v(y)| \qquad g \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

se tiene la acotación

Finalmente $f_n(x) \to u(x-y)\, v(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

luego $g(y) = \max\limits_{z \in \bar{B}(0,R)} - supp(v)$

Proposición Si $u \in C^0(\mathbb{R}^N)$ y $v \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$, entonces $u * v \in C^0(\mathbb{R}^N)$.

Notar que si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $v \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$, entonces

a) $u * v$ está definida en $\mathbb{R}^N$
b) $u * v \in C^0(\mathbb{R}^N)$ (Preserva la continuidad)

Proposición Desigualdad de Young para la convolución

Sean $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p \in [1, +\infty]$

Casos

1) $1 \leq p < +\infty$ $\quad u * v$ existe c.t.p. en $\mathbb{R}^N$, $u * v \in L^p(\mathbb{R}^N)$
2) $p = +\infty$ $\quad u * v$ existe en $\mathbb{R}^N$, $u * v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Teorema de Tonelli: Sean (X, M, μ) (Y, N, v) σ-finitos

$f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\quad M \otimes N$ medible no negativa

$\Rightarrow g(x) = \int f_x\, dv$ es medible no negativa

$h(y) = \int f^y d\mu$ es medible no negativa

$$\int f \, d(\mu \times \nu) = \left(\int \left(\int f(x,y)\, d\nu \right) d\mu \right)$$

$$= \left(\int \left(\int f(x,y)\, d\mu \right) d\nu \right)$$

Teorema. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (Y, β, ν) espacios medidas σ- finitos

Dada $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tal que satisface alguna de las siguientes condiciones

a) f es no negativa

b) $f \in L^1(X \times Y)$

c) $\int_X \int_Y |f(x,y)| \, d\nu \, d\mu < \infty$

d) $\int_X \int_Y |f(x,y)| \, d\mu \, d\nu < \infty$

se tiene que

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu \right) d\nu$$

en el sentido de que las integrales existan y sean iguales.

Volviendo a la demostración:

$p = 1$:

P.D. $u * v$ existe c.t.p $\mathbb{R}^N$

P.D. $\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)| \, dy < \infty$ ctp $\mathbb{R}^N$.

Definimos $F(x,y) = |u(x-y)||v(y)|$ medible no negativa.

P.D. $\int_Y F(x,y)\, dy < \infty$ c.t.p $\mathbb{R}^N$

$F \in L^1(X \times Y) \overset{\text{Fubini}}{\Rightarrow} \int_Y F(x,y)\, dy < \infty$ ctp $x \in \mathbb{R}^N$

Mediante Teo- Tonelli, $F \in L^1(X \times Y)$ pues

$$\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)\, dx \right) dy < \infty$$

Miércoles, 13 de diciembre de 2023.

Caso $p = 1$: $u * v$ está definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ $\quad u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\|u * v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1}$$

$p = +\infty$ $\quad u * v$ está definida en $\mathbb{R}^N$

$$\| u * v \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)|\, dy \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < +\infty$$

- Caso $1 < p < +\infty$ $\qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)|^{\frac{1}{p}} |u(x-y)|^{\frac{1}{q}} |v(y)|\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{\overbrace{\left(|u(x-y)|^{\frac{1}{p}} |v(y)| \right)}^{f(y)}}_{\in L^p(\mathbb{R}^N)} \underbrace{\overbrace{\left(|u(x-y)|^{\frac{1}{q}} \right)}^{g(y)}}_{\in L^q(\mathbb{R}^N)} dy \qquad [*]$$

De esta manera, $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ por desigualdad de Hölder

$$\therefore \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(y)\, dy < \infty$$

$\therefore$ Por teorema de Tonelli $\quad F(x,y) = |u(x-y)||v(y)|$

$\therefore$ Por Fubini $\quad \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)\, dy < \infty \quad$ ctp en $\mathbb{R}^N$

De $[*]$, se deduce que

$$|u * v|^p(x) \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{p}{q}} \left(|u| * |v|^p \right)$$

$$\Rightarrow \|u * v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p = \int_{\mathbb{R}^N} |u * v|^p(x)\, dx \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^N} (|u| * |v|^p)\, dx \leq \|u\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \|u\|_{L^1} \|v^p\|_{L^1}$$

Soporte de la convolución

$$u \in C^0(\mathbb{R}^N),\ v \in C_c^0(\mathbb{R}^N) \Rightarrow u * v \in C^0(\mathbb{R}^N)$$

$$\operatorname{supp}(u * v) = \operatorname{Adh}_{\mathbb{R}^N} \{ x \in \mathbb{R}^N : (u * v)(x) \neq 0 \}$$

$$\operatorname{supp}(u * v) = \overline{\operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v)}$$

$$x \in \mathbb{R}^N : \quad (u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) v(y)\, dy = 0$$

$$= \int_{\operatorname{supp}(v)} u(x-y) v(y)\, dy$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall\, x - y \notin \operatorname{supp}(u) \Rightarrow u(x-y) = 0 \\ \forall y \notin \operatorname{supp}(u) \Rightarrow v(y) = 0 \end{array} \right\} \quad (u * v)(x) = 0$$

$$\therefore u * v = 0 \quad \text{en} \quad [\operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v)]^c$$

$$x \in [\operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v)]^c \Rightarrow (u * v)(x) = 0$$

$$x-y \notin \text{supp}(u) \Rightarrow y \notin \{x\}-\text{supp}(u) \Rightarrow y \in \text{supp}(v)$$

$$\therefore \left(\{x\}-\text{supp}(u)\right) \cap \text{supp}(v) = \emptyset$$

$$\therefore \quad u*v(x)=0 \quad \text{en} \quad x \in [\text{supp}(u)+\text{supp}(v)]^c$$

$$\therefore \quad u*v(x)=0 \quad \text{en} \quad x \in \text{Int}\left(\left(\text{supp}(u)+\text{supp}(v)\right)^c\right) = \overline{\text{supp}(u)+\text{supp}(v)}^{\,c}$$

$$\therefore \quad \text{supp}(u*v)^c \supseteq \left(\overline{\text{supp}(u)+\text{supp}(v)}\right)^c$$

Si $f=g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^N$, entonces no es cierto, en general, que
$$\text{supp}(f)=\text{supp}(g)$$

Soporte escencial

Sea $u:\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos
$$\text{ess supp}(u) = \Omega \setminus \bigcup_{\substack{\omega \subseteq \Omega \text{ abierto} \\ u=0 \text{ c.t.p. en } \omega}} \omega$$

Ejemplo:

Consideremos
$$u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto u(x) = 1-\chi_{\mathbb{R}}(x)$$
y
$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto v(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

entonces $\text{supp}(u)=\emptyset$ y $\text{supp}(v)=\mathbb{R}$. Así $u=v$ ctp. pero $\text{supp}(u)\neq \text{supp}(v)$

Por otro lado,
$$\text{ess sup}(u) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\substack{u=0 \text{ c.t.p.} \\ \omega \text{ abiertos}}} \omega = \emptyset$$

$$\text{ess sup}(v) = \emptyset$$

Jueves, 14 de diciembre de 2023.

Observaciones:
1) Si $u=v$ c.t.p., entonces $\text{ess supp}(u) = \text{ess supp}(v)$
2) $u\in L^1(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, entonces
$$\text{ess supp}(u*v) \subseteq \overline{\text{ess supp}(u) + \text{ess supp}(v)}$$
3) Si $u \in C^0(\Omega)$, entonces $\text{supp}(u) = \text{ess supp}(u)$
4) Si u, v son a soporte compacto, entonces $u*v$ es a soporte compacto
   A, B son compactos entonces $A+B$ es compacto.

Proposición - Efecto regularizante -

Dados $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $v \in C^m_c(\mathbb{R}^N)$, $m \in \mathbb{N}$, entonces

Dados $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $v \in C^m_c(\mathbb{R}^N)$, $m \in \mathbb{N}$, entonces $u * v \in C^m(\mathbb{R}^N)$ y además $\forall \alpha, |\alpha| \leq m$: $\partial^\alpha (u * v) = u * \partial^\alpha v$

Demostración

Por inducción sobre m

1) $m = 1$ $\quad u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\quad v \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$

P.D. $u * v$ posee todas sus derivadas parciales de primer orden y estas son continuas

Sea $x \in \mathbb{R}^N$, cualquiera

P.D. $\lim_{t \to 0} \dfrac{(u*v)(x+te_i) - (u*v)(x)}{t}$ existe $\quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$\frac{1}{t}\Big((u*v)(x+te_i) - (u*v)(x) \Big) = \frac{1}{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x+te_i-y)\, v(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}} u(x-y)\, v(y)\, dy \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+te_i) - u(x-y)}{t}\, v(y)\, dy$$

Notemos que u no es diferenciable, por lo tanto no podemos avanzar.

Usamos la conmutatividad de la convolución

Gracias a que la convolución es conmutativa

$$= \frac{1}{t}\Big((v*u)(x+te_i) - (v*u)(x) \Big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{v(x+te_i-y) - v(x-y)}{t}\, u(y)\, dy \xrightarrow{?} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x_i} * u(x)$$

$$= \left(u * \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)(x)$$

Usemos teorema de convergencia dominada

Definamos $\quad f_t(y) = \dfrac{v(x-y+te_i) - v(x-y)}{t}\, u(y)$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_t \in L^1(\mathbb{R}^N)$ directo de la existencia de la convolución

$$f_t(y) \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x-y)\, u(y) \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

$$|f_t(y)| = \left| \frac{v(x-y+te_i) - v(x-y)}{t} \right| |u(y)| \leq \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\| |u(y)|$$

Lo anterior se anula cuando $x - y + te_i \notin \operatorname{supp}(v)$

$$\Rightarrow y \notin \{x\} - \operatorname{supp}(v) + \{te_i\}$$

$$\{x\} - \operatorname{supp}(v) + \overline{B}_{\mathbb{R}^N}(0, \delta) \subseteq K$$

Utilizando el teorema de incrementos finitos, se tiene que

$$\frac{|v(x-y+te_i) - v(x-y)|}{|t|} \leq \sup_{\xi \in [x-y,\, x-y+te_i]} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(\xi) \right| \leq \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_\infty$$

Aplicando el teorema de convergencia dominada se tiene lo requerido.

Hipótesis de inducción: Supongamos cierto para $1 \leq m \leq k$

P.D. Se cumple para $m = k+1$

Supongamos que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $v \in C_c^{k+1}(\mathbb{R}^N)$

P.D. $u * v \in C^{k+1}(\mathbb{R}^N)$

Sea $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ tal que $|\alpha| = k+1$ $\quad \alpha = \beta + \gamma$ tq $|\beta| = k$ y $|\gamma| = 1$

$\partial^\beta(u * v)$ existe y es continua y además

$$\partial^\beta(u * v) = u * \partial^\beta v$$

Luego, como

$\partial^\gamma(\partial^\beta v) * u$ existe y es continua y además

$$\partial^\gamma(u * \partial^\beta v) = u * \underbrace{\partial^\gamma(\partial^\beta v)}_{\partial^{\gamma+\beta} v} = \partial^\gamma(\partial^\beta(u * v)) = \partial^{\gamma+\beta}(u * v).$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \partial^{\gamma+\beta}(u * v) &= u * \partial^{\gamma+\beta} v \\ \parallel \quad & \\ \partial^\alpha(u * v) &= u * \partial^\alpha v \end{aligned}$$

Teorema - Diferenciación bajo el signo integral -

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida completo e $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto.

Consideremos $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$\forall t \in I \quad f(\cdot, t) \in L^1(X)$

Definamos

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto F(t) = \int_X f(x,t) \, d\mu(x) \end{aligned}$$

Si

a) Existe $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ c.t.p. en X y todo punto en I

b) Existe $g \in L^1(X)$ tal que $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x)$ c.t.p. $x \in X$ y topo punto en I

Entonces F es diferenciable en I y para todo $t \in I$

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_X \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) \, d\mu(x)$$

Estamos interesados en las derivadas parciales de primer orden.

Sea $x \in \mathbb{R}^N$ $\quad (\mathbb{R}^N, \mathcal{L}, \lambda)$

$$f_x(y,t) = v(x - y + te_i) u(y)$$

Martes, 18 de diciembre de 2023

Observación: Si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow u * v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad y \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \partial^\alpha(u*v) = u * \partial^\alpha v$$

Si $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$, $v \in C_c^n(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow u * v \in C^{m+n}(\mathbb{R}^n) \quad y \quad \partial^\alpha(u*v) = \partial^\beta u * \partial^\gamma v$$

con $|\alpha| \leq m+n \quad |\beta| + |\gamma| = |\alpha| \quad |\beta| \leq m$ y $|\gamma| \leq n$

Espacios de Sobolev

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado no vacío, $f \in C^0(\Omega)$ y $g \in C^0(\partial\Omega)$

Consideremos el siguiente problema de Poisson con condiciones de Dirichlet no homogéneas

$$(P) = \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Se dice que u es una solución clásica de (P) si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que satisface en todo punto (P).

- ¿ (P) posee solución clásica?
- ¿ (P) posee una única solución clásica?

Para el caso general la respuesta es NO.

Unicidad.

Ejemplo: Si Ω es un abierto, acotado y conexo[1], entonces (P) a lo más poseería una solución clásica.

↳ La primera consideración es el dominio. [Teoría de potencial]

Observación: No es posible relajar o eliminar la hipótesis de acotamiento del dominio. Pues si Ω no es acotado, es posible hallar dos soluciones distintas a este problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

(Principio del máximo)

Con esto deducimos que cuando Ω es acotado, la única solución es la nula.

Existencia.

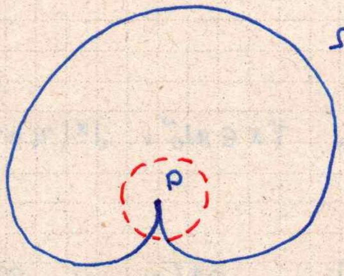
① Depende de la $\underbrace{\text{geometría}}$ del dominio. Ω

Propiedades diferenciales o de continuidad o geométricas que posee la frontera del dominio.

[Geometría de curvas y superficies]

↳ Henry Lebesgue demostró que si Ω es un dominio como en la siguiente figura

[1] En algunos textos un conjunto abierto y conexo se denomina dominio.



P posee un punto de cúspide (Propiedad del cono)

↳ Esto es necesario para la existencia de la solución

Las funciones Lipschitz continuas cumplen la propiedad del cono.

② Depende fuertemente del marco funcional donde espera encontrar soluciones

Conjetura $f \in C^0(\Omega) \overset{\text{uno espera}}{\Rightarrow} u \in C^2(\Omega)$. ← Esto es cierto si $N=1$.

Cuando $N \geq 2$, la conjetura no es cierta.

Por ejemplo, considere $\Omega = B(0, 1/2) \subseteq \mathbb{R}^2$ y $f(x,y)$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{2\|(x,y)\|^2}\left[-\dfrac{4}{(-\ln\|(x,y)\|)^{1/2}} + \dfrac{1}{2(-\ln(\|(x,y)\|))^{3/2}}\right] & \text{si } (x,y) \in \Omega \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tarea en casa: Verificar los cálculos

Notar que $f \in C^0(\Omega)$ y además la función

$$u(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)\left(-\ln\|(x,y)\|\right)^{1/2} & \text{si } (x,y) \in \Omega \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

satisface la ecuación de Poisson, i.e. $-\Delta u = f$ en Ω pero $u \notin C^2(\bar{\Omega})$ pues $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ no es acotada en ninguna vecindad de cero.

Esto nos permite concluir que el requerimiento de que $f \in C^0(\Omega)$ es una condición necesaria pero no suficiente para que $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Así, $C^0(\Omega)$ y $C^2(\bar{\Omega})$ no son los espacios funcionales que se ajustan de forma adecuada para abordar los problemas de valores en la frontera.

Lo que está demostrado es que si f es una función Hölder continua $[f \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})]$, entonces $u \in C^{2,\lambda}(\bar{\Omega})$ [Teoría de potencial]

Bibliografía: Gilbarg - Trudinger Ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

Estabilidad de la solución

Solemos estar interesados en la dependencia continua de la solución clásica respecto a f.

$$-\Delta u_1 = f_1, \quad -\Delta u_2 = f_2 \quad \Rightarrow \quad \|u_1 - u_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$$

Si se considera la norma infinito para f y la norma C^2 para u, resulta que u no necesariamente depende continuamente de f.

En este sentido, tratamos de introducir un nuevo marco funcional.

Por simplicidad, consideremos el problema unidimensional

$$[P] = \begin{cases} -u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

donde $c \in C^0([0,1])$, $c \geq 0$, $f \in C^0([0,1])$

Consideremos

$$V = \{ u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0 \}$$

note que V es un s.e.v. de $C^1([0,1])$. Se define el operador (diferencial)

$$L : C^2([0,2]) \cap V \to C^0([0,1])$$
$$u \mapsto -u'' + cu$$

Si L es un operador biyectivo, entonces $[P]$ posee una única solución

Postulamos Si $u \in Dom(L)$

$$\underbrace{\begin{cases} Lu = f & \text{en } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}}_{\text{Modelo diferencial asociado.}} \iff \underbrace{\int_0^1 (u'v' + cuv)\, dx = \int_0^1 fv\, dx \quad \forall v \in V}_{[Q] \text{ Modelo integral asociado}}$$

$\Rightarrow$] Supongamos que $u \in Dom(L)$ satisface que

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) \\ u(1) = u(0) = 0 \end{cases}$$

Sea $v \in V$, multiplicamos la EDO por v en todo punto

$$-u''(x)v(x) + c(x)u(x)v(x) = f(x)\,v(x)$$

Notar que $u''v$, cvu, $fv \in L^1([0,1])$. Integrando por partes sobre $[0,1]$, se sigue que

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)\,dx + \int_0^1 c(x)\,u(x)\,v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - u'v\Big|_0^1 + \int_0^1 c(x)\,u(x)\,v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx + \int_0^1 c(x)\,u(x)\,v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx$$

$\Leftarrow$] Supongamos que $u \in Dom(L)$ y satisface

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 cuv\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad v \in V.$$

$$-\int_0^1 u''v\,dx + \cancel{u'v\Big|_0^1}^{\,0}$$

$$\therefore\ \forall v\in V \quad \int_0^1 (-u''+cu-f)\,v\,dx = 0$$

En particular, para todo $v\in C_c^\infty((0,1))$

$$\int_0^1 \underbrace{(-u''+cu-f)}_{\in L^1_{loc}(0,1)}\,v\,dx = 0$$

Por el teorema fundamental del cálculo de variaciones

$$-u''+cu-f=0 \quad \text{en} \quad (0,1)$$

$$u(1)=u(0) \quad \text{pues} \quad u\in Dom(L)$$

Observaciones:

1) El problema [Q] se conoce como la formulación variacional del problema [P]

2) Si u es una función regular, se ha probado que una solución de la formulación variacional es solución de [P]

3) Notar que las integrales en [Q] siguen existiendo si f, u, v, u', v' están en $L^2(0,1)$ y $c\in L^\infty(0,1)$

$$\text{Si } u,u'\in L^2(0,1) \Rightarrow \{u\in L^1_{loc}(0,1) : u,u'\in L^2(0,1)\} = H^1(0,1)$$

$$\{u\in L^2(0,1) : u'\in L^2(0,1)\}$$

Si $v, v'\in L^2(0,1) \Rightarrow v\in H^1(0,1)$

Con la introducción del espacio vectorial $H^1(0,1)$, [Q] es válido para

$$u,v\in H^1(0,1),\quad f\in L^2(0,1) \quad y \quad c\in L^\infty(0,1)$$

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 cuv\,dx = \int_0^1 fv\,dx \qquad \forall v\in H^1(0,1)$$

Miércoles, 20 de diciembre de 2023.

$H^1(0,1) = \{u\in L^2(0,1) : u'\in L^2(0,1)\}$,

luego $V=\{u\in C^1([0,1]) \ u(0)=u(1)=0\}$. Notar que $V \subsetneq H^1(0,1)$, $\subset C^1(0,1)$ más aún, podemos definir la siguiente norma

$$\|u\|^2_{H^1(0,1)} = \int_0^1 u^2\,dx + \int_0^1 (u')^2\,dx = \|u\|^2_{L^2(0,1)} + \|u'\|^2_{L^2(0,1)}$$

$\overline{V}^{H_1} = H^1(0,1)$ (Argumento de densidad)

$$\forall v\in H^1(0,1) \quad \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 cuv\,dx = \int_0^1 fv\,dx$$

Problema variacional Hallar $u\in H^1(0,1)$ tal que

$$\forall v\in H^1(0,1) \quad \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 cuv\,dx = \int_0^1 fv\,dx$$

• ¿Existe una única solución al problema variacional dado?

Notemos que el problema variacional no tiene las condiciones de frontera

• ¿Qué sentido tiene hablar de los valores de $u \in H^1(0,1)$ en la frontera?

Note que la frontera de este conjunto es $\{0,1\}$ de medida nula

Si es posible dar un sentido adecuado a los valores en la frontera de una función en $H^1(0,1)$,

$$u\Big|_{\partial(0,1)} = 0$$

El problema variacional asociado con el problema diferencial (P) es: hallar $u \in H^1(0,1)$ tal que

$$u\Big|_{\partial(0,1)} = 0 \quad \text{y} \quad \forall v \in H^1(0,1): \quad \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 c\,u\,v\,dx = \int_0^1 f v\,dx$$

Vamos a analizar la existencia y unicidad de soluciones para este problema diferencial

La función u y f deben ser suficientemente regulares para que u sea solución del problema [P]

Espacios de Sobolev

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y abierto, $m \in \mathbb{N}$ (índice de regularidad) y $p \in [1,+\infty]$ (índice de integrabilidad para $p \in [1,+\infty[$), se define el espacio de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) := \{ u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N,\ |\alpha| \leq m \quad \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \}$$

Derivada débil α-ésima de u

Observación Es posible definir los espacios de Sobolev considerando un índice de regularidad real

$$W^{s,p}(\Omega) \quad \text{con} \quad s \in \mathbb{R}$$

• Transformada de Fourier
• Para dominios acotados
↳ Representaciones integrales

Nota: <u>Espacios de Hölder</u>

$$C^1(\bar{\Omega}) \subseteq C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega}) \qquad\qquad C^2(\bar{\Omega}) \subseteq C^{1,\lambda}(\bar{\Omega}) \subseteq C^1(\bar{\Omega})$$

Espacios de Hölder

u es Hölder continua de exponente λ con $0 < \lambda \leq 1$, si existe $C_u > 0$

$$\forall\, x,y \in \Omega \qquad |u(x) - u(y)| \leq C_u \|x-y\|^\lambda$$

$$\sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{\|x-y\|^\lambda} = |u|_{0,\lambda} \quad \text{seminorma de Hölder}$$

Con esto, podemos dotar de una norma al espacio

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|u\|_{0,\lambda}$$

- $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial
- $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio normado, equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{con } p\in[1,+\infty[\\ \sum_{0\le|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{con } p=+\infty \end{cases}$$

donde $\partial^{(0,\dots,0)} u = u$.

Espacios de Sobolev Locales

$$W^{m,p}_{loc}(\Omega) = \left\{ u\in L^1_{loc}(\Omega) : \forall\, \omega \subset\subset \Omega \text{ abierto } \ u\in W^{m,p}(\omega) \right\}$$

Observaciones:

a) De la misma manera como en los espacios $L^p(\Omega)$, los elementos $W^{m,p}(\Omega)$ se identifican c.t.p.

b) Existen varias ~~normas~~ (maneras) de definir una norma en $W^{m,p}(\Omega)$. Por ejemplo:

- $p\in[1,+\infty[$ $\quad \sum_{0\le|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$
- $p=+\infty$ $\quad \max_{0\le|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$

normas equivalentes a la norma correspondiente en $W^{m,p}(\Omega)$

Estas normas son equivalentes a las normas definidas al principio de esta página. (Esto se muestra haciendo uso de la propiedad de normas equivalentes en espacios de dimensión finita)

c) Para el caso $m=1$ $W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\|u\|^p_{L^p} + \sum_{k=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|^p_{L^p} \right)^{1/p} & 1\le p<+\infty \\ \|u\|_{L^\infty} + \sum_{k=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L^\infty} & p=+\infty \end{cases}$$

Además, podemos considerar las siguientes normas

$1\le p<+\infty$ $\quad \|u\|_{L^p} + \sum_{k=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L^p}$

$$\left(\|u\|^p_{L^p} + \|Du\|^p_{(L^p(\Omega))^N} \right)^{1/p} \quad \text{donde}$$

$$\|u\|_{L^p} + \|Du\|_{L^p(\Omega)^N} \qquad \underbrace{Du = \nabla u}_{\text{Gradiente débil de } u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in \underbrace{\left(L^p(\Omega)\right)^N}_{\text{Espacio producto}}$$

$p=+\infty$ $\quad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|Du\|_{L^\infty(\Omega)^N}$

$$\max\left\{ \|u\|_{L^\infty}, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^\infty}, \dots, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right\|_{L^\infty} \right\}$$

$$\|Du\|_{L^p(\Omega)^N} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |Du|^p\right)^{1/p} & \text{con } p\in[1,+\infty[\\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |Du(x)| & p=+\infty \end{cases}$$

donde

$$|Du(x)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}(x)\right)^2}$$

Norma euclideana en $\mathbb{R}^N$

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ u\in L^p(\Omega) : \nabla u \in L^p(\Omega)^N \}$$

Jueves, 21 de diciembre de 2023

Para $p=2$: (caso particular)

$$W^{m,2}(\Omega) =: H^m(\Omega)$$

Así, se tiene que podemos definir el siguiente producto escalar

$$\forall u,v\in H^m(\Omega), \quad \langle u,v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\le|\alpha|\le m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle$$

Más aún, se tiene que $(H^m(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^m(\Omega)})$ es un espacio prehilbertiano

$$\|u\|_{W^{m,2}(\Omega)} = \|u\|_{H^m(\Omega)} = \langle u,v\rangle^{1/2}_{H^m(\Omega)}$$

$m=1$

$$\langle u,v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)^N}$$

Ejemplos:

1) $u:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}$

$\quad x \longmapsto u(x)=|x|$

Por lo visto en clase, se tiene que $u\in H^1(-1,1)$ pero $u\notin H^1(-1,1)$

2) $u:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$$(x,y)\longmapsto \begin{cases} \ln(\ln\|(x,y)\|_2) & \text{si } 0<\|(x,y)\|<1/e \\ 0 & \text{caso contrario}\end{cases}$$

↳ Por lo visto previamente, se tiene que $u\in H^1(\mathbb{R}^2)$

3) $u : B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto u(x) \begin{cases} \|x\|_2^{-a} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

con $a > 0$ y $a+1 < N$.

Por lo hecho en los ejercicios de refuerzo se tiene que

$$u \in W^{1,p}(B(0,1)) \quad \text{con } p \in [1, N[\quad \text{y} \quad a < \frac{N-p}{p}$$

4) $u : B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto u(x) = \begin{cases} 1 & x_N \geq 0 \\ 0 & x_N < 0 \end{cases}$$

En este caso, $u \notin W^{1,p}(B(0,1)) \quad \forall p \in [1, +\infty]$.

$\therefore$ u no pertenece a ningún espacio de Sobolev

Teorema. $\forall m \in \mathbb{N}$ y $\forall\, 1 \leq p \leq +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.
En particular, $\forall m \in \mathbb{N}$, $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Demostración

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega)$

P.D. $(\exists\, u \in W^{m,p}(\Omega))\ (u_n \to u$ en $W^{m,p}(\Omega))$

Notar que dado $\varepsilon > 0$, existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall n, l \in \mathbb{N})\ \left(n \geq M,\ l \geq M \Rightarrow \|u_n - u_l\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \varepsilon \right)$$

Entonces

$$\|u_n - u_l\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon \quad \text{y} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N,\ 1 \leq |\alpha| \leq m \quad \|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u_l\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$$

$\Downarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$

$\Downarrow$ $(\partial^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$

Como $L^p(\Omega)$ es completo, existe $u \in L^p(\Omega)$ y $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $1 \leq |\alpha| \leq m$ existe $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \text{ en } L^p(\Omega)$$
$$\partial^\alpha u_n \to u_\alpha \text{ en } L^p(\Omega)$$

Para el caso $1 \leq p < +\infty$

$$u_n \to u \text{ en } L^p(\Omega) \Rightarrow u_n \rightharpoonup u \text{ en } L^p(\Omega)$$

Así, para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega u_n \partial^\alpha \varphi \, dx \to \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, dx \qquad [1]$$

Por otro lado,

$$\int_\Omega u\partial^\alpha \varphi\, dx \xleftarrow{[1]} \int_\Omega u_n \partial^\alpha \varphi \; dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial^\alpha u_n \varphi \; dx \xrightarrow{[2]} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi\, dx$$

Pues $\partial^\alpha u_n \to u_\alpha$ en $L^p(\Omega) \Rightarrow \partial^\alpha u_n \rightharpoonup u_\alpha$ en $L^p(\Omega)$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \qquad \int_\Omega \partial^\alpha u_n \varphi \; dx \to \int_\Omega u_\alpha \varphi\, dx \qquad [2]$$

Por unicidad del límite,

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad 1 \le |\alpha| \le m \qquad \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Así, u posee todas sus derivadas hasta el orden m y además

$$\forall \alpha \quad 1 \le |\alpha| \le m \qquad \partial^\alpha u = u_\alpha \in L^p(\Omega)$$

Así, $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Caso $p = +\infty$

- $u_n \to u$ en $L^\infty(\Omega) \Rightarrow u_n \xrightarrow{*} u$ en $L^\infty(\Omega) \Rightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \int_\Omega u_n \partial^\alpha \varphi\, dx \to \int_\Omega u \partial^\alpha u\, dx$
- $\partial^\alpha u_n \to u_\alpha$ en $L^\infty(\Omega) \Rightarrow \partial^\alpha u_n \xrightarrow{*} u_\alpha$ en $L^\infty(\Omega) \Rightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \int_\Omega \partial^\alpha u_n \varphi\, dx \to \int_\Omega u_\alpha \varphi\, dx$

Así, $u \in W^{m,p}(\Omega)$ para todo $1 \le p \le \infty$. Notar que $u_n \to u$ en $W^{m,p}(\Omega)$ pues

Repitiendo el argumento anterior, se concluye que $\varphi \in W^{m,\infty}(\Omega)$.

$$\|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{1 \le |\alpha| \le m} \|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Observación:

De lo anterior, podemos concluir que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $W^{m,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ tal que $(\partial^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^p(\Omega)$, entonces

$$u \in W^{m,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad u_n \to u \quad \text{en} \quad W^{m,p}(\Omega).$$

La proposición recíproca también es cierta, i.e., si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $W^{m,p}(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|$ en $W^{m,p}(\Omega)$, entonces $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\forall \alpha$, $1 \le |\alpha| \le m$ $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$

El grafo del operador derivada débil es cerrado en $W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema: Dado $m \in \mathbb{N}$, cualquiera:

- $W^{m,p}(\Omega)$ es separable si $1 \le p < +\infty$
- $W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo si $1 < p < +\infty$.

$L^p(\Omega)$ es separable si $1 \le p < +\infty$ | $L^p(\Omega)$ es reflexivo si $1 < p < +\infty$

$$f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y) \quad \text{homeomorfismo}$$

$$X \text{ es separable} \iff Y \text{ es separable}$$

Definamos $H = \text{Card}(\{\alpha : |\alpha| \le m\})$

$$T : W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)^H$$
$$u \longmapsto (\partial^\alpha u)_{0 \le |\alpha| \le m}$$

T es lineal y una isometría

$$\|(f_1,\dots,f_M)\|_{L^p(\Omega)^M} = \sum_{k=1}^{M} \|f_k\|_{L^p(\Omega)} \qquad |||u|||_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0\le|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

P.D. $Img(T)$ es separable

$L^p(\Omega)^M$ es separable para $1\le p<+\infty$ por ser producto finito de espacios separables.

Teorema: Si E es un espacio normado reflexivo, entonces todo subespacio vectorial cerrado es reflexivo.

Teorema: Sean E, F espacios normados y $T: E \to F$ isomorfismo isométrico

$$E \text{ es reflexivo} \Rightarrow F \text{ es reflexivo.}$$

- $L^p(\Omega)^M$ es reflexivo para $1<p<+\infty$ pues es el producto finito de espacios reflexivo
- $Img(T)$ es un s.e.v. cerrado pues es la imagen de un conjunto cerrado a través de un homeomorfismo.

Utilizando un razonamiento análogo al usado para separabilidad nos permite probar el resultado.

Martes, 2 de enero de 2024

Sección: Aproximación de funciones en espacios de Sobolev.

Motivación:

Sean $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Dados $f\in L^1([a,b])$ y $\varepsilon>0$.

¿Existe $g_\varepsilon \in C^0([a,b])$ tal que $\|f-g_\varepsilon\|_{L^1}<\varepsilon$?

$$¿\ \overline{C^0([a,b])}^{L^1} = L^1([a,b])\ ?$$

Haciendo uso de la técnica de la función simple, se puede abordar este problema

Procedimiento:

1) $f = f^+ - f^-$, $f^+, f^- \in L^1([a,b])$

Basta probar el resultado para $f\in L^1([a,b])$, $f\geqslant 0$.

2) Para $f\in L^1([a,b])$, $f\geqslant 0$, existe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones simples no negativas tales que

$$0\le s_n\le f \text{ en } [a,b] \qquad s_n \to f \text{ ctp en } [a,b]$$

y $\displaystyle\int_a^b s_n\,dx \to \int_a^b f\,dx.$

Más aún, se tiene que $\overline{S_+([a,b])}^{L^1} = L^1_+([a,b])$

3) Toda función simple medible no negativa es combinación de indicatrices de conjuntos medibles, es decir

$$s=\sum_{i=1}^{M} \alpha_i \chi_{A_i}, \quad \alpha_i\geqslant 0 \qquad A_i\cap A_j=\emptyset \quad i\neq j \qquad \bigcup_{i=1}^{M} A_i=[a,b]$$

donde $(A_i)_{i=1}^n$ conjuntos medibles.

Con lo anterior, basta probar el resultado para una función indicatriz.

4) Sea f una función indicatriz, i.e., $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{L}$, $A \subseteq [a,b]$

¿Qué conjunto A consideramos para la demostración.

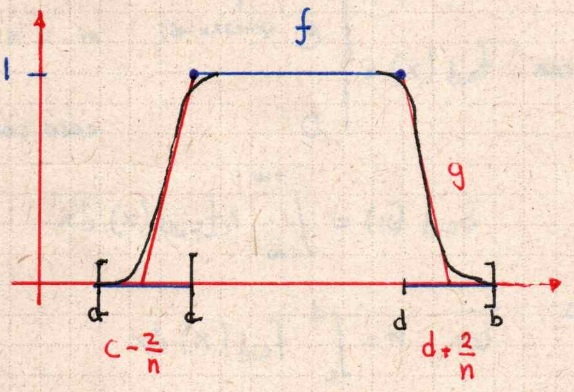
Es conocido que para cualquier conjunto $A \in \mathcal{L}$ y $\varepsilon > 0$ es posible elegir $F_\varepsilon \subseteq A = [a,b]$ tal que

$$F_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{p} I_i$$

donde $\{I_i : i \in \{1,\dots,p\}\}$ es una familia disjunta de subintervalos de $[a,b]$, de forma que

$$\| \chi_A - \chi_{F_\varepsilon} \|_{L^1([a,b])} < \varepsilon$$

5) Basta mostrar el resultado para $f = \chi_{[c,d]}$ con $a < c < d < b$



Así, se tiene que

$$\| \chi_{[c,d]} - g_{n(\varepsilon)} \|_{L^1([a,b])} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Propiedad arquimediana

Proposición Se tiene que

$$\boxed{\overline{C^0([a,b])}^{L^1} = L^1([a,b])}$$

Más aún, se muestra que

$$\overline{C_c^0(\mathbb{R})}^{L^1} = L^1(\mathbb{R})$$

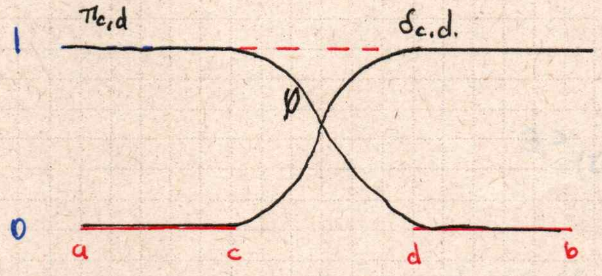
Surge una pregunta natural:

Dado $f \in L^1([a,b])$ y $\varepsilon > 0$, ¿Existe $\varphi_\varepsilon \in C^\infty([a,b])$ tal que

$$\| f - \varphi_\varepsilon \|_{L^1([a,b])} < \varepsilon \text{ ?}$$

Usando la técnica de la función simple y de la aproximación de conjuntos medibles mediante intervalos basta probar que dado $[c,d] \subseteq [a,b]$ y $\varepsilon > 0$ existe $\varphi_\varepsilon \in C^\infty([a,b])$ tal que

$$\| \chi_{[c,d]} - \varphi_\varepsilon \|_{L^1([a,b])} < \varepsilon.$$



Debemos hallar φ tal que

i) $0 \leq \varphi \leq 1$ en $[c,d]$

ii) $\varphi \in C^\infty([a,b])$

iii) $\varphi = 1$ en $[d, +\infty[$

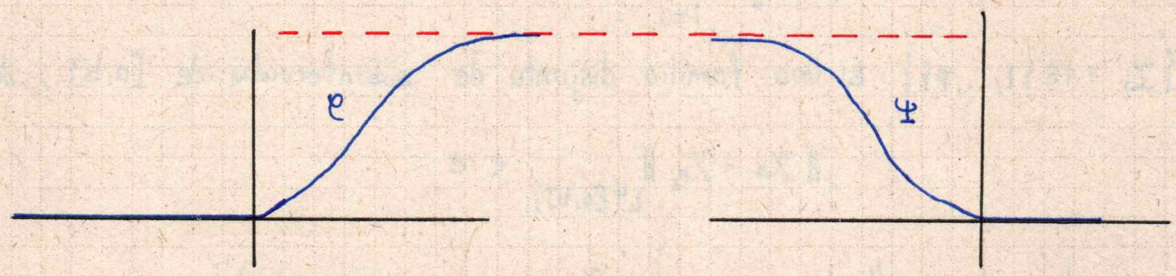
iv) $\varphi = 0$ en $]-\infty, c]$

Estas φ permiten construir el φ_ε buscada

Para ello consideremos:

1) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \Psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{\lambda}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$



Definamos la función
$$\eta_{c,d}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{c,d}(t)\,dt \qquad \text{con} \quad f_{c,d}(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-c)(x-d)}} & \text{si } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

que cumple que

- $\eta_{c,d} \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $\eta_{c,d} = 0 \qquad x \leq c$
- $\eta_{c,d} > 0 \qquad$ en $\mathbb{R}$

Con esto definimos
$$\delta_{c,d}(x) = \frac{1}{H}\,\eta_{c,d}(x).$$
con $H = \int_c^d f_{c,d}(x)\,dx$

$\delta_{c,d} \in C^\infty(\mathbb{R}) \qquad \delta_{c,d} = 0 \quad x \leq c$

$\delta_{c,d} = 1 \quad x \geq d \qquad 0 \leq \delta_{c,d} \leq 1$ en $\mathbb{R}$

Notemos entonces que $\varphi = \delta_{c,d}$ cumple las propiedades. Además, definamos
$$\pi_{c,d}(x) = 1 - \delta_{c,d}(x)$$

Dados $a < b$, $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon < b - \varepsilon$ se define
$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (a,b) \\ 1 & x \in (a+\varepsilon, b-\varepsilon) \\ \pi_{b-\varepsilon,b} & x \in (b-\varepsilon, b) \\ \delta_{a,a+\varepsilon} & x \in (a, a+\varepsilon) \end{cases}$$

satisface que

$\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\quad 0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1 \quad \varphi_\varepsilon = 1$ en $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, $\quad \varphi_\varepsilon = 0$ en $\mathbb{R} \setminus (a,b)$

además $\varphi_\varepsilon = \delta_{a,a+\varepsilon}\,\pi_{b-\varepsilon,b}$

Notar que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \varphi_\varepsilon \in C^\infty([a,b])$ tal que
$$\| \chi_{[c,d]} - \varphi_\varepsilon \|_{L^1([a,b])} < \varepsilon$$

Como $a < c < d < b$
$$\underbrace{a < c - \varepsilon}_{\varphi_\varepsilon = 0} < c < c + \varepsilon < d - \varepsilon < d < \underbrace{d + \varepsilon < b}_{\varphi_\varepsilon = 0}.$$

Proposición $\overline{C^\infty([a,b])}^{L^1} = L^1([a,b])$

$$\overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}^{L^1} = L^1(\mathbb{R})$$

Miércoles, 3 de enero de 2023.

$\overline{C^0([a,b])}^{L^1} = L^1([a,b])$

$\overline{C^\infty([a,b])}^{L^1} = L^1([a,b])$

Recapitulación

Ahora, como $C^\infty([a,b]) \subsetneq C^0([a,b])$ $\quad A \subseteq B \subseteq X$

A es denso en X y $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow B$ es denso en X

$\overline{C_c^0(\mathbb{R})}^{L^1} = L^1(\mathbb{R})$

$\overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}^{L^1} = L^1(\mathbb{R})$

$\overline{C_c^0((a,b))}^{L^1} = L^1(a,b)$ $\quad \overline{C_c^\infty((a,b))}^{L^1} = L^1(a,b)$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $\quad \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{L^1} = L^1(\Omega)$ $\quad \overline{C_c^\infty(\Omega)} = L^p(\Omega)$ $\quad 1 \leq p < +\infty$.

Observación: No es posible aproximar una función $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ mediante funciones $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ pues si se considera u la función constante $u = k$, entonces $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pero

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |k - \varphi(x)| \geq k$$

Definición (Sucesión regularizante o de regularizantes o mollifiers)

Se dice que una sucesión $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\rho_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una sucesión regularizante si para cada $n \in \mathbb{N}$

1) $\rho_n \geq 0$ en $\mathbb{R}^N$
2) $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$
3) $\mathrm{supp}(\rho_n) \subseteq \overline{B}(0, 1/n)$
4) $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \, dx = 1$.

Considere la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Luego, definamos

$$\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = f(\|x\|_2)$$

Notar que $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \text{si } \|x\|_2 < 1 \\ 0 & \text{si } \|x\|_2 \geq 1 \end{cases}$$

que satisface que $\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{B}_2(0,1)$, $\varphi \geq 0$ en $\mathbb{R}^N$ $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$
Así, definamos

$$\rho(x) = \frac{1}{\|\varphi\|_{L^1}} \varphi(x) \qquad x \in \mathbb{R}^N \qquad \rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \rho \geq 0 \qquad \int_{\mathbb{R}^N} \rho \, dx = 1$$

$\operatorname{supp}(\rho) = \overline{B}(0,1)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define

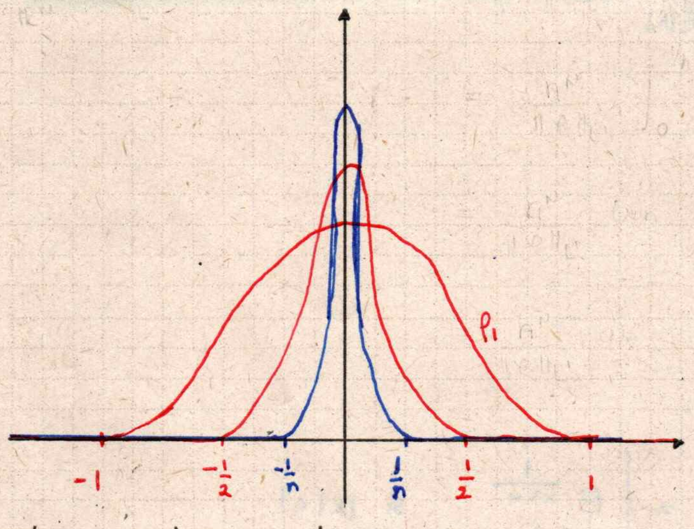
$$\rho_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \rho_n(x) = n^N \rho(nx)$$

donde $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \frac{n^N}{\|\varphi\|_{L^1}} e^{\frac{1}{n^2\|x\|^2-1}} & \text{si } \|x\| < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\operatorname{supp}(\rho_n) = \overline{B}_2(0, 1/n)$.

$(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona



$\rho_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta_0$ en $(C_c^\infty(\mathbb{R}))^*$

en el sentido de las distribuciones

Aproximación de la identidad

$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$\langle \rho_n, \varphi \rangle \to \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$

Miércoles, 10 de enero de 2024

Teorema. Sea $u \in C(\mathbb{R}^N)$ entonces $u * \rho_n$ converge uniformemente a u en compactos.

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la regularización de u como

$$u_n = u * \rho_n$$

Demostración: Sea K un compacto

P.D. $u * \rho_n \to u$ uniformemente en K

P.D. $\sup_{x\in K} |u * \rho_n(x) - u(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Sean $x\in K$ y $\varepsilon>0$ P.D. $(\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n)(n\geq N \Rightarrow |u*\rho_n(x)-u(x)|<\varepsilon)$

Sea $n\in\mathbb{N}$ arbitrario

$$|u*\rho_n(x) - u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y) - u(x)|\, \rho_n(y)\, dy$$

$$= \int_{\bar{B}(0,1/n)} |u(x-y)-u(x)|\, \rho_n(y)\, dy$$

Por otro lado, para $\varepsilon>0$ y K fijos, existe $\delta=\delta(\varepsilon,K)>0$ tal que

$$(\forall s\in K)(\forall t\in\bar{B}(0,\delta))\quad \underbrace{\|s-t-s\|<\delta}_{\text{Siempre es cierto pues } t\in\bar{B}(0,\delta)} \Rightarrow |u(s-t)-u(s)|<\varepsilon$$

$\therefore s-t, s\in \underbrace{K-\bar{B}(0,\delta)}$

gracias a la continuidad uniforme sobre compactos. Así si se tuviera que

$$x-y\in K-\bar{B}(0,\delta) \quad \text{y} \quad x = x-0\in K-\bar{B}(0,\delta),$$

entonces

$$\|x-y-x\|<\delta \Rightarrow |u(x-y)-u(x)|<\varepsilon$$

Por tanto, para que $\|x-y-x\| = \|y\|<\delta$, sabiendo que $\|y\|<1/n$, por la propiedad arquimediana, existe $N=N(\delta(\varepsilon,K))\in\mathbb{N}$ tal que $1/N<\delta$, con lo cual, para todo $n\geq N$ se sigue que

$$\text{para } x\in K \text{ y } y\in\bar{B}(0,1/n)\subseteq\bar{B}(0,\delta)$$

$$\Rightarrow |u(x-y)-u(y)|<\varepsilon$$

Así, para todo $n\geq N$

$$|u*\rho_n(x)-u(x)| \leq \int_{\bar{B}(0,1/n)} \varepsilon\, \rho_n(y)\, dy = \varepsilon \overbrace{\int_{\bar{B}(0,1/n)} \rho_n(y)dy}^{1} < \varepsilon$$

con lo cual

Teorema $u\in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p\in[1,+\infty[$, entonces

$$u*\rho_n \to u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N)$$

Demostración

P.D. $\|u*\rho_n - u\|_{L^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Entonces

$$\|\underbrace{u*\rho_n}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^N)} - u\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\mathbb{R}^N}[u(x-y)-u(x)]\,\rho_n(y)\,dy\right|^p dx$$

Teorema de convergencia dominada de Lebesgue

Vesión L^p

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en L^p
- $f_n\to f$ ctp, $f\in L^p$
- $|f_n|\leq g$ ctp

$\Rightarrow \|f_n - f\|_{L^p}\to 0$

• ¿Existe $v \in C(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|v-u\|_{L^p} < \varepsilon$?

El resultado de teoría de la medida que se conoce es que

$$\forall p \in [1,+\infty[\qquad \overline{C_c(\mathbb{R}^N)}^{L^p} = L^p(\mathbb{R}^N)$$

Exposición.

Sea $\varepsilon > 0$ $(\exists\, v \in C_c(\mathbb{R}^N))$ $\quad \|u-v\|_{L^p} < \varepsilon/3$

$$\|u * \rho_n - u\|_{L^p} = \|u * \rho_n + v * \rho_n - v * \rho_n - v + v - u\|$$
$$\leq \underbrace{\|(u-v) * \rho_n\|_{L^p}}_{N_1} + \underbrace{\|v * \rho_n - v\|_{L^p}}_{N_2} + \|u-v\|_{L^p}.$$

N_2: $\underbrace{\underbrace{v}_{\in C_c} * \underbrace{\rho_n}_{\in C_c^\infty}}_{\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow v$ uniformemente en cualquier compacto

$$\|v * \rho_n - v\|^p_{L^p} = \int_{\mathbb{R}} |v * \rho_n(x) - v(x)|^p \, dx$$

$$v * \rho_n(x) - v(x) = 0 \qquad \forall x \in \operatorname{supp}(v * \rho_n - v)$$

No obstante, como

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}(v * \rho_n - v) &\subseteq \operatorname{supp}(v * \rho_n) \cup \operatorname{supp}(v)\\
&\subseteq (\operatorname{supp}(v) + \operatorname{supp}(\rho_n)) \cup \operatorname{supp}(v)\\
&= (\operatorname{supp}(v) + \bar{B}(0, n^{-1})) \cup \operatorname{supp}(v)\\
&\subseteq (\operatorname{supp}(v) + \bar{B}(0,1)) \cup (\operatorname{supp}(v) + \bar{B}(0,1))\\
&\subseteq \operatorname{supp}(v) + \bar{B}(0,1)
\end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{supp}(v * \rho_n - v) \subseteq \underbrace{\operatorname{supp}(v) + \bar{B}(0,1)}_{\text{compacto.}}$$

Entonces $\quad x \notin \operatorname{supp}(v) + \bar{B}(0,1) \; : \; v * \rho_n(x) - v(x) = 0$

$\therefore$ $v * \rho_n \to v$ uniformemente en $\operatorname{supp}(v) + \bar{B}(0,1) = K$

$\therefore$ $\|v * \rho_n - v\|_{L^p} \to 0.$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall n \geq N)(\forall x \in K) \quad |v * \rho_n(x) - v(x)| < \frac{\varepsilon}{3\,\lambda(K)^{1/p}} \qquad [*]$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v * \rho_n(x) - v(x)|^p \, dx = \int_K |v * \rho_n(x) - v(x)|^p \, dx$$

Por [*], se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v * \rho_n(x) - v(x)|^p \, dx \leq \int_K \frac{\varepsilon^p}{3^p \lambda(K)} \, dx = \frac{\varepsilon^p}{3^p}$$

$$\therefore (\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \qquad \|v * \rho_n - v\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{3}$$

N_1 $\| \underbrace{(u-v)}_{\in L^p(\mathbb{R}^N)} * \underbrace{\rho_n}_{\in L^1(\mathbb{R}^N)} \|_{L^p} \leq \|\rho_n\|_{L^1} \|u-v\|_{L^p} = \|u-v\|_{L^p} < \varepsilon/3$

Por tanto, para todo $n \geq N$

$$\|u * \rho_n - u\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Corolario. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío

$$\overline{D(\Omega)}^{L^p} = L^p(\Omega) \qquad \forall p \in [1, +\infty[$$

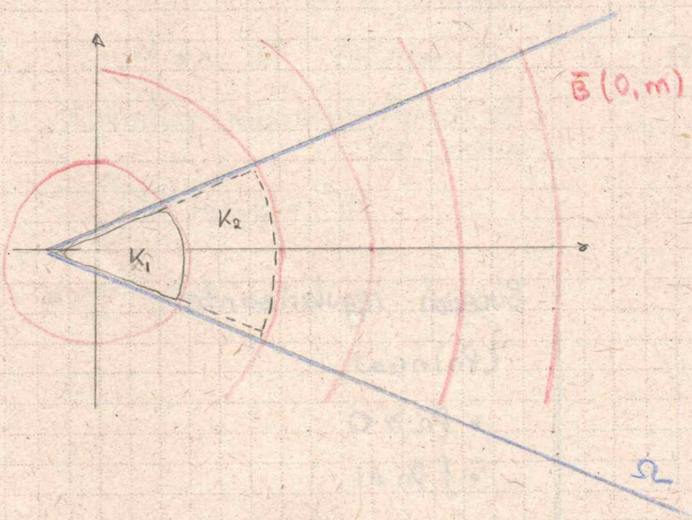
Demostración

Sea $u \in L^p(\Omega)$ P.P. Existe (v_n) sucesión en $D(\Omega)$ tq $v_n \to v$ en $L^p(\Omega)$

- Extender u a $\mathbb{R}^N$ por 0, i.e.. $\tilde{v} \in L^p(\mathbb{R}^N)$
- Hacer un gráfico que represente a la extensión

Conocemos que si $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que ω tiene soporte compacto y $z \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces $\omega * z \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

¿ $\tilde{v}_n = \tilde{u} * \rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$? No pues $\operatorname{supp}(\tilde{v})$ no es necesariamente compacto.



Construyamos la familia K_m de compactos

$$K_m = \{ x \in \Omega : x \in \bar{B}(0,m) \wedge \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geq \underbrace{\frac{2}{m}}_{a_m} \}$$

(a_m) sucesión positiva decreciente de forma que $\operatorname{supp}(v_n) \subsetneq \Omega$.

En efecto, sea $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$

Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_{m_0}$

$$\operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geq \frac{2}{m_0} > 0 \Rightarrow x \in \Omega$$

Sea $x \in \Omega$, como $\operatorname{dist}(x, \Omega^c) > 0$, entonces existe $m_x \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geq 2(m_x)^{-1}$ (por propiedad arquimediana)

Notar que $\operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geq \frac{2}{m_x} \geq \frac{2}{m}$ $\quad \forall m \geq m_x$

P.D $(\exists n_0 \geq m_x)$ $(\|x\| \leq n_0)$

Por contradicción, supongamos que $\forall n \geq m_x$, $\|x\| > n$

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq m_x \} \qquad B = \{ n \in \mathbb{N} : n < m_x \}$$

A y B son acotados, entonces $A \cup B$ es acotado. Pero noto que $A \cup B = \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es acotado $\Rightarrow\Leftarrow$

$$\therefore \exists n_0 \geq m_x \text{ tq } \|x\| \leq n_0 \Rightarrow x \in K_{n_0}.$$

Jueves, 11 de enero de 2024

Continuando con la demostración:

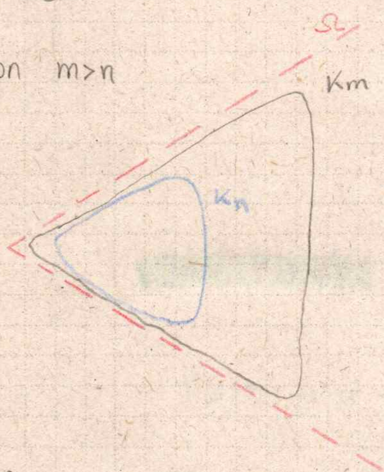
$u \in L^p(\Omega)$ P.D. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en $C_c^\infty(\Omega)$, $v_n \to v$ en $L^p(\Omega)$

$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, K_n compacto con

$$K_n = \{ x \in \mathbb{R}^N : x \in \bar{B}(0,n) ; \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geq 2 \cdot n^{-1} \} \qquad K_n \subsetneq \Omega, \ K_n \text{ es compacto}$$

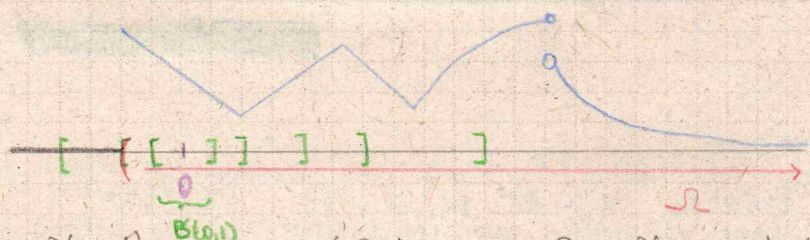
$(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente que aproxima a Ω desde el interior

con $m>n$



Analizando ideas

Si $u \in L^p(\Omega) \Rightarrow \tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$



Definamos $\tilde{u}_n = u\,\chi_{K_n}$, $\tilde{u}_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $\operatorname{supp}(\tilde{u}_n) \subseteq K_n$ $\tilde{u}_n \in L^p(\mathbb{R}^N) \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$

Definamos $\tilde{v}_n = \tilde{u}_n * \rho_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. $\tilde{v}_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\operatorname{supp}(\tilde{v}_n) \subseteq \operatorname{supp}(\tilde{u}_n) + \operatorname{supp}(\rho_n)$$
$$= K_n + \overline{B}(0,1/n) \subsetneq \Omega$$

$\forall n\in\mathbb{N}: \ K_n + \overline{B}(0,1/n) \subsetneq \Omega_n$

$\tilde{v}_n = \tilde{u}_n * \rho_n$ $\quad \tilde{v}_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$\tilde{v}_n \in C_c^\infty(\Omega)$

$\operatorname{Supp}(\tilde{u}_n) \subseteq K_n$

$x \in \operatorname{supp}(\tilde{u}_n)$ P.D. $x \in K_n$.

Por complementación, podemos probar que

$$K_n^c \subseteq (\operatorname{supp}(\tilde{u}_n))^c$$

Así $\tilde{v}_n \in \mathcal{D}(\Omega)$

Por lo tanto

$$\|\tilde{v}_n - u\|_{L^p(\Omega)} = \|\tilde{v}_n - \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$
$$= \|\tilde{u}_n * \rho_n - \tilde{u} * \rho_n + \tilde{u} * \rho_n - \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$
$$\leq \|\tilde{u}_n * \rho_n - \tilde{u} * \rho_n\| + \|\tilde{u} * \rho_n - \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$
$$\leq \underbrace{\|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}_{\to 0} \underbrace{\|\rho_n\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}_{1} + \underbrace{\|\tilde{u} * \rho_n - \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}_{\to 0}$$

Por TCDL versión L^p

Por el teorema de la clase pasada

Sucesión regularizante

$(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- $\rho_n \geq 0$
- $\int \rho_n = 1$
- $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
- $\operatorname{supp}(\rho_n) = \overline{B}(0,a_n)$
  (a_n) sucesión de reales positivos decrecientes a cero.

Las funciones L^p_c son densas en L^p

Pues $\tilde{u}_n = \tilde{u}(x)\chi_{K_n}(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}^N$

* $x\in\Omega \Rightarrow x\in K_{m_0} \Rightarrow \forall n\geq m_0 \quad x\in K_n$

$$\therefore \tilde{u}_n(x) \to \tilde{u}(x)$$

* $x\notin\Omega \Rightarrow \tilde{u}_n(x) = 0$ pues $x\notin K_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\tilde{u}(x)=0$ $\therefore \tilde{u}_n(x) \to \tilde{u}(x)$

$$|\tilde{u}_n(x)| = |\tilde{u}(x)\chi_{K_n}(x)| \leq |\tilde{u}(x)| \qquad \tilde{u}\in L^p(\mathbb{R}^N)$$

$\therefore \tilde{v}_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, como se quería. ∎

Observación Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, entonces $K_n = \overline{B}(0,n)$ pues $\operatorname{dist}(x,(\mathbb{R}^N)^c) = \operatorname{dist}(x,\emptyset) = +\infty$. y la demostración no varía.

Corolario. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío. Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que
$$\int_\Omega u\varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$
entonces $u = 0$ ctp en Ω.

Demostración

Basta probar que $u=0$ ctp en K, $\forall K \subseteq \Omega$ compacto

P.D. $\underbrace{\int_K |u| \, dx}_{\text{Esta es la norma en } L^1_{loc}(\Omega)} = 0 \iff \int_{\mathbb{R}^N} |u| \chi_K \, dx = 0$

$x \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u| \chi_K \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u \operatorname{sign}(u) \chi_N$$

P.D $\int_{\mathbb{R}^N} u \operatorname{sign}(u) \chi_N = 0.$

Sabemos que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\quad \int_\Omega u\varphi \, dx = 0.$

Consideremos
$$v_n = \operatorname{sign}(u) \chi_K * \rho_n$$
Notar que $\operatorname{sign}(u) \chi_K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ a soporte compacto K y $v_n \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ donde
$$\operatorname{supp}(v_n) \subseteq \underbrace{K + \overline{B}(0, 1/n)}_{\text{Esto puede salir de } \Omega}$$

Para n suficientemente grande

consideremos N tq $\operatorname{dist}(K, \Omega^c) \geq 2N^{-1}$, entonces
$$\operatorname{supp}(v_n) \subsetneq \Omega \Rightarrow v_n \in C^\infty_c(\Omega) \quad \forall n \geq N$$

Así, usando la hipótesis, se tiene que
$$\int_{\mathbb{R}} u v_n \, dx = 0 \quad \forall n \geq N.$$

Notar que por definición $v_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $v_n \to \operatorname{sign}(u)\chi_K$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$ por las propiedades de convolución

Así, existe una subsucesión $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq

Convergencia en L^1 no implica convergencia ctp.

$$v_{n_k} \to \operatorname{sign}(u) \chi_K \quad \text{ctp en } \mathbb{R}^N$$
$$\Rightarrow v_{n_k} \cdot u \to u \operatorname{sign}(u) \chi_K \text{ ctp en } \mathbb{R}^N$$

Además,
$$\|v_{n_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|\operatorname{sing}(u)\chi_K * \rho_{n_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\operatorname{sign}(u)\chi_K\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|\rho_{n_k}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

$$\therefore \|v_{n_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\operatorname{sign}(u)\chi_L\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

Luego,

$$|u v_{n_k}(x)| = |u(x)|\,|v_{n_k}(x)| \leq |u(x)|\,\|v_{n_k}\|_{L^\infty} \leq |u(x)|\,\|\operatorname{sign}(x)\,\chi_n\|_{L^\infty}$$

Como $\operatorname{supp}(v_{n_k}) \subseteq K + \overline{B}(0, 1/N)$ $\forall k \geq N$, entonces consideramos E abierto de $\mathbb{R}^N$ tal que $E \subset\subset \Omega$ y $K = \overline{B}(0, 1/N)$

Viernes, 12 de enero de 2024.

Densidad de funciones regulares en $W^{1,p}(\Omega)$.

Lema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío. Si $\theta \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\nabla\theta \in L^\infty(\Omega)^N$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, entonces

$$\theta u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}: \frac{\partial}{\partial x_i}(\theta u) = \theta \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} u$$

Demostración

P.D. $\theta u \in L^p(\Omega)$ y $(\forall i \in \{1, \dots, N\})\left(\exists \frac{\partial}{\partial x_i}(\theta u) \in L^p(\Omega)\right)$

1) $\underbrace{\theta}_{\in L^\infty} \underbrace{u}_{\in L^p} \in L^p(\Omega)$

2) $\underbrace{\theta}_{\in L^\infty} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\in L^p} + \underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}}_{\in L^\infty} \underbrace{u}_{\in L^p} \in L^p \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$

3) Sea $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ e $i \in \{1, \dots, N\}$.

$\theta \in C^1(\Omega)$ y $\varphi \in C_c^1(\Omega) \Rightarrow \theta\varphi \in C_c^1(\Omega)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(\theta\varphi) = \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$ en Ω

$$\int_\Omega (\theta u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx$$

$$= \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta\varphi) - \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right] u\, dx \qquad \text{Aplicando la regla del producto}$$

$$= \int_\Omega u \frac{\partial(\theta\varphi)}{\partial x_i}\, dx - \int_\Omega u \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\, dx$$

$$= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(\theta\varphi)\, dx - \int_\Omega u \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\, dx$$

$$= -\int_\Omega \varphi \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \theta + u \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right]}_{\in L^p} dx$$

Por lo tanto, por definición se ha probado que θu posee derivadas débiles de orden 1 en x_i para todo $i \in \{1, \dots, N\}$, y

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta u) = \theta \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} u$$

Si consideramos $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty]$, entonces notando

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

$\Rightarrow \tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$

¿$\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$?
No, en general.

Lema. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Consideremos

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Si $\theta \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\operatorname{supp}(\theta) \subsetneq \Omega$, entonces $\theta\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y

$$\forall i \in \{1,\dots,N\} \quad : \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\theta\tilde{u} = \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}\theta u + \theta\frac{\partial u}{\partial x_i}}$$

Demostración

Notemos que $\theta\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ pues $\theta \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\nabla\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$ por lo demostrado previamente

$$\widetilde{u\frac{\partial}{\partial x_i}\theta + \theta\frac{\partial u}{\partial x_i}} = \begin{cases} u\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \theta\frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

De forma análoga a lo realizado previamente, se tiene el resultado.

Lema. Si $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1,+\infty]$, entonces $\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y

$$\forall i \in \{1,\dots,N\} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * u) = \rho * \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Demostración

P.D. $\rho * u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $(\forall i \in \{1,\dots,N\})\left(\exists \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * u) \in L^p(\mathbb{R}^N)\right)$

1) $\rho * u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ por la desigualdad de Young para la convolución

2) $\rho * \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $\forall i \in \{1,\dots,N\}$ por la desigualdad de Young para la convolución

3) Sean $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ e $i \in \{1,\dots,N\}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\underbrace{\rho_n}_{\in L^1} * \underbrace{u}_{\in L^p})(x)\, \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)}_{\in L^q}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\check{\rho}_n * \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)(x)\, u(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\check{\rho}_n * \varphi\right)(x)\, u(x)\, dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^N}(\check{\rho}_n * \varphi)(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^N}\left(\rho_n * \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(x)\, \varphi\, dx$$

Por lo tanto, se ha probado que

$f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ p, q son exponentes conjugados

$$\int_{\mathbb{R}^N}(f*g)(x)\,h(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}(\check{f} * h)(x)\,g(x)\,dx$$

$$\check{f}(x) = f(-x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (v_n * u)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \left(v_n * \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(x)\, \varphi(x)\, dx$$

Así, $v_n * u$ posee todas sus derivadas débiles de 1^{er} orden y

$$\forall i \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(v_n * u) = v_n * \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

[*] Como $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$, existe una sucesión (v_n) en $C_c^1(\Omega)$ tal que $v_n \to \rho$ en $L^1(\Omega)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (v_n * u)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}^N} (\rho * u)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(v_n * \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(x)\, \varphi_i(x)\, dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\rho * \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \varphi(x)\, dx$$

Idea

$v_n \to \rho$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$ $\qquad v_n * u \to \rho * u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$

$$\forall i \in \{1,\dots,N\} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(v_n * u) = \rho * \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * u) = \rho * \frac{\partial u}{\partial x_i} \Rightarrow \rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

$$\|v_n * u - \rho * u\|_{L^p} \to 0 \iff \|(v_n - \rho) * u\|_{L^p} \leq \overbrace{\|v_n - \rho\|_{L^1}}^{0} \|u\|_{L^p}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(v_n * u) - \rho * \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} = \left\| v_n * \frac{\partial u}{\partial x_i} - \rho * \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

$$\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \|v_n - \rho\|_{L^1} \to 0$$

Martes, 16 de enero de 2024

$W^{m,p}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío.

$(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión regularizante $\begin{cases} \cdot\ \rho_n \geq 0 \\ \cdot\ \rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \\ \cdot\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n\, dx = 1. \end{cases}$

$\Omega \Rightarrow$ Existe una sucesión creciente $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos compactos tales que

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

① Dado Ω, ¿Existe una sucesión $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos tales que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \omega_n \subset\subset \Omega \quad \text{y} \quad \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n \text{ ?}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \omega_n \subsetneq \overline{\omega_n} \subsetneq \Omega$$

$(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión creciente

② ¿Existe una sucesión $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$\theta_n = 1$ en W_n, $\theta_n = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus \overline{W_{n+2}}$ y $0 \le \theta_n \le 1$?

$$W_n = \{x\in\mathbb{R}^N : x \in B(0,n+1),\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N\setminus\Omega) > 2(n+1)^{-1}\}$$

W_n es abierto.

$$B(0,n+1) \cap \{x\in\mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N\setminus\Omega) > 2(n+1)^{-1}\}$$

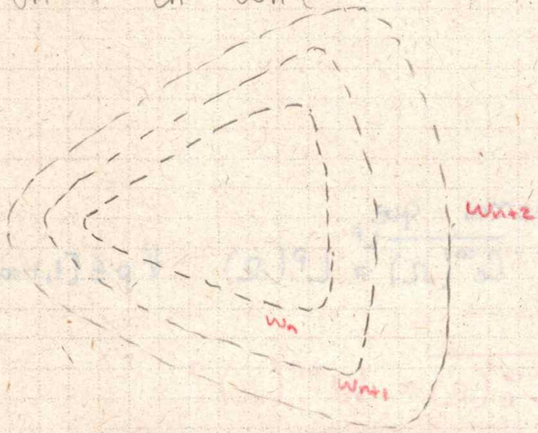
Por lo hecho previamente, existe $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$.

Luego, si definimos

$$\theta_n : \underbrace{\chi_{W_{n+1}}}_{\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)} * \underbrace{\rho_n}_{\in L_c^1(\mathbb{R}^N)} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \cdot\ \operatorname{supp}(\theta_n) \subseteq W_n + B(0, 1/n) \subseteq \overline{W_{n+1}}$$

$\cdot\ \theta_n = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus W_{n+2}$

$\theta_n = 1$ en W_n ¿?



$\operatorname{supp}(\rho_n) = \overline{B}(0, a_n)$, donde

[*] $0 < a_n < \min\{\operatorname{dist}(W_n, \Omega\setminus W_{n+1}), \operatorname{dist}(W_{n+2}, \Omega\setminus W_{n+2})\}$

$\cdot$ P.D. $\theta_n = 1$ en W_n

$\boxed{x-y \in W_{n+1}}$

Sea $z \in W_n$ cualesquiera. Entonces

$$\theta_n(z) = \rho_n * \chi_{W_{n+1}}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{W_{n+1}}(x-y)\rho_n(y)\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\,dy = 1. \qquad \text{De [*]}$$

Ahora, si tomamos $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{W_{n+2}}$, entonces

$$\theta_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{N+1}(x-y)\rho_n(y)\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} 0\,\rho_N(y)\,dy$$
$$= 0.$$

Por otro lado

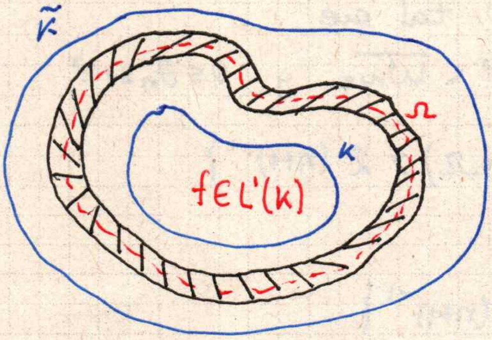
$$|\theta_n(x)| = |\rho_n * \chi_{W_{n+1}}(x)| \le \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n(x-y)\chi_{N+1}(y)|\,dy \le 1.$$

Miércoles, 17 de enero de 2024

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío.

$f \in L^p(\Omega) \Rightarrow \tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ Extensión natural

¿$f \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow \tilde{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$? No. Considere $\tan(x)$ en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



En general, $\tilde{f}$ no necesariamente está controlada en una región que contiene a la frontera de Ω

Consideremos la cero-delta extensión de una función localmente integrable.

Extensión cero-delta de una función localmente integrable.

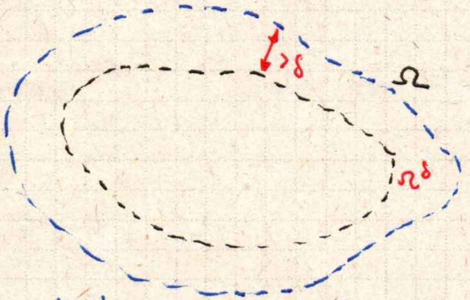
Dada una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, se define la cero-delta extensión de f denotada por $\tilde{f}^{(\delta)}$, como

$$\tilde{f}^{(\delta)} = \begin{cases} f & \text{en } \overline{\Omega^\delta} \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega^\delta} \end{cases}$$

donde $\Omega^\delta = \{ \underset{\in \mathbb{R}^N}{x \in \Omega} : \text{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > \delta \}$

Notar que $\Omega^\delta \subseteq \Omega$. y es abierto.

¿ $f \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow \tilde{f}^{(\delta)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$? Sí



Sabemos que $\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{L^p} = L^p(\Omega) \quad \forall p \in [1, +\infty[$

¿ $\overline{C_c^\infty(\Omega)} = W^{1,p}(\Omega)$?

No es cierto en general.

¡Si $\Omega = \mathbb{R}^N$ es cierto!

El problema de la extensión natural por cero fuera de Ω, radica en que no será posible hallar derivadas débiles en $\mathbb{R}^N$ de estas extensiones, pues estas extensiones ni siquiera son $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Idea: Generar un espacio fuera de la frontera pero en el interior de Ω para generar funciones que decaigan de manera suave.

Observación: Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, entonces $\tilde{f}^{(\delta)} = f$

Para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ es posible definir la convolución con una sucesión regularizante. (familia de funciones regularizantes) (ρ_δ)

$$\rho_\delta * f = f_\delta \underset{\uparrow \text{ definición}}{=} \rho_\delta * \tilde{f}^{(\delta)}$$

1) $f_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ $\qquad f_\delta = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$

Si $x \in \Omega^\delta$

$$f_\delta(x) = \rho_\delta * \tilde{f}^{(\delta)}(x) = \int_\Omega \rho_\delta(x-y) \tilde{f}^{(\delta)}(y)\, dy.$$

$$= \int_\Omega \tilde{f}^{(\delta)}(x-y) \rho_\delta(y)\, dy.$$

$x \in \Omega^\delta$ y $y \in \text{supp}(\rho_\delta) \subseteq \overline{B}(0, \delta)$

$x - y \in \overline{\Omega^\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$.

$$= \int_\Omega f(x-y) \rho_\delta(y)\, dy.$$

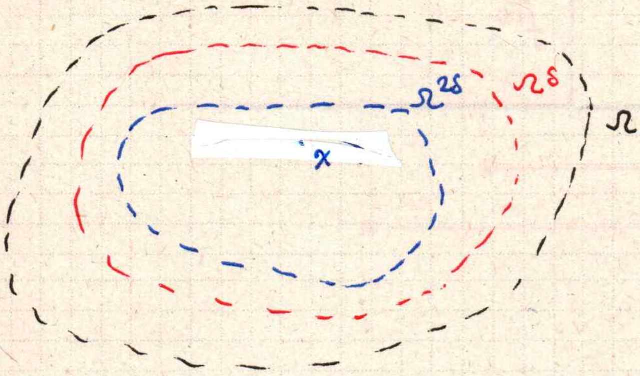
Para algún $\delta > 0$.

Con estas observaciones, notar que para $x \in \overline{\Omega^{2\delta}}$

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\overline{B}(x,\delta) \subseteq \overline{\Omega^\delta}} \rho_\delta(x-y) f(y)\, dy & \text{si } x \in \overline{\Omega^{2\delta}} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega^{2\delta}} \end{cases} \qquad [*]$$

$\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > \delta \Rightarrow x \in \Omega^\delta$ $\qquad \Omega^{2\delta} \subseteq \Omega^\delta$

$\Omega^{2\delta} \subseteq \Omega^\delta$



~~Mostremos que la integral de [*] es finita.~~
Si $x \in \mathbb{R}^N$

$$f_\delta(x) = \rho_\delta * \tilde{f}^{(\delta)}(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\delta(x-y)\, \tilde{f}^{(\delta)}(y)\, dy$$

$$= \int_{\overline{\Omega}^\delta} \rho_\delta(x-y)\, \tilde{f}^{(\delta)}(y)\, dy = \int_{\overline{\Omega}^\delta} \rho_\delta(x-y)\, f(y)\, dy$$

Ahora, tomemos $x \in \overline{\Omega^{2\delta}}$ y si $x-y \notin \underset{\overline{B}(0,\delta)}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{supp}(\rho_\delta)}}$ entonces $\rho_\delta(x-y) = 0$.

$$y \in \{x\} - \overline{B}(0,\delta) = \overline{B}(x,\delta)$$

Jueves, 18 de enero de 2024

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

Idea: Regularizar localmente a f.

δ - extensión por cero de f.

$\Omega^\delta := \{ x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > \delta \}$ es abierto.

Además, Ω^δ es no vacío si δ es suficientemente pequeño.

Sea $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos tales que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \omega_n \subset\subset \Omega, \quad \overline{\omega_n} \subsetneq \omega_{n+1} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n = \Omega.$$

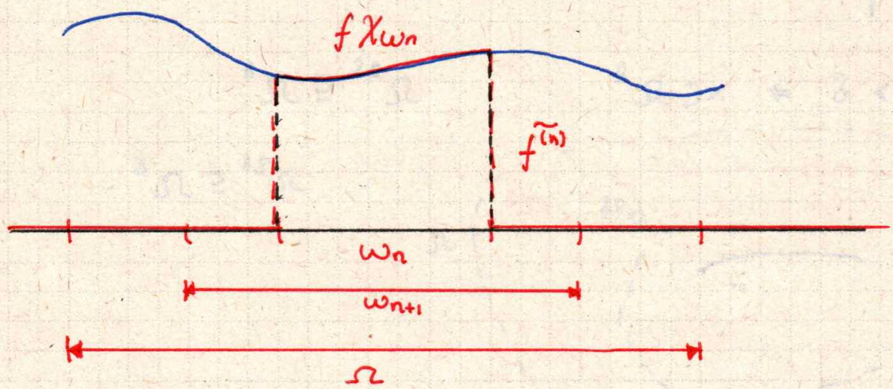
Además, sea $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión tal que $0 < \varepsilon_n < \operatorname{dist}(\overline{\omega_n}, \mathbb{R}^N \setminus \omega_{n+1})$ y $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión regularizante tal que

$$\operatorname{supp}(\rho_n) \subseteq \overline{B}\left(0, \frac{\varepsilon_n}{2}\right)$$

Definiendo la n-extensión por cero de f se define por

$$\tilde{f}^{(n)}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \omega_n \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \omega_n \end{cases}$$

Gráfico.



$\tilde{f}^{(n)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

La regularización local de f se define como $\rho_n * \tilde{f}^{(n)}$

① Note que $\rho_n * \tilde{f}^{(n)} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Más aún, $\operatorname{supp}(\rho_n * \tilde{f}^{(n)}) \subsetneq \Omega$ y así

$$\rho_n * \tilde{f}^{(n)} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega$$

$$\rho_n * \tilde{f}^{(n)}\Big|_\Omega \in C_c^\infty(\Omega)$$

P.D. $\operatorname{supp}(\rho_n * \tilde{f}^{(n)}) \subsetneq \Omega$.

Sea $x \in \operatorname{supp}(\rho_n * \tilde{f}^{(n)}) \subseteq \operatorname{supp}(\rho_n) + \operatorname{supp}(\tilde{f}^{(n)})$

$$\subseteq \overline{B}(0, \varepsilon_n/2) + \overline{\omega_n}$$

Basta probar que $\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > 0$. Sea $z \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Existe $x_1 \in \overline{B}(0, \varepsilon_n/2)$ y $x_2 \in \overline{\omega_n}$ tales que $x = x_1 + x_2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|x - z\| &= \|x_1 + x_2 - z\| \\ &\geq \|x_2 - z\| - \|x_1\| \\ &\geq \operatorname{dist}(x_2, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) - \varepsilon_n/2 \\ &> \operatorname{dist}(x_2, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) - \tfrac{1}{2}\operatorname{dist}(\overline{\omega_n}, \mathbb{R}^N \setminus \omega_{n+1}) \\ &\geq \operatorname{dist}(\overline{\omega_n}, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) - \tfrac{1}{2}\operatorname{dist}(\overline{\omega_n}, \mathbb{R}^N \setminus \omega_{n+1}) \end{aligned}$$

Notar que

$$\operatorname{dist}(\overline{\omega_n}, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq \operatorname{dist}(\overline{\omega_n}, \mathbb{R}^N \setminus \omega_m) \quad \forall\, m > n$$

con lo cual,

$$\operatorname{dist}(\overline{\omega_n}, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) - \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\overline{\omega_n}, \mathbb{R}^N \setminus \omega_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\overline{\omega_n}, \mathbb{R}^N \setminus \omega_{n+1})$$

Con lo anterior, se ha probado que $\rho_n * \tilde{f}^{(n)}\big|_{\Omega} \in C_c^\infty(\Omega)$.

$$\rho_n * \tilde{f}^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\, \tilde{f}^{(n)}(y)\, dy.$$

$$= \int_{\overline{B}(x,\varepsilon_n/2)\cap\overline{\omega_n}} \rho_n(x-y)\, \tilde{f}^{(n)}(y)\, dy$$

$$= \int_{\overline{B}(x,\varepsilon_n/2)\cap\overline{\omega_n}} \rho_n(x-y)\, f(y)\, dy$$

$$\overset{?}{=} \int_{\overline{B}(x,\varepsilon_n/2)} \rho_n(x-y)\, f(y)\, dy$$

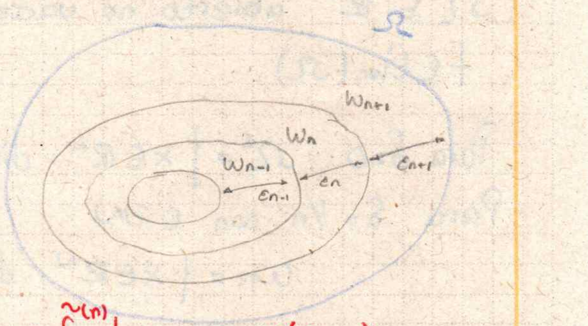
Esto es cierto para $\overline{\omega_{n-1}}$, i.e., $x \in \overline{\omega_{n-1}}$

Sabemos que $\operatorname{dist}(\overline{\omega_n}, \mathbb{R}^N \setminus \omega_{n+1}) \geq \varepsilon_n > 0$.

Busquemos, para que $x \in \mathbb{R}^N$ $\overline{B}(x,\varepsilon_n/2) \subseteq \overline{\omega_n}$. Sea $y \in \overline{B}(x,\varepsilon_n/2)$, entonces

$$\|y-x\| \leq \varepsilon_n/2.$$

P.D. $y \in \overline{\omega_n} \iff \operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^N \setminus \overline{\omega_n}) > 0$.



Por lo anterior, podemos definir $\rho_n * \tilde{f}^{(n)}$ en $\overline{\omega_{n-1}}$

Idea: Regularización local de f (en un abierto compactamente contenido en Ω) $\rho_n * f = \rho_n * \tilde{f}^{(n)}\big|_{\omega_{n-1}} \in C^\infty(\omega_{n-1})$

Observación: Hemos definido la regularización de una función localmente integrable en $\mathbb{R}^N$. En efecto, si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y ρ_n una sucesión regularizante entonces

$$\rho_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Supongamos más aún que f posee derivada débil α-ésima, i.e., existe $\partial^\alpha f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$

$$\rho_n * \partial^\alpha f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Notación. De lo hecho antes de la observación, se tiene que

$$\rho_n * f = \rho_n * \tilde{f}^{(n)}\big|_{\omega_{n-1}} \in C^\infty(\omega_{n-1}).$$

Pregunta natural: ¿Existe alguna relación entre

$$\partial^\alpha(\rho_n * f) = \rho_n * \partial^\alpha f \ ?$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío. Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que existe $\partial^\alpha f \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces

$$\partial^\alpha(\rho_n * f) = \rho_n * \partial^\alpha f \quad \text{en } \omega_{n-1}$$

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}} = W_0^{1,p}(\Omega)$$

Martes, 23 de enero de 2024

Aproximación de funciones de Sobolev.

En $\mathbb{R}^N$: convolución

- Si $f \in C(\mathbb{R}^N)$, $\underbrace{\rho_n * f}_{C^\infty(\mathbb{R}^N)} \to f$ uniformemente en compactos.

- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\rho_n * f \to f$ en L^p

Gracias a lo anterior, se pudo mostrar que
$$\overline{D(\Omega)}^{L^p} = L^p(\Omega) \quad \forall\, 1 \leq p < +\infty \quad (\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \text{ no vacío})$$

En particular, se tiene que $\overline{D(\mathbb{R}^N)}^{L^p} = L^p(\mathbb{R}^N)$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío.
$f \in L^1_{loc}(\Omega)$

Definimos la convolución mediante una δ-extensión por cero
$\Downarrow$
Definir la convolución para funciones definidas en Ω.

Para $\delta > 0$, $\Omega^\delta = \{ x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > \delta \}$
Para $\delta = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$
$$\omega_n = \{ x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > 1/n \}$$

con esto, obtenemos
$\{\Omega^\delta\}_{\delta > 0}$ una familia de conjuntos abiertos decreciente
$\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de abiertos.

Definamos

Regularización local de f
$$f_\delta := \rho_\delta * f = \int_\Omega \rho_\delta(x-y) f(y)\, dy$$
con $\{\rho_\delta\}_{\delta > 0}$ familia de regularizadores
- $\rho_\delta \geq 0$
- $\rho_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$
- $\operatorname{supp}(\rho_\delta) \subseteq \overline{B}(0, \delta)$
- $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\delta\, dx = 1$.

f_δ está bien definida en Ω^δ
$$f_\delta(x) = \int_{\overline{B}(x,\delta)} \rho_\delta(x-y) f(y)\, dy$$

$x \in \Omega^\delta \Rightarrow \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > \delta$
$\Rightarrow \alpha: \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) - \delta > 0$
$\overline{B}(x, \delta) \subsetneq \Omega$.

Sea $z \in \overline{B}(x, \delta)$, mostremos que $z \in \Omega$.
Tomando $v \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, se sigue que
$$\|z - v\| = \|z - x + x - v\|$$
$$\geq \|x - v\| + \|z - x\| \geq \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) - \|z - x\| = \delta$$

Con esto, se ha mostrado que

$$\therefore \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \qquad \|z - v\| \geq \alpha$$

$$\therefore \operatorname{dist}(z, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = \inf_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega} \|z - v\| \geq \alpha > 0$$

$$\therefore z \in \Omega .$$

Así, sea $x \in \Omega_\delta$, entonces

$$\int_\Omega |\rho_\delta(x-y)||f(y)|\, dy = \int_{\overline{B}(x,\delta)} \rho_\delta(x-y)|f(y)|\, dy$$

$$\leq \|\rho_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\overline{B}(x,\delta)} |f(y)|\, dy. < +\infty.$$

Teorema: - Aproximación local mediante funciones suaves. -

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío:

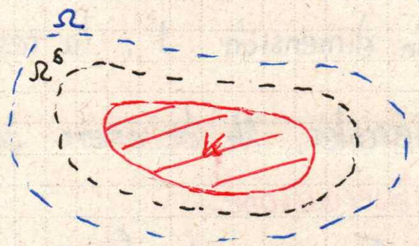
a) Si $f \in C^0(\Omega)$, entonces $f_\delta \xrightarrow[\delta \to 0^+]{} f$, uniformemente en compactos de Ω

b) Si $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, entonces

$$f_\delta \xrightarrow[\delta \to 0^+]{} f \quad \text{en} \quad L^p_{loc}(\Omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall K \subset\subset \Omega . \quad f_\delta \xrightarrow[\delta \to 0^+]{} f \quad \text{en } L^p(K)$$



c) Si $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_\delta = \rho_\delta * \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad y \quad f_\delta \xrightarrow[\delta \to 0^+]{} f \quad \text{en} \quad W^{1,p}_{loc}(\Omega).$$

Teorema. - Aproximación global mediante funciones suaves - Meyers-Serrin

Sea Ω abierto no vacío. $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$

$$\overline{C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)}^{W^{1,p}} = W^{1,p}(\Omega)$$

para todo p con $p \in [1, +\infty[$.

Demostración

1) Construcción de una familia de abiertos que aproximan a Ω desde el interior, denotada $(V_i)_{i \geq 1}$.

2) Hallar una partición suave de la unidad.

Teorema - Definición

Ver Lema 9.3. Pág 276 [1]

Dada una familia $\mathcal{O}$ de abiertos de $\mathbb{R}^n$ existe una colección o familia de funciones que llamaremos Φ en C^∞ definidas en $\underbrace{\bigcup_{w \in \mathcal{O}} w}_{= \Omega}$ que satisfacen lo siguiente:

1) $0 \leq \varphi \leq 1$ en Ω

2) $\forall K \subsetneq \Omega$ compacto, $\{\varphi \in \Phi : supp(\varphi) \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.

3) $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi = 1$ en Ω

Gracias al literal anterior, esto es una suma finita

4) $(\forall \varphi \in \Phi)(\exists U \in \mathcal{O})(supp(\varphi) \subseteq U)$

- Una familia que satisface (1)-(3) define las particiones de la unidad
- (4): Define a las particiones de la unidad como subordinadas a dicha familia de abiertos

$C^\infty(\Omega)$: No necesariamente posee extensión continua a la frontera.

$C^\infty(\bar{\Omega})$: Extensión continua a $Adh(\Omega)$.

¿Es posible aproximar una función $f \in W^{1,p}(\Omega)$ mediante funciones $C^\infty(\bar{\Omega})$?

¿Las funciones en $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ poseen extensión continua a la frontera?

En dimensión 1, la respuesta es sí.

Miércoles, 24 de enero de 2024

Observaciones

1) En general, funciones en $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío, no pueden ser extendidas a la frontera continuamente debido al posible no acotamiento de las derivadas en Ω.

2) Los teoremas de aproximación local:

$f \in W^{m,p}(\Omega)$ $\quad f_\delta \xrightarrow[\delta \to 0^+]{} f$ en $W^{m,p}_{loc}(\Omega)$

Se demuestra por inducción usando el resultado en $W^{1,p}$

Aproximación global

$$\overline{C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)}^{W^{m,p}} = W^{m,p}(\Omega)$$

3) Se suele indicar que la aproximación global se verifica si Ω es acotado (Evans) Pág 252. Se puede usar

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{L^p} = L^p(\Omega)$$

4) La aproximación global puede verse como una definición equivalente a la dada para $W^{m,p}(\Omega)$.

Así, como $\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{L^p} = L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < +\infty$, entonces

$$¿\ \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}} = W^{1,p}(\Omega) \qquad 1 \le p < +\infty ?$$

Para mostrar que lo anterior No es cierto, consideremos una función $u^* \in C^\infty(\bar\Omega)$ no nula. tal que satisface que

$$(P) \qquad -\Delta u^* + u^* = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Si Ω es acotado y suficientemente regular, es posible probar que una solución débil para (P) en realidad regular (teoría de regularidad de soluciones) débiles

Con lo anterior, se define

$$T_{u^*} : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto T\varphi = \int_\Omega u^* \varphi \, dx + \sum_{k=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \, dx$$

Notar que $T_{u^*} \in (W^{1,p}(\Omega))^*$. Además, como $C_c^\infty(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ $\nabla u, \nabla \varphi$

$$T_{u^*}\varphi = \int_\Omega u^* \varphi \, dx + \sum_{k=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \, dx$$

Teo. Integración por partes clásico.

$$= \int_\Omega u^* \varphi \, dx - \sum_{k=1}^N \int_\Omega \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_k} \varphi \, dx$$

Así, como $u^* \in C^\infty(\bar\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$, entonces por lo anterior

$$= \int_\Omega \cancelto{0}{(u^* - \Delta u^*)} \varphi \, dx = 0$$

Las integrales anteriores están bien definidas pues $u^* \in C^\infty(\bar\Omega)$ y así $u^* \in L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, +\infty]$.

si por absurdo suponemos que sí es cierto.

Esto nos dice que $T = 0$ en $C_c^\infty(\Omega)$ y por lo tanto $T = 0$ en $W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow\Leftarrow$

Usando T.HB

Pues

$$T_{u^*}(u^*) = \int_\Omega (u^*)^2 \, dx + \sum_{k=1}^N \int_\Omega \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_k}\right)^2 dx > 0 \quad \text{dado que } u^* \text{ es no nula.}$$

y así, se ha probado que

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}} \neq W^{1,p}(\Omega)$$

Teorema.

En el caso de que $\Omega = \mathbb{R}^N$, entonces

$$\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^N)}^{W^{1,p}} = W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \qquad 1 \le p < +\infty.$$

Demostración

1) Argumento de truncamiento (Construimos funciones con soporte compacto).

2) Argumento de regularización (Convolución. permite regularizar las funciones anteriores, no necesariamente regulares)

Paso 1) Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Por la existencia de funciones de corte (cut-off) se tiene que existe una función $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$0 \le \xi \le 1 \qquad \xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\|<1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \ge 2 \end{cases}$$

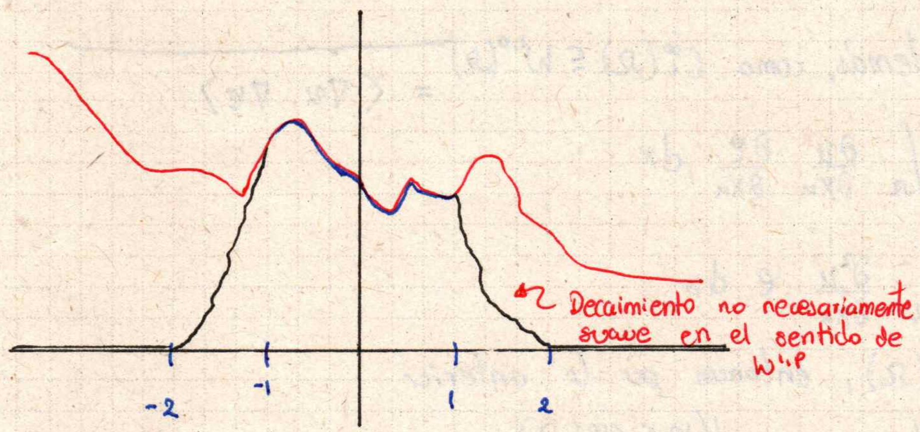
Se define, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^N$ $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le \xi_n \le 1.$

$$\xi_n(x) = \xi\left(\frac{x}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \|x\|<n \\ 0 & \|x\| \ge 2n \end{cases}$$

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \xi_n u$$

Notar que $\operatorname{supp}(u_n) \subseteq \operatorname{supp}(\xi_n)$ y por tanto es compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$.



Además $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$
Usando el Lema del Viernes 12 de enero.

Más aún

$$u_n \to u \quad \text{en } W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

P.D. $u_n \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$

$\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$

$\forall i \in \{1, \dots, N\}$

- $u_n(x) \to u(x)$ ctp en $x \in \mathbb{R}^N$

$$\xi_n u(x) \to u(x)$$

Sea $x \in \mathbb{R}^N$. Por la propiedad arquimediana existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\|<M$. Más aún, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \ge M$, se tiene que $\|x\|<n$. Por lo tanto,

$$u_n(x) = \xi_n(x)u(x) = u(x) \to u(x)$$

Luego,

$$|u_n(x)| = |\xi_n(x)u(x)| \le |u(x)| \quad \text{donde } u \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

Por el TCDL. $u_n \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Paso 2

P.D. $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$

Sabemos que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} u + \xi_n \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

P.D. $\dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_i} u \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$

En efecto, notemos que

$$\left\| \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} u \right\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \right|^p |u|^p \, dx$$

Así, como

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{n}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\left(\frac{x}{n}\right) \qquad \text{con } D = \max_{y\in\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\xi(y)\right|$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial \xi_n}{\partial x_i}\right|^p |u|^p\,dx \leq \frac{1}{n^p}\int\left|\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\left(\frac{x}{n}\right)\right|^p |u|^p\,dx \leq \frac{D}{n^p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\,dx \to 0$$

P.D. $\xi_n \frac{\partial u}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$

Jueves, 24 de enero de 2024

En general, si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío, sabemos que

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$$

No obstante, si $\Omega = \mathbb{R}^n$, entonces

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)} = W^{1,p}(\Omega)$$

Demostración

1) Argumento de truncamiento.

$$u_n = \xi_n u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \qquad \operatorname{supp}(u_n) \text{ es compacto}$$

entonces $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. $\quad u_n \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\partial \xi_n}{\partial x_i}u}_{\to 0 \text{ en } L^p} + \underbrace{\xi_n\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\to \frac{\partial u}{\partial x_i}} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N) \qquad \text{en } L^p \quad \text{TCDL}$$

2) Argumento de regularización.

Sean $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, y $\varepsilon > 0$. P.D. Existe $v_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ $\|u - v_\varepsilon\|_{W^{1,p}} < \varepsilon$

Por el argumento de truncamiento, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $u_{n_0} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $\operatorname{supp}(u_{n_0})$ compacto y

$$\|u - u_{n_0}\|_{W^{1,p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Definamos $v_n := \rho_n * u_{n_0}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Con lo cual $v_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

P.D $v_n \to u_{n_0}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

1) $\rho_n * u_{n_0} \longrightarrow u_{n_0}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$

2) $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * u_{n_0}) = \rho_n * \frac{\partial}{\partial x_i}u_{n_0} \longrightarrow \frac{\partial u_{n_0}}{\partial x_i}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ $\quad \forall i \in \{1,\dots,N\}$.

Tomando $v_{n(\varepsilon)} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|v_{n(\varepsilon)} - u_{n_0}\|_{W^{1,p}} < \varepsilon/2$, se sigue que

$$\|u - v_{n(\varepsilon)}\|_{W^{1,p}} \leq \|u - u_{n_0}\|_{W^{1,p}} + \|u_{n_0} - v_{n(\varepsilon)}\| < \varepsilon$$

con lo que se prueba lo requerido.

Observación.

1) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall\, 1 \leq p < +\infty$: $\qquad \overline{C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)} = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$

Para demostrar esto se puede proceder por inducción o aplicar el mismo esquema de demostración anterior

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío abierto

$$\overline{\{\varphi \in C^{\infty}(\Omega) : \|\varphi\|_{W^{m,p}} < +\infty\}} = W^{m,p}(\Omega)$$

Definición Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío, entonces

$$\overline{C_c^{\infty}(\Omega)}^{W^{1,p}} = W_0^{1,p}(\Omega)$$

Más aún, se tiene que

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^{\infty}(\Omega)}$$

1) • $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial normado con la norma inducida por $W^{m,p}(\Omega)$. Más aún, $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

2) En el caso particular, $p=2$,

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$$

es un espacio de Hilbert.

3) $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

4) $W_0^{m,p}(\Omega)$ es separable si $1 \leq p < +\infty$ y reflexivo si $1 < p < +\infty$

Teorema Desigualdad de Poincaré

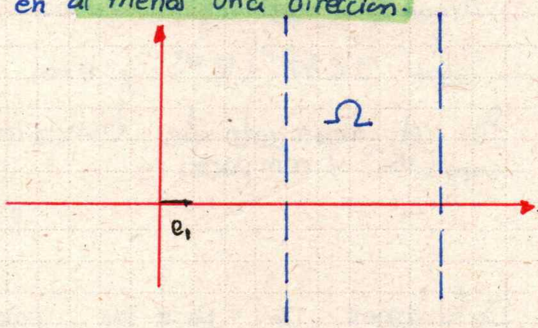
Ver Corolario 9.19 [1].

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado en al menos una dirección.

Entonces existe $C_p > 0$ tal que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Gradiente débil.



Demostración

Sin pérdida de generalidad, supongamos que Ω es acotado en la dirección del vector canónico e_N. Por lo tanto, existen $a, b \in \mathbb{R}$ reales tales que

$$\forall x = (\underbrace{x'}_{\in \mathbb{R}^{N-1}}, \underbrace{x_N}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^N, \quad a < x_N < b \qquad \text{Notación}$$

Dado que $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^{\infty}(\Omega)}$, consideremos $u \in C_c^{\infty}(\Omega)$

Definamos la función

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Por lo tanto, $\tilde{u} \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Para $x=(x',x_N)\in\mathbb{R}^N$

$$\tilde{u}(x)=\tilde{u}(x',x_N)=\int_a^{x_N}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_N}(x',z)\,dz$$

Con esto,

$$|\tilde{u}(u',x_N)|^p=\left|\int_a^{x_N}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_N}(x',z)\,dz\right|^p$$
$$\leq\left(\int_a^{x_N}\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_N}(x',z)\right|dz\right)^p$$
$$\leq\left[\left(\int_a^{x_N}1^q\,dz\right)^{1/q}\left(\int_a^{x_N}\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_N}(x',z)\right|^p dz\right)^{1/p}\right]^p$$
$$\leq (x_N-a)^{p/q}\int_a^{x_N}\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_N}(x',z)\right|^p dz$$

Por lo tanto, integrando sobre $\mathbb{R}^{N-1}$

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}}|\tilde{u}(x',x_N)|^p dx'\leq(x_N-a)^{p/q}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_a^{x_N}\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_N}\right|^p dz\,dx'$$

Integrando sobre el intervalo $[a,b]$ respecto a x_N, se tiene que

$$\int_a^b\int_{\mathbb{R}^{N-1}}|\tilde{u}(x',x_N)|^p dx_1\,dx_N\leq\int_a^b(x_N-a)^{p/q}\,dx_N\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_a^{x_N}\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_N}\right|^p dz\,dx'$$

$$\|$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\tilde{u}(x',x_N)|^p dx\leq C(\Omega,p)\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_N}\right|^p dx$$

$$\|$$

$$\int_\Omega|u(x)|^p dx\leq C(\Omega,p)\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^p dx$$

$$\|$$

$$\|u\|^p_{L(\Omega)}\leq C(\Omega,p)\left\|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right\|^p_{L^p(\Omega)}$$

Con lo que, se sigue que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}\leq C(\Omega,p)\left\|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right\|_{L^p(\Omega)}$$
$$\leq C(\Omega,p)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Así, se ha probado que

$$\forall u\in C_c^\infty(\Omega)\qquad\|u\|_{L^p(\Omega)}\leq C(\Omega,p)\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Ahora, mostremos que lo anterior se cumple para $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$. En efecto, por definición, existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$u_n\to v\ \text{en}\ W^{1,p}(\Omega)$$

Así, por lo anterior, se tiene que

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p) \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}$$

de esta manera, como $u_n \to v$ en L^p y $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha v$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, entonces $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|v\|_{L^p(\Omega)}$ y $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$, con lo que se sigue el resultado.

Pendiente: Revisar caso $p=1$.

La costante de Poincaré $C_p = \inf \{ C > 0 : \|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \}$

↳ Se denomina la constante Poincaré de Ω.

Martes, 30 de enero de 2024

Corolario. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío y acotado al menos en una dirección. Se define la función

$$\begin{aligned} \varphi : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \varphi(u) = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

entonces φ es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a la inducida por $W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración

A priori, si $\varphi(u)=0$, entonces $\nabla u = 0$ y esto, en general, no implica que $u=0$. Por la desigualdad de Poincaré, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$$

con lo cual, si $\varphi(u)=0$, entonces $\|u\|=0$. Por lo tanto, $u=0$ y más aún φ es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Por un lado, para cualquier $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\varphi(u) = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} &= \|u\|^p_{L^p} + \|\nabla u\|^p_{L^p} \\ &\leq C \|\nabla u\|^p_{L^p} + \|\nabla u\|^p_{L^p} \\ &\leq (C+1) \|\nabla u\|^p_{L^p} = (C+1)\varphi(u) \end{aligned}$$

Así, se ha probado que

$$\varphi(u) \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq (C+1) \|\nabla u\|^p_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Observación

1) Cuando Ω sea acotado al menos en una dirección, usaremos como norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ a la función φ.
2) En el caso $p=2$, $H_0^1(\Omega)$ estará dotado del producto escalar:

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

y esta induce la norma ℓ.

3) La desigualdad de Poincaré no se cumple para funciones en $W^{1,p}(\Omega)$.

Supongamos que Ω es acotado y $u = k$ en Ω.

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \Rightarrow\Leftarrow$$

4) La desigualdad de Poincaré sigue siendo válida si $\lambda_N(\Omega) < +\infty$.

Sección: Espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$. (Para exposición).

$$W_0^{1,p}(\Omega)^* = \mathcal{L}\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{notación}}}{=:} W^{-1,p'}(\Omega).$$

con p' es el exponente conjugado de p.

El caso $p=2$,

$$H^{-1}(\Omega) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{notación}}}{=} H_0^1(\Omega)^*$$

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$

$$\langle f, u\rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad \text{con } u \in H_0^1.$$

Sección: Teoremas de inmersión de Sobolev.

Relación entre los espacios de Sobolev y los espacios de Lebesgue o de funciones regulares

$N=1$: $W^{1,p}(I) \subseteq L^p(I)$ Si $u \in W^{1,1}(I) \Rightarrow u$ absolutamente continuas.

$N \geq 2$: Surge la necesidad de conocer la existencia de funciones integrables con otro índice de integrabilidad o de funciones regulares, dentro de las clases de equivalencia de funciones de Sobolev

Definición (Inyección continua)

Sean E, F espacios normados. Se dice que E se inyecta continuamente en F, denotado por $E \hookrightarrow F$, si

i) $E \subseteq F$

ii) $\begin{aligned} id: E &\to F \\ x &\mapsto x \end{aligned}$ es lineal y acotado, es decir,

$$(\exists C > 0)(\forall x \in E)\ (\|x\|_F \leq C\|x\|_E)$$

Motivación

Buscamos averiguar si $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para algún q

Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \overset{?}{\Rightarrow} u \in L^q(\mathbb{R}^N)$

$\Downarrow$

$u \in L^p(\mathbb{R}^N)$

$\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N)$

¿Es posible conocer información sobre la integrabilidad de una función a partir de la integrabilidad del gradiente de dicha función?

Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $\quad \|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}$ (Desigualdad de Poincaré)

$\hookrightarrow$ ¿ $\|u\|_{L^q} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}$ $\Rightarrow$ Técnica de escalamiento $\hookrightarrow$ deducir la existencia de un índice q.

Sea $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

Para $\lambda > 0$, se define

$$u_\lambda(x) = u\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

con esto

$$\|u_\lambda\|_{L^q}^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda(x)|^q\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left|u\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^q dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^q \lambda^n\, dy \qquad \text{Cambio de variable}$$

$$= \lambda^N \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^q\, dy$$

$$= \lambda^N \|u\|_{L^q}^q$$

Por lo tanto, de lo anterior

$$\|u_\lambda\|_{L^q} = \lambda^{\frac{N}{q}} \|u\|_{L^q}$$

Más aún, se tiene que

$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda(x)|^p\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{1}{\lambda}\nabla u\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\lambda^p} |u(x)|^p \lambda^N dx = \lambda^{N-p} \|\nabla u\|_{L^p}.$$

$$\nabla u_\lambda(x) = \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_N}(x)\right) \Rightarrow \nabla u_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\nabla u\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\therefore \|\nabla u_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{N-p} \|\nabla u\|_{L^p}$$

Para que exista $q \geq 1$ tal que

$$\| u_\lambda \|_{L^q} \leq C \| \nabla u_\lambda \|_{L^p}$$

$$\lambda^{\frac{N}{q}} \| u \|_{L^q} \leq C \lambda^{\frac{N-p}{p}} \| \nabla u \|_{L^p}$$

$$\Rightarrow \| u \|_{L^q} \leq C \lambda^{\frac{N-p}{p}} \lambda^{-\frac{N}{q}} \| \nabla u \|_{L^p}$$

$$\Rightarrow \| u \|_{L^q} \leq C \lambda^{\frac{N}{p} - \frac{N}{q} - 1} \| \nabla u \|_{L^q} \qquad \forall \lambda > 0.$$

Haciendo que $\lambda \to 0^+$ o $\lambda \to +\infty$, se evidencia que no podemos obtener información de la q-integrabilidad de u si $\frac{N}{p} - \frac{N}{q} - 1 \neq 0$. Consideremos

$$-\frac{N}{q} + \frac{N}{p} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Con lo anterior, nuestra conjetura es que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow u \in L^q(\mathbb{R}^N)$, con $q \geq 1$ tq $1/q = 1/p + 1/N$.

Miércoles, 31 de enero de 2024

Técnica de escalamiento (Recapitulación).

Si tomamos $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\lambda > 0$, definiendo $u_\lambda(x) = u(x\lambda^{-1})$, hemos encontrado que

$$\frac{N}{p} - \frac{N}{q} - 1 = 0 \qquad W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

Índice de integrabilidad

Con esto, notando $p^* := q$ al cual denominaremos exponente crítico de Sobolev.

$$(p_*)^{-1} = (p)^{-1} - (N)^{-1} \Rightarrow p^* = \frac{Np}{N-p}$$

entonces para $N > p \geq 1$, p^* es positivo

$$\boxed{p^* > p}$$

Teorema (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev).

Dado $1 \leq p < N$, existe $C = C(N,p) > 0$ tal que

$$\forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N): \quad \| u \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

con p^* el exponente crítico de Sobolev.

Demostración: Secuencia adecuada de desigualdades de Hölder (Ver [2]).

- $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < N$

P.D. a) $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$

b) $(\exists K > 0)(\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N))(\| u \|_{L^{p^*}} \leq K \| u \|_{W^{1,p}})$

Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < N$, existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Por la desigualdad de G-N-S, existe $C>0$ tal que

$$\|\nabla u_n\|_{L^p} \to \|\nabla u\|_{L^p}$$

~~Notar que, $\|u_n - u_m\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^p}$. Así, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en L^{p^*} y por lo tanto $u_n \to u$ en L^{p^*}~~

En efecto, como $u_n \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$, existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \text{ ctp } x \in \mathbb{R}^N$$

Como $\forall k \in \mathbb{N}$, $|u_{n_k}|^{p^*} \geq 0$ y

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_k}(x)|^{p^*} dx < +\infty.$$

pues $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en L^{p^*}. Por el Lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{k\to+\infty} |u_{n_k}(x)|^{p^*} \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_k}(x)|^{p^*} dx$$

y

$$|u|^{p^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} dx \leq \liminf_{k\to+\infty} C^{p^*} \|\nabla u_{n_k}\|_{L^p}^{p^*} = C^{p^*}\|\nabla u\|_{L^p}^{p^*}$$

$$\therefore \|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}$$ Esto no muestra que $u_n \to u$ en L^{p^*}

Así, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^{p^*}$ por la desigualdad anterior, más aún esto también muestra que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

y se sigue el resultado

Corolario. Dado $1 \leq p < N$, se tiene que

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

Demostración. Tarea (Desigualdades de interpolación en espacios de Lebesgue)

Observación: Si $1 \leq p < N$, entonces $p \to N \Rightarrow p^* \to +\infty$.

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \overset{?}{-} \text{¿} W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)\text{?} \quad \text{No.}$$

En efecto, consideremos

$$u(x) = \begin{cases} \ln|\ln\|(x,y)\|_2| & 0 < \|(x,y)\| < 1/e \\ 0 & \|(x,y)\| \geq 1/e \end{cases}$$

entonces $u \in W^{1,2=N}$ y $u \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Teorema. Para $p = N$, se tiene que

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

para cualquier $q \in [p, +\infty[$

Demostración Hacer uso de las desigualdades de interpolación y un proceso recursivo.

Ideas:

1) Considerar funciones en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ para mostrar el resultado.
2) Desigualdades de interpolación en espacios de Lebesgue
3) Realizar un proceso recursivo.

Teorema. Para el caso $p > N$, existe $C = C(p, N) > 0$ tal que

$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \qquad |u(x) - u(y)| \leq C \|x - y\|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p} \quad \text{ctp } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Más aún, se tiene que en este caso $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Lo anterior nos dice que « la función u es Hölder continua » más aún nos dice que admite un representante continuo y acotado.

Recordemos que los espacios de funciones Hölder continuas están entre los espacios C^k, i.e.,

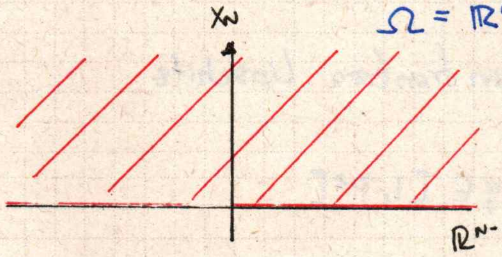
$$C^3 \subseteq C^{2,\lambda} \subseteq C^2 \subseteq C^{1,\lambda} \subseteq C^1 \subseteq C^{0,\lambda} \subseteq C^0.$$

Sección: Teoremas de inmersión en subconjuntos.

Teorema (Teorema de inyecciones continuas para subconjuntos abiertos).

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío tal que

$$\Omega = \mathbb{R}^N_+ \quad \text{o} \quad \Omega \text{ ~~acotado~~ con frontera Lipschitz.}^{a}$$



$$\mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}.$$

$$\partial \mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\}.$$

1) $1 \leq p < N$: $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad q \in [p, p^*]$
2) $p = N$: $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad q \in [p, +\infty[$
3) $p > N$: $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

$\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\Omega) \qquad \lambda = 1 - \frac{N}{p}$ si $p < +\infty$

$\qquad \lambda = 1$ si $p = +\infty$.

Demostración (Ideas)

---

[a] Su frontera se parametriza localmente por funciones Lipchitz continuas.

1) Extender $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a todo el espacio
2) Aplicar los teoremas de inyección en todo el espacio
3) Restringir las extensiones a Ω.

En 1) note que no es posible usar la extensión natural

Jueves, 1 de febrero de 2024

Recapitulación

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, podemos considerar

$$\Omega = \mathbb{R}^N_+ \quad \text{o} \quad \Omega \text{ abierto no vacío acotado con frontera Lipschitz}$$

1) Si $1 \leq p < N$: Ω abierto no vacío con frontera Lipchitz.

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad q \in [p, p^*] \quad \text{con} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

2) Si $p = N$

$$W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \text{con} \quad q \in [p, +\infty[$$

3) Si $p > N$:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0_b(\bar{\Omega})$$

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío (cualquiera)
1) $1 \leq p < N$: $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$
2) $p = N$: $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$
3) $p > N$: $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0_b(\bar{\Omega})$
con los mismos índices

Definición (Inyección compacta)

Sean E, F dos espacios normados. Se dice que E se inyecta compactamente en F, denotado por $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ si

a) $E \subseteq F$

b) $id: E \to F$ es compacto.

Teorema (Inyecciones compactas de Sobolev).

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío acotado con frontera Lipschitz

1) $1 \leq p < N$:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad q \in [1, p^*[$$

2) $p = N$:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad q \in [1, +\infty[$$

3) $p > N$:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0_b(\bar{\Omega})$$

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{N}_0$ con

$$\Omega = \mathbb{R}^n_+ \quad \text{o} \quad \Omega \text{ abierto no vacío con frontera Lipschitz}$$

Ω

Para los espacios $W_0^{m,p}$ no se requiere regularidad en la frontera pero se tienen los mismos resultados.

1) $mp < N$:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{con } q \in [p, p^*] \qquad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$$

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{j,q}(\Omega)$$

Notación $W^{0,q}(\Omega) = L^q(\Omega)$.

2) $mp = N$:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{con } q \in [N, +\infty[$$

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{j,q}(\Omega).$$

Teoremas de inyecciones compactas

$\Updownarrow$

Teoremas de Rellich Kondrachov

3) $mp > N$:

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^j(\bar{\Omega})$$

Verificar que la descomposición siga cumpliendo la condición.

Teorema (Inyecciones compactas generalizadas)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío, acotado con frontera Lipschitz

no necesariamente para $W_0^{m,p}$ pero se tienen los mismos resultados

1) $mp < N$

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{con } q \in [1, p^*[$$

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W_0^{j,q}(\Omega)$$

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$$

2) $mp = N$

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$$

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W_0^{j,q}(\Omega)$$

3) $mp > N$

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C_b^0(\bar{\Omega})$$

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C_b^j(\bar{\Omega}).$$

Ejemplo

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío

		frontera regular	acotado, frontera regular
$W_0^{m+1,p}(\Omega)$	$W_0^{m,p}(\Omega)$	$\hookrightarrow$ si $p \le N$.	$\hookrightarrow\hookrightarrow$ $p \le N$.
$W^{m+1,p}(\Omega)$	$W^{m,p}(\Omega)$	$\hookrightarrow$ si $p \le N$.	acotado frontera $\hookrightarrow\hookrightarrow$ $mp \le N$.
$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$	$L^2(\Omega)$	$\hookrightarrow$ si $1 \le p \le N$.	$\hookrightarrow\hookrightarrow$ $p \le N$.

$L^2(\Omega)$ $\quad H_0^1(\Omega)^* = H^{-1}(\Omega)$

$(W_0^{1,2}(\Omega))^*$

$W^{-1,p'}(\Omega)$.

$A \subseteq B$

$\Rightarrow B^* \subseteq A^*$

Corrección

1) $W_0^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W_0^{m,p}(\Omega)$ con Ω abierto acotado $\forall p$

2) $W_0^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$ con Ω abierto acotado con frontera Lipschit $\forall p$.

3) $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ Ω abierto.

$H_0^1(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$

$\Rightarrow \quad L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))^* \subseteq H_0^1(\Omega)^* = H^{-1}(\Omega).$

$$H_0^1(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)^* \subsetneq H^{-1}(\Omega).$$

Viernes, 2 de febrero de 2024

Capítulo 2: Análisis de ecuaciones diferenciales parciales lineales elípticas.

(Modelo de transporte)

Ecuación de convección - difusión - reacción.

cambio de la magnitud con el tiempo

cambio de la magnitud escalar debido a la velocidad del fluido

cambio de la magnitud debido a las propiedades del fluido (interna)

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{término de evolución o no estacionario}} = \underbrace{\nabla\cdot(u\vec{v})}_{\text{término de convección o advección}} - \underbrace{\nabla\cdot(A\nabla u)}_{\text{término de difusión}} + \underbrace{F(u)}_{\text{término de reacción}}$$

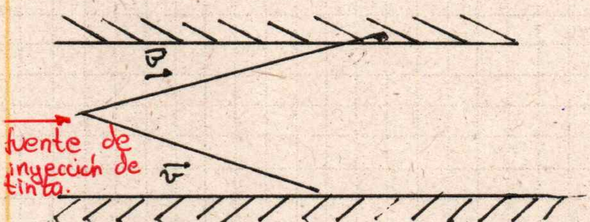
Presencia de fuentes o sumideros.

donde u es un campo escalar (magnitud escalar)

$\vec{v}$ es un campo vectorial (campo de velocidades)

A es una matriz (coeficientes de difusión).

f una función que depende de u pero no de las derivadas de u



dirección del flujo en la tubería.

u: puede ser la concentración de partículas de tinta

$u(x,y,z,t)$

Fluido incompresible: $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$.

$\operatorname{div}(u\vec{v}) = \nabla u \cdot \vec{v}$

Modelo estacionario

$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \operatorname{div}(u\vec{v}) + cu = f.$

$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \nabla u\cdot\vec{v} + cu = f.$

EDP en forma de divergencia.

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \nabla u\cdot\vec{v} + cu = f.$$

EDP en forma de no divergencia.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto y acotado.

$$-\text{div}(A\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega.$$

Si $A = Id$, $\quad -\text{div}(A\nabla u) = -\text{div}(\nabla u) = -\Delta u.$

Definición

> Se dice que el operador $L = -\text{div}(A\nabla)$ es uniformemente elíptico en Ω si existe $\alpha > 0$ tal que
>
> $$\forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \langle A(x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^n} \geq \alpha |\xi|^2$$

Observación: La desigualdad puede satisfacerse ctp. en Ω.

Problema a valores en la frontera Dirichlet homogéneos.

$$(D_H) \begin{cases} -\text{div}(A\nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde: $f \in L^2(\Omega)$, $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

Analizar la existencia de «solución débil» de (D_H)

Vamos a determinar la formulación variacional.

Consideremos $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ y multipliquemos la EDP en (D_H) por v:

$$-\text{div}(A\nabla u)\, v = fv,$$

integrando sobre Ω.

$$\int_\Omega -\text{div}(A\nabla u)\, v \, dx = \int_\Omega fv \, dx \quad \leftarrow \text{Suponemos que cada término es suficientemente regular}$$

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} (A\nabla u \cdot n)\, v \, ds = \int_\Omega fv \, dx \qquad \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

En particular, para cualquier $v \in C_c^\infty(\Omega)$[a], por lo tanto,

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx$$

Problema o Formulación variacional:

Hallar $u \in \mathcal{F}$[b] tal que $\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$: $\displaystyle\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx.$

De lo anterior, basta que $v \in L^2(\Omega)$ y $\nabla v \in L^2(\Omega)^n$, i.e., $v \in H^1(\Omega)$ pero para aplicar la densidad de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$, es posible considerar $v \in H_0^1(\Omega)$

$H_0^1(\Omega) \rightarrow$ Está compuesto por funciones en $H^1(\Omega)$ que poseen valores nulos en la frontera

traza de la función de Sobolev.

---

a Para este caso usamos funciones a soporte compacto para despreciar la información dada en la frontera.

b Espacio de funciones

De esta manera, el problema variacional es hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Problema variacional asociado a (D_H)

Se dice que $u:\Omega \to \mathbb{R}$ es una solución débil del problema (D_H) si $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v dx.$$

Proposición. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, no vacío y acotado, $A \in C^1(\bar\Omega)^{N\times N}$, $f \in C^0(\bar\Omega)$ y $u \in C^2(\bar\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. En este caso, se tiene que

u es solución clásica de (D_H) $\iff$ u es solución débil de (D_H)

$(\Rightarrow)$ Directo de la argumentación realizada previamente.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que u es solución débil de (D_H), i.e.

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Para esta implicación $(\Rightarrow)$ se requiere que la frontera sea Lipschitz.

En particular, se verifica para $v \in C_c^\infty(\Omega)$ y aplicando integración por partes

$$\forall v \in C_c^\infty(\Omega) : -\int_\Omega \operatorname{div}(A\nabla u) \cdot v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Así,

$$\int_\Omega (-\operatorname{div}(A\nabla u) - f) v \, dx = 0 \qquad \forall v \in C_c^\infty(\Omega)$$

Por el Lema fundamental del cálculo de variaciones, se sigue que

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \qquad (\text{por continuidad})$$

Finalmente, $u \in C^2(\bar\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ implica que $u=0$ sobre $\partial\Omega$.

Teorema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto acotado.

Si $f \in L^2(\Omega)$ y $A \in L^\infty(\Omega : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ tales que verifican lo siguiente

a) (Existe $\alpha > 0$) $(\forall \xi \in \mathbb{R}^N)$ $\quad A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$ ctp en Ω.

b) (Existe $\beta > 0$) $(\forall \xi \in \mathbb{R}^N)$ $\quad |A(x)\xi| \leq \beta |\xi|$ ctp en Ω.

Entonces existe una única solución débil de (D_H). Más aún, se tiene que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

[Estabilidad de la solución débil]

Martes, 6 de febrero de 2024.

(Recapitulación)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto y acotado. Estamos abordando el problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Deducimos el problema variacional asociado. Por lo tanto, $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de (D_H) si

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int f v \, dx$$

El problema variacional es un problema bien planteado en el sentido de Hadamar si

1) Existe al menos una solución débil de (D_H) (Existencia)
2) Existe a lo más una solución débil de (D_H) (Unicidad)
3) La solución débil depende continuamente del dato f. (Estabilidad).

El último teorema de la clase anterior nos da condiciones para obtener el buen planteamiento en el sentido del Hadamar

Demostración (Último teorema) Idea: Usar el lema de Lax-Milgram.

Sea $a: H \times H \to$ una aplicación bilineal y acotada con H un espacio de Hilbert.

Si existe $\alpha > 0$ tal que $a(x,x) \geq \alpha |x|^2$ $\forall x \in H$, entonces, para cualquier $\ell \in H^*$ existe un único $u \in H$ tal que

$$\forall v \in H \qquad a(u,v) = \langle \ell, v \rangle_{H^*,H}$$

Más aún, se tiene que

$$\|u\|_H < \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_{H^*}$$

Definamos

$$a: H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$$
$$(u,v) \mapsto a(u,v) = \int_\Omega A \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

$$F: H_0^1 \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto F(v) = \int_\Omega f v \, dx$$

$H_0^1(\Omega)$ espacio de Hilbert con la norma del gradiente

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Por lo tanto, se sigue que

- a es bilineal
- a es acotada.

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega A \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \int_\Omega |A \nabla u| |\nabla v| \, dx$$
$$\leq \beta \int_\Omega |\nabla u| |\nabla v| \, dx \qquad \text{Usando la condición b)}$$
$$\leq \beta \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} = \beta \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}.$$

Por otro lado,

$$a(u,u) = \int_\Omega A \nabla u \cdot \nabla u \, dx \geq \int_\Omega \alpha |\nabla u|^2 dx = \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

* F es lineal y acotada

$$|F(v)| = \left| \int_\Omega f v \, dx \right| \leq \int_\Omega |f| |v| \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\| \, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|f\| \, \|v\|_{H_0^1}$$

Por el Lema de Lax-Milgram, existe un único $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad a(u,v) = \langle F, v\rangle$

Además, se sigue que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

y como

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): \quad |F(v)| \leq C_p \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

entonces, se concluye que

$$\|F\| \leq C_p \|f\|_{L^2}$$

$$\therefore \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_p}{\alpha}\|f\|_{L^2}.$$

Observación:

- Si se considera $f \in H^{-1}(\Omega)$, entonces el problema variacional sería hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): \qquad \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

Para cualquier $v \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\langle f, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle -\operatorname{div}(A\nabla u), v\rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)}$$

$D'(\Omega), D(\Omega)$

$$= -\left\langle \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), v\right\rangle$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), v\right\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \underbrace{a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}}_{\in L^2}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} v}_{\in L^2}\right\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v$$

Distribuciones.

Así, se ha probado que

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx \qquad \forall v \in C_c^\infty(\Omega). \xrightarrow[\text{por densidad}]{} H_0^1(\Omega)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \langle f, v\rangle = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

La formulación variacional es: Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \langle f, v\rangle = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H^{-1}}$$

- Definamos

$$T: L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$
$$f \mapsto Tf = u_f$$

T es continua. Si $f_n \to f$ en $L^2(\Omega) \Rightarrow Tf_n \to Tf$ en $H_0^1(\Omega)$.

$\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha} \|f_n - f\|_{L^2}$

¿T es lineal? Notemos que T está definido como

$$\int_\Omega A\, \nabla Tf \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

- Si A define una aplicación ~~lineal~~ bilineal simétrica, entonces la solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ es el único punto crítico que minimiza el siguiente funcional.

$$J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto Jv = \frac{1}{2} a(v,v) - \int_\Omega f v \, dx$$

donde $a(u,v) = \int_\Omega A \nabla u \cdot \nabla v$ $\quad \left(a(u,v) = a(v,u) \text{ si } A = A^T \right)$

1) J es F-diferenciable en $H_0^1(\Omega)$

2) Hallar los puntos críticos de J

3) Probar que la solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ satisface que

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

Miércoles, 7 de febrero de 2024.

(Recapitulación).

$$J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto Jv = \frac{1}{2} a(v,v) - \int_\Omega f v \, dx$$

J es el funcional de energía.

Como $f \in L^2(\Omega)$, existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Si a es simétrica

$$u \in H_0^1(\Omega) \text{ solución débil de } (D_H) \iff J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$$

1) J es diferenciable en $H_0^1(\Omega)$.

- Una estrategia es considerar que $a(u,u)$ induce un producto escalar y por lo tanto, una norma, con lo cual

$$J(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

con lo cual, si A es simétrica, se sigue el resultado. Note que estamos considerando $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_a)$ con $\|\cdot\|_a$ la norma inducida.

- Procediendo por definición y aplicando la regla de la cadena, se sigue que

$$DJ(u) = a(u, \cdot) - \int_\Omega f v \, dx$$

2). Puntos críticos.

Con lo anterior, se tiene que

$$J'(u) = a(u,v) - \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$J'(u)v = 0 \quad \Rightarrow \quad a(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

Por lo tanto, $u \in H_0^1(\Omega)$ es un punto crítico de J si y solo si u es solución débil de (D_H).

3).

u solución débil de $H_0^1(\Omega)$ si y solo si $J(u) = \min\limits_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$

$\Rightarrow$ Supongamos que u es una solución débil de (D_H).

P.D. $\forall\, v \in H_0^1(\Omega) \qquad J(u) \leq J(v)$

Sea $v \in H_0^1(\Omega)$ P.D. $J(u) \leq J(v) \Leftrightarrow J(v) - J(u) \geq 0$.

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle f, v\rangle_{L^2} - \frac{1}{2} a(u,u) + \langle f, u\rangle_{L^2}$$

$$= \frac{1}{2}\big(a(v,v) - a(u,u)\big) - \langle f, v-u\rangle_{L^2} \quad [*]$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{2} a(v-u, v-u) = \frac{1}{2}\Big(a(v,v) - 2a(u,v) + a(u,u)\Big) = \frac{1}{2} a(u,u) - a(u,v) + \frac{1}{2} a(v,v)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a(v-u, v-u) - a(u,u) = \frac{1}{2} a(v,v) - a(u,v) - \frac{1}{2} a(u,u)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a(v,v) - \frac{1}{2} a(v,u) = \frac{1}{2} a(v-u, v-u) - a(u,u) + a(u,v) \quad [**]$$

Reemplazando $[**]$ en $[*]$

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2} a(v-u, v-u) - a(u,u) + a(u,v) - \langle f, v-u\rangle_{L^2}$$

$$= \frac{1}{2} a(v-u, v-u) + a(u, v-u) - \langle f, v-u\rangle_{L^2}$$

Pero $a(u, v-u) = \langle f, v-u\rangle_{L^2}$ pues u es solución débil

$$\therefore\ J(v) - J(u) = \frac{1}{2} a(v-u, v-u) \geq 0.$$

$\Leftarrow$ Supongamos que $u \in H_0^1(\Omega)$ cumple que $J(u) = \min\limits_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$.

P.D. $\forall\, v \in H_0^1(\Omega) \qquad a(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)}$.

Entonces, para todo $v \in H_0^1(\Omega) \qquad J(u) \leq J(v)$

Sea $w := u + tv$ (recta que pasa por u con dirección v), con esto

$$J(w) - J(u) = J(u+tv) - J(u)$$

$$= \frac{1}{2} a(u+tv, u+tv) - \langle f, u+tv\rangle - \frac{1}{2} a(u,u) + \langle f, u\rangle$$

$$= \cancel{\frac{1}{2} a(u,u)} + t a(u,v) + \frac{t^2}{2} a(v,v) - \cancel{\langle f, u\rangle} - t\langle f, v\rangle - \cancel{\frac{1}{2} a(u,u)} + \cancel{\langle f, u\rangle}$$

$$= t\,a(u,v) + \frac{t^2}{2} a(v,v) - t\langle f, v\rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow a(u,v) + \frac{t}{2} a(v,v) - \langle f, v\rangle \geq 0.$$

Haciendo $t \to 0^+$, se tiene que

$$a(u,v) \geq \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Considerando $-v \in H_0^1(\Omega)$, se sigue que

$$\langle f, v\rangle \leq a(u,v).$$

Por lo tanto, concluimos que $\langle f, v\rangle = a(u,v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$

Note que J es un funcional convexo. Por lo tanto, si u es un punto crítico, entonces u es un mínimo.

Jueves, 8 de febrero de 2024.

Problema diferencial con condiciones de frontera Dirichlet no homogéneas.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado

$$(D_{NH}) \left| \begin{array}{l} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \\ \qquad\qquad u = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{array}\right.$$

Dados $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ y $A \in C^1(\Omega : \mathbb{R}^{N\times N})$, se dice que $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una solución clásica de (D_{NH}) si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que satisface que (D_{NH}) en todo punto en $\overline{\Omega}$.

Obtención del problema variacional.

Supongamos que A, f, g y u son suficientemente regulares. Sea $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, entonces

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(A\nabla u)\, v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega} (A\nabla u \cdot \eta)\, v\, ds = \int_\Omega f v\, dx$$

Como la ecuación anterior aborda el gradiente pero esto no es de nuestro interés, consideramos $v \in C_c^\infty(\Omega)$, con lo cual

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$$

Problema variacional.

Hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \quad \text{y además } \gamma u = g \text{ sobre } \partial\Omega$$

donde γ es el operador traza.

Lema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacío, abierto y acotado con frontera Lipschitz. Definimos (explicación)

$$\gamma : C^\infty(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \quad \text{con} \quad \gamma(\varphi) = \varphi\big|_{\partial\Omega}$$

$L^p(\Omega) = L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ ← medida de Lebesgue N-dimensional

$L^2(\partial\Omega)$ ← Dodato de la medida de Hausdorff.

Además, se verifica

$$\|\gamma(\varphi)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

Lema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío y acotado con frontera Lipschitz, entonces

$$\overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{W^{m,p}} = W^{m,p}(\Omega).$$

Gracias a la densidad mencionada previamente, extendemos γ a $H^1(\Omega)$, obteniendo así un operador lineal y acotado, en $H^1(\Omega)$. Por lo tanto

$$\gamma \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\partial\Omega))$$

Así, si $u \in H^1(\Omega)$, entonces $\gamma(u) \in L^2(\partial\Omega)$ $\quad \left(\gamma(\varphi) = \varphi\big|_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \right)$

Dados $f \in L^2(\Omega)$, $A \in L^\infty(\Omega : \mathbb{R}^{n\times n})$ y, $g \in L^2(\partial\Omega)$.
Se dice que u es una solución débil del problema (D_{NH}) si $u \in H^1(\Omega)$, $\gamma u = g$ y

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Observación: El operador γ no es sobreyectivo.

Por lo anterior, se define el espacio $H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma(H^1(\Omega))$, entonces $H^{1/2}(\Omega)$ es un espacio normado con la siguiente norma

$$\|\omega\|_{H^{1/2}(\Omega)} := \inf \left\{ \|u\|_{H^1(\Omega)} : \gamma u = \omega \right\}$$

La traza pierde una fracción de la regularidad de la función
$u \in W^{1,p}(\Omega)$
$\gamma(u) \in W^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$
espacios de traza

Notar que de la definición de norma en $H^{1/2}(\partial\Omega)$, se tiene que

$$\|\gamma(u)\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Además, $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Omega)$ es un operador. lineal, acotado y sobreyectivo.

Teorema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y acotado con frontera Lipschitz.
Si $f \in L^2(\Omega)$, $A \in L^\infty(\Omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, donde A satisface el acotamiento y la definición positiva mencionadas previamente (último teorema lunes 5 de febrero).

También se define el conjunto

$$M(\beta, \alpha, \Omega) = \left\{ A : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot\, A \in L^\infty(\Omega : \mathbb{R}^{n\times n}) \\ \cdot\, \forall \xi \quad |A(x)\xi| \leq \beta|\xi| \quad \text{ctp en } \Omega \\ \cdot\, \forall \xi \quad A(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{ctp en } \Omega \end{array} \right\}$$

Entonces existe una única solución débil u del problema (D_{NH})
Más aún, existen $a, b > 0$ tales que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq a\left(\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2} + b\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right)$$

Demostración. (Idea: Utilizar el Lema de Lax-Milgram).

Dado que $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, existe $z \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma(z) = g$.

Definamos $u_0 := u - z \in H^1(\Omega)$, entonces

$$\gamma(u_0) = \gamma(u) - \gamma(z) = g - g = 0 \qquad \boxed{\therefore\ u_0 \in H_0^1(\Omega).}$$

con esto, se sigue que

$$\int_\Omega A\nabla(u_0 + z)\nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\therefore \int_\Omega A\nabla u_0 \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx - \int_\Omega A\nabla z \cdot \nabla v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Con lo anterior, definamos

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$(u_0, v) \mapsto a(u_0, v) = \int_\Omega A\nabla u_0 \nabla v \, dx$$

$$F: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto F(v) = \int_\Omega f v \, dx - \int_\Omega A \nabla z \cdot \nabla v \, dx$$

- a es bilineal
- a es acotado pues $|A(x)\xi| \leq \beta|\xi|$ ctp en Ω.
- a es coerciva pues $A(x)\xi \cdot \xi \geqslant \alpha|\xi|^2$ ctp en Ω.
- F es lineal
- F es acotado.

$$v \in H_0^1(\Omega): \quad |F(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \int_\Omega |A\nabla z||\nabla v| \, dx$$
$$\leq C_p \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \beta \int_\Omega |\nabla z| |\nabla v| \, dx$$
$$\leq C_p \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \beta \|\nabla z\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}$$
$$\leq C_p \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \beta \|z\|_{H^1} \|v\|_{H_0^1}.$$

Operador de elevación

$g \in H^{1/2}(\Omega) \Rightarrow$ Existe $R: H^{1/2}(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$, $g \longmapsto Rg = \omega_g$ (Lifting operator)

R es lineal y acotado

$$\|Rg\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|g\|_{H^{1/2}(\Omega)}.$$

Usando lo anterior

$$|F(v)| \leq C_p\|f\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1} + \beta C\|g\|_{H^{1/2}}\|v\|_{H_0^1} = \|v\|_{H_0^1}\left(C_p\|f\|_{L^2} + \beta C\|g\|_{H^{1/2}}\right).$$

Por el Lema de Lax-Milgram, existe una única $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad a(u_0, v) = F(v)$$

Además,

$$\|u_0\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H^{-1}} \leq \frac{1}{\alpha}\left(C_p\|f\|_{L^2} + \beta C\|g\|_{H^{1/2}}\right)$$

Finalmente, $u = z + u_0 \in H^1(\Omega)$, $\gamma(u) = g$ y

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Más aún,

$$\|u\|_{H^1} \leq \|u_0\|_{H^1} + \|z\|_{H^1}$$
$$? \leq K\|u_0\|_{H_0^1} + \|z\|_{H^1}$$
$$\leq \frac{K}{\alpha}\left(C_p\|f\|_{L^2} + \beta C\|g\|_{H^{1/2}}\right) + C\|g\|$$
$$= KC_p\left(\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2} + \underbrace{\left(\frac{\beta C}{\alpha C_p} + \frac{C}{KC_p}\right)}_{b}\|g\|_{H^{1/2}}\right)$$

Unicidad. (Note que u_0 es única pero z no, por lo tanto u aún no es única).

Supongamos que existe $u^* \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma(u^*) = g$

$$\int_\Omega A\nabla u^* \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \underset{?}{u^* - u \in H_0^1(\Omega)}$$

Así,

$$\int_\Omega A(\nabla u^* - \nabla u) \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

considerando $v = u^* - u$, entonces

$$\alpha \| u^* - u \|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega A(\nabla u^* - \nabla u) \cdot (\nabla u^* - \nabla u) \, dx = 0.$$

$$\Rightarrow \| u^* - u \|_{L^2} = 0$$

$$\therefore u^* = u \text{ ctp en } \Omega$$

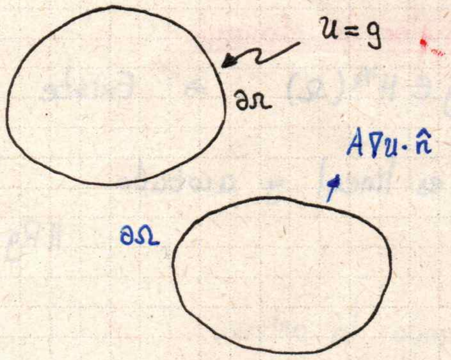
Observación $u \in H_0^1(\Omega)$ si y solo si $\gamma(u) = 0$.

Problema diferencial con condiciones de frontera Neumann homogéneas.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto y acotado

$$(N_H). \begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ \underbrace{A\nabla u \cdot \hat{n} = 0}_{\text{Condición de frontera Neumann Homogénea.}} & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Derivada co-normal de u.



Advertencia: Para este caso, vamos a considerar $A = I$

Por lo tanto, en este caso el problema a abordar será

$$(N_H) \begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla u) = -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \hat{n}} = \nabla u \cdot \hat{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Formulación variacional

Sea $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$:
$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Como el término de la derivada en la frontera es parte de las condiciones y por lo tanto de lo anterior y aplicando integración por partes

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \hat{n}) v \, ds}_{= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \cdot v \, ds = 0 \text{ por el problema.}} = \int_\Omega f v \, dx$$

con lo cual

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

Problema variacional Dado $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Definición: Se dice que $u: \Omega \to \mathbb{R}$ es una solución débil de (N_H) si $u \in H^1(\Omega)$ y satisface la formulación variacional.

Para que el problema sea factible se requiere verificar la siguiente condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f \, dx = 0. \qquad [*]$$

Observaciones: a) Una condición necesaria para que u sea solución débil de N_H es que f cumpla la condición de factibilidad [*]

b) Si consideramos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

ya no es necesario considerar la condición [*]

c) Notar que $u_0 = c \in H^1(\Omega)$ cumple que $\nabla u_0 = 0$, por lo tanto, si existiese una solución débil $u \in H^1(\Omega)$ para (N_H), entonces $v = u + u_0 = u + c$ es solución débil para (N_H).

Por tanto, (N_H) posee infinitas soluciones, con lo cual, (N_H) es un problema mal planteado en el sentido de Hadamar (No se cumple la unicidad)

Para arreglar estos inconvenientes, consideremos imponer una restricción a la constante considerando el siguiente problema: hallar $u \in H^1(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx & \forall v \in H^1(\Omega). \\ \|u + c\|_{H^1(\Omega)} = \min\limits_{d \in \mathbb{R}} \|u + d\|_{H^1(\Omega)} \end{cases}$$

Ahora, notemos que

$$\min_{d \in \mathbb{R}} \|u + d\| \iff \min_{d \in \mathbb{R}} \|u + d\|^2$$

pues la norma es positiva y la función raíz creciente

Sea $d \in \mathbb{R}$

$$\|u + d\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + 2d \int_\Omega u \, dx + d^2 \lambda(\Omega)$$

¿Para qué valor de $d \in \mathbb{R}$, $\|u + d\|^2_{H^1(\Omega)}$ alcanza su mínimo?

Definamos la función $g(d) = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + 2d \int_\Omega u \, dx + d^2 \lambda(\Omega)$

$$g'(d) = 2 \int_\Omega u \, dx + 2d\lambda(\Omega) = 0 \implies d = -\frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega u \, dx$$

Más aún, como $g''(d) = 2\lambda(\Omega) > 0$.

Así, el mínimo de $\|u + d\|^2_{H^1(\Omega)}$ se alcanza en $d = -\dfrac{1}{\lambda(\Omega)} \displaystyle\int_\Omega u \, dx$, con lo cual fijemos $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$⨍_\Omega u \, dx = 0.$$

Notación $⨍_\Omega u \, dx = \dfrac{1}{\lambda(\Omega)} \displaystyle\int_\Omega u \, dx.$

Por lo tanto, si añadimos la condición de que $\int_\Omega u\,dx = 0$, entonces se tiene que

$$(\hat{N}_H)\quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_\Omega u\,dx = 0 \end{cases}$$

Notar que este nuevo problema tiene a lo más una solución.

¡Puede no tener ninguna!

Definición Dado $f \in L^2(\Omega)$, se dice que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una solución débil de $(\hat{N}_H)$ si $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u\,dx = 0 \quad \text{y} \quad \forall v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx.$$

Observación: Notar que si u es solución débil de $(\hat{N}_H)$, entonces $u+c$, ya no es solución débil de $(\hat{N}_H)$ con $c \neq 0$.

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto acotado. Si $f \in L^2(\Omega)$ tal que $\int_\Omega f\,dx = 0$, entonces existe una única solución débil $u \in H^1(\Omega)$ para $(\hat{N}_H)$

Más aún, se tiene la siguiente estimación, existe $C > 0$ tal que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Nota: Para la existencia del vector normal exterior $\hat{n}$ se requiere que la frontera sea suficientemente regular, de la misma manera, cuando se requiere definir la traza de la función.

Observaciones: Consideremos el siguiente análisis sobre los métodos de demostración

<u>Lema L-M</u>

$$a(v,v) = F(v)$$

$$a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u,v) \longmapsto a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$$

$$F : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto F(v) = \int_\Omega f v\,dx$$

$$a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

← Jamás, se puede tener

Si suponemos que esta existe $(\alpha > 0)$ entonces para $u = c \neq 0$, entonces

$$0 = a(c,c) \geq \alpha \|c\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\therefore c = 0. \quad \Rightarrow \Leftarrow.$$

- a no es $H^1(\Omega)$ coercivo.

<u>Función de energía</u>

Para el caso del funcional de energía.

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - \langle f, u \rangle_{L^2}$$

Debe alcanzar su mínimo en $u \in H^1(\Omega)$.

$$J'(u)h = a(u,h) - \langle f, h \rangle_{L^2}$$

u es solución débil de $(\hat{N}_H) \Leftrightarrow J(u) = \min_{v \in H^1(\Omega)} J(v)$

J es un funcional estrictamente convexo, i.e.

$$J'(\ )(h,h) > 0$$

$$\Rightarrow J''(u)(h,h) = a(h,h) = \|\nabla h\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Nota: en el caso $H_0^1(\Omega)$, $\|\nabla h\|^2_{L^2(\Omega)} = \|h\|_{H_0^1(\Omega)}$ por lo tanto J es coercivo en la norma $\|\cdot\|_{H_0^1}$

En este caso, se tiene que J no es $H^1(\Omega)$ coercivo.

Si ahora, consideramos la relación $\mathcal{R}$ donde $u \mathcal{R} v \Leftrightarrow u - v = c$ (constante)

Entonces, definimos

$$V(\Omega) = H^1(\Omega)/\mathcal{R}$$

así, se tiene que

$$\dot{u} = [u] = \{ v \in H^1(\Omega) : u - v = c \in \mathbb{R} \} \qquad u \mathcal{R} v \iff u - v = c \in \mathbb{R}$$

donde, se define $p(\dot{u}) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, entonces p es una norma en $V(\Omega)$.

Miércoles, 14 de febrero de 2024.

(Recapitulación) Etapa 1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío conexo.

$p(\dot{u}) = \|\nabla u\|_{L^2}$ Si Ω es conexo, entonces $\dot{u} = \dot{0}$

$\hookrightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow \underset{\substack{| \\ \Omega \text{ es conexo.}}}{u = c}$ ctp.

Etapa 2.

Desigualdad de Poincaré - Wirtinger (Desigualdad tipo Poincaré).

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$, abierto acotado conexo con frontera Lipschitz, entonces existe $k = k(\Omega) > 0$ tal que

$$\forall u \in H^1(\Omega) \qquad \left\| u - \fint u \, dx \right\|_{L^2(\Omega)} \leq k \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración (Por contradicción).

Supongamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in H^1$ tal que

$$\left\| u_n - \fint u_n \, dx \right\|_{L^2(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

entonces, definamos

$$v_n = \frac{u_n - \fint u_n \, dx}{\left\| u_n - \fint u_n \, dx \right\|}$$

entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ $\|v_n\| = 1$, $v_n \in H^1(\Omega)$ y

$$\nabla v_n = \frac{\nabla u_n}{\left\| u_n - \fint u_n \, dx \right\|}$$

$$\Rightarrow \|\nabla v_n\| = \frac{\|\nabla u_n\|}{\left\| u_n - \fint u_n \, dx \right\|} < \frac{1}{n}$$

Aquí se usa la regularidad de la frontera

Por lo tanto, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sea acotada en $H^1(\Omega)$. Por el teorema de Rellich, existe una subsucesión $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y $v \in L^2(\Omega)$, tal que

$$v_{n_k} \longrightarrow v \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

Por lo tanto, $\|v\| = 1$, y además

$$\int_{\Omega} v\, dx = \lim_{k\to+\infty} \fint v_{n_k}\, dx$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_{\Omega} \frac{u_{n_k} - \fint u_{n_k} dx}{\left\| u_{n_k} - \fint u_{n_k} dx \right\|}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\left\| u_{n_k} - \fint u_{n_k} dx \right\|} \left(\frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_{\Omega} u_{n_k}\, dx - \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_{\Omega} \fint_{\Omega} u_{n_k} dx\, dx \right)$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\left\| u_{n_k} - \fint u_{n_k} dx \right\|} \left(\fint u_{n_k}\, dx - \fint u_{n_k}\, dx \right) = 0,$$

es decir, el valor promedio de v es cero. Por otro lado, $\nabla v \in L^2(\Omega)$, pues

$$\forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega) : \quad \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega} \frac{\partial v_{n_k}}{\partial x_i} \varphi\, dx = 0 \quad \text{pues } \|\nabla v_{n_k}\| < \frac{1}{k}$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,N\}$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \forall i \in \{1,\dots,N\}$$

Así, $v \in H^1(\Omega)$, además $\nabla v = 0$ ctp en Ω y por tanto, si Ω es conexo, $v = c$ ctp en Ω. Como $\fint v\, dx = 0$, entonces $v = 0$ ctp en Ω.

Etapa 3: $V(\Omega)$ es un espacio de Banach

Sea $(\dot{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $V(\Omega)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$v_n = u_n - \fint u_n\, dx,$$

notemos que $u_n \in \dot{u}_n$ y $\int_{\Omega} v_n\, dx = 0$. Dado que $(\dot{u}_n)$ es una sucesión de Cauchy en $V(\Omega)$ y

$$\|\dot{u}_n\|_{V(\Omega)} = \|\nabla v_n\|_{L^2},$$

entonces $(\nabla v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$, con lo cual, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Por lo tanto, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$, con lo cual, existe $v \in H^1(\Omega)$ tal que $v_n \to v$ en $H^1(\Omega)$. Por otro lado, notemos que $\dot{u}_n \to \dot{v}_n$ en V pues

$$\|\dot{u}_n - \dot{v}\|_{V(\Omega)} = \|\nabla u_n - \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Etapa 4: $V(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Definamos el producto escalar sobre $V(\Omega)$ por

$$\forall \dot{u}, \dot{v} \in V(\Omega) : \quad \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle_{V(\Omega)} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2} \quad \leftarrow \text{Notación de Einsten.}$$

Notar que

$$\langle \dot{u}, \dot{u} \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{L^2}^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

Como la norma inducida por el producto escalar definido sobre $V(\Omega)$ es completa, entonces $V(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Etapa 5: Análisis del problema auxiliar

Considere el siguiente problema variacional:

Hallar $\dot{u} \in V(\Omega)$ tal que

$$[\text{N-aux}] \qquad B(\dot{u}, \dot{v}) = F(\dot{v}) \quad \forall \dot{v} \in V(\Omega)$$

donde

$$B : V(\Omega) \times V(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\dot{u}, \dot{v}) \longmapsto B(\dot{u}, \dot{v}) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \qquad u \in \dot{u}, \quad v \in \dot{v}$$

y

$$F : V(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\dot{v} \longmapsto F(\dot{v}) = \int_\Omega f v \, dx \qquad \text{con } v \in \dot{v}$$

- Claramente, B es independiente del representante de la clase de equivalencia
- B es lineal, acotada y $V(\Omega)$ - coerciva.
- F es independiente del representante elegido. En efecto, sea $w \in \dot{v}$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $v = w + c$

$$\int_\Omega f v \, dx = \int_\Omega f(w+c) \, dx = \int_\Omega f w \, dx + c \cancel{\int_\Omega f \, dx}^{\,0}$$

por la condición de compatibilidad.

- F es acotado en $V(\Omega)$. En efecto, sea $\dot{v} \in V(\Omega)$ y $v \in \dot{v}$

P.D. $(\exists C > 0)(\forall \dot{v} \in V(\Omega)) \quad |F(\dot{v})| \leq \underbrace{\|\dot{v}\|_{V(\Omega)}}_{C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}}$

Sea $v \in \dot{v}$, entonces

$$|F(\dot{v})| = \left| \int_\Omega f v \, dx \right| = \left| \int_\Omega f \left(v - ⨍ f \, dx \right) dx \right|$$

Por definición y condición de compatibilidad.

$$\leq \|f\|_{L^2} \left\| v - ⨍ v \, dx \right\|_{L^2}$$

Hölder.

$$\leq k \|f\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}$$

$$\therefore \; |F(v)| \leq k \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\dot{v}\|_{V(\Omega)}$$

Por lo tanto, por el Lema L-M, existe un único $\dot{u} \in V(\Omega)$ tal que

$$\forall \dot{v} \in V(\Omega) \qquad B(\dot{u}, \dot{v}) = F(\dot{v})$$

Además, notar que

$$\|\nabla u\|^2_{L^2} = \int \nabla u \cdot \nabla u \, dx = B(\dot{u}, \dot{u}) = F(\dot{v}) \leq k \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Más aún, $\|\dot{u}\|_{V(\Omega)} \leq \|F\|_{V(\Omega)^*}$

Etapa 6: Existencia de solución débil de $(\hat{N}_H)$

Sea $u \in \dot{u}$, donde $\dot{u}$ es la solución de [N-aux], tal que $\int u \, dx = 0$. Luego, $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = B(\dot{u}, \dot{v})$$
$$= F(\dot{v})$$
$$= \int_\Omega f v \, dx$$

Unicidad

Sean u, w soluciones débiles de $(\hat{N}_H)$. Definamos $z := u - w \in H^1(\Omega)$, notar que $\int z \, dx = 0$. Además,

$$\int_\Omega \nabla z \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Pues u, w son solución y el lado derecho se simplifica.

Considerando $v = z$, se sigue que $\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} = 0$ y como Ω es conexo, entonces $z = c$ ctp en Ω y como $\int z \, dx = 0$ entonces $z = 0$ ctp en Ω, i.e., $u = w$ ctp en Ω.

Jueves, 15 de febrero de 2024.

Sección: Problema de Neumann no homogéneo.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío y acotado:

$$(N_{NH}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \hat{n}} = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Supongamos que u, f y g son suficientemente regulares. Sea $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega -\Delta u \, v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

integrando por partes

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} v \, ds = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} g v \, ds = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, ds$$

Para que lo anterior tenga sentido, $f \in L^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$

¿$g \in L^2(\partial\Omega)$, $v \in L^2(\partial\Omega)$? ← Problema debido a que necesitamos considerar la traza de $v \in H^1(\Omega)$.

¿ $\int_{\partial\Omega} g v \, ds$? $v \in H^1(\Omega) \Rightarrow \gamma(v) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

Ω posee frontera Lipchitz

Si $u \in H^1(\Omega)$, ¿ $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$?

↳ traza normal de Ω.

Si Ω posee una frontera Lipchitz, entonces $\gamma_n(u) \in H^{-1/2}(\partial\Omega) := (H^{1/2}(\partial\Omega))^*$.
Por lo tanto, $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = g$ en $H^{1/2}(\partial\Omega)$

$$\therefore \int_{\partial\Omega} g v \, ds = \langle g, v \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$$

Se define un producto interno.

Por abuso de notación, se nota por v a $\gamma(v)$.

Problema variacional

Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \langle g, v \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$$

$\gamma(v) \in H^{1/2}(\Omega)$.

Definición. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, se dice que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una solución débil de (N_{NH}) si $u \in H^1(\Omega)$ y satisface que

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \langle g, v \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$$

Observación: En general, el problema (N_{NH}) está mal planteado en el sentido de Hadamar

Una condición necesaria para la existencia de al menos una solución débil de (N_{NH}) es que

$$\int_\Omega f \, dx + \langle g, 1 \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = 0$$

Observación: Notar que si $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de (N_{NH}), entonces, $\forall c \in \mathbb{R}$, $u + c$ es solución débil de (N_{NH}).

Para resolver la no unicidad, se considera la constante que hace que $⨍_\Omega u \, dx = 0$. Con esto, consideremos el siguiente problema

$$(\hat{N}_{NH}) = \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = g & \text{en } \partial\Omega \\ ⨍_\Omega u \, dx = 0 & \end{cases}$$

Una solución débil para $(\hat{N}_{NH})$ se define como una función $u \in H^1(\Omega)$, con $⨍_\Omega u \, dx = 0$ y

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \langle g, v \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$$

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ abierto no vacío conexo con frontera Lipchitz.
Si $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ tales que $\int_\Omega f\,dx + \langle g, 1\rangle = 0$, entonces existe una única solución débil para $(\hat{N}_{NH})$. Además, existe $a > 0$ tal que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq a \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Omega)} \right]$$

La demostración es similar a la realizada para el problema de Neumann-Homogéneo, considerando

$$B: V(\Omega) \times V(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad F: V(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\dot{u}, \dot{v}) \longmapsto B(\dot{u}, \dot{v}) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \qquad\qquad v \longmapsto F(\dot{v}) = \int_\Omega f v\, dx + \langle g, v\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$$

Notemos que lo hecho previamente para B es similar, así, como es fácil ver que F es linal, mostremos que F es acotada

Sea $\dot{v} \in V(\Omega)$, entonces

$$|F(\dot{v})| = \left| \int_\Omega f v\, dx + \langle g, v\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} + \fint_\Omega v \left(\underbrace{\int_\Omega f\, dx + \langle g, 1\rangle}_{=0} \right) dy \right|$$

$$= \left| \int_\Omega f v\, dx + \langle g, v\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} + \fint_\Omega v\, dy \int_\Omega f\, dx + \fint_\Omega v \langle g, 1\rangle \right|$$

$$= \left| \int_\Omega f v\, dx + \langle g, v\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} + \int_\Omega f \fint_\Omega v\, dx\, dx + \langle g, \fint_\Omega v\rangle \right|$$

$$= \left| \int_\Omega f \left(v - \fint v\, dx \right) dx + \langle g, v - \fint v\rangle \right|$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \left\| v - \fint v \right\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1/2}} \left\| \gamma\left(v - \fint v \right) \right\|_{H^{1/2}}$$

$$\leq K \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{H^{-1/2}} \|v - \fint v\, dx\|_{H^1}$$

$$\leq K \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{V(\Omega)} + C \|g\|_{H^{-1/2}} \left(\left\| v - \fint v\, dx \right\|_{L^2} + \left\| \nabla \left(v - \fint v\, dx \right) \right\|_{L^2} \right)$$

$$\leq K \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{V(\Omega)} + C \|g\|_{H^{-1/2}} \left(K \|\nabla v\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2} \right)$$

$$= K \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{V(\Omega)} + (1+K) C \|g\|_{H^{-1/2}} \|v\|_{V(\Omega)}$$

$$= \|v\|_{V(\Omega)} \underbrace{\left(K \|f\|_{L^2} + (1+K) C \|g\|_{H^{-1/2}} \right)}_{= \hat{C}}$$

$$= \hat{C} \|v\|_{V(\Omega)}$$

Por lo tanto, F es acotada.

Finalmente, para la estimación notemos que

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx = B(u,u) = F(u)$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \left(K\|f\|_{L^2} + (1+K)C\|g\|_{H^{-1/2}} \right)$$

$$\therefore \|\nabla u\|_{L^2} \leq K\|f\|_{L^2} + (1+K)C\|g\|_{H^{-1/2}}$$

$$\leq a\left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{-1/2}}\right) \quad \text{con } a = \left(\max\{K,(1+K)C\}\right)^{-1}$$

con esto, se sigue el resultado.

Martes, 20 de febrero de 2024.

Sección: Valores y vectores propios de operadores elípticos.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto y acotado. Consideremos el problema

$$(D_\lambda) \begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$ que satisface

a) $(\exists \beta>0)(\forall \xi \in \mathbb{R}^n) \quad |A\xi| \leq \beta|\xi|$ c.t.p. en Ω

b) $(\exists \alpha>0)(\forall \xi \in \mathbb{R}^n) \quad \langle A\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^n} \geq \alpha|\xi|^2$ c.t.p. en Ω. [*]

Para que nuestro estudio se centre en los valores propios, vamos a considerar $\lambda u = f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

¡Son desconocidos λ y u!

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ (conocido, dato), una solución débil para (D_λ) es una función en $H_0^1(\Omega)$ tal que satisface que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): \int_\Omega A\nabla u_\lambda \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u_\lambda v \, dx$$

(La solución depende de λ)

Observación: Notar que $u=0$ es una solución débil de (D_λ)

Preguntas

1) ¿Existe $u \neq 0$ solución débil de (D_λ)?

2) Si λ no es conocido, entonces, estamos interesados en el siguiente problema: Hallar todos los posibles valores de λ tales que verifiquen el problema

$$(VPD) \quad \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

posea al menos una solución $u \in H_0^1(\Omega)$ no trivial.

¿Cómo abordar este problema? En este problema, $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio y la solución no trivial es una función propia asociada a λ.

$T: L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ $\qquad T - \lambda Id = 0$

$\mapsto \int_\Omega u, v$

Respuestas.

1) No, pues para $\lambda=0$, la única solución es la trivial.

2) Idea: construir un operador que represente a la formulación variacional del problema de valores propios de Dirichlet.

Con ello, aplicar la teoría espectral para dicho operador.

Observación (Sobre los valores propios)

Si existe un valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda > 0$. En efecto, gracias a la H_0^1-coercividad de la forma bilineal, se tiene que

$$\alpha \|u\|_{H_0^1}^2 \leq a(u,u) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx = \lambda \int_\Omega u^2 dx \Rightarrow \therefore \lambda \|u\|_{L^2}^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0.$$

(Teorema espectral)

Teorema: Sean H un espacio de Hilbert real separable de dimensión infinita y $B \in K(H)$ autoadjunto no nulo $[\sigma(B) = \{0\}]$

a) Si B es inyectivo $(Bu = 0 \Rightarrow u = 0)$, entonces

i) $\sigma(B) \setminus \{0\} = \underbrace{EV(B)}$ es un conjunto contable de $\mathbb{R}$
conjunto de valores propios de B.

ii) $\forall\, \mu \in EV(B)$, μ posee multiplicidad finita (multiplicidad geométrica) (el espacio propio generado por μ es finito) $Ker(B - \lambda Id)$

iii) Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de valores propios de B tal que
$\underbrace{|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq |\mu_3| \geq}_{\text{valores propios repetidos}} \cdots \to 0.$

entonces existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores propios que forma una base Hilbertiana (u ortonormal de H).

Así, si $u \in H$, entonces $\quad u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle u, u_n \rangle u_n$

Observación: Si B es definido positivo, i.e. para todo $u \neq 0$, $\langle Bu, u\rangle_H > 0$, entonces los valores propios son positivos.

Miércoles, 20 de febrero de 2024.

Teorema: Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, abierto y acotado y $A \in L^\infty(\Omega : \mathbb{R}^{n\times n})$ (simétrica) que satisface las propiedades de acotamiento y elipticidad (ver [*] clase anterior) entonces el problema de valores y vectores propios de Dirichlet verifica

1) El conjunto de valores propios de (VPD) es contable cuyo único punto de acumulación es $+\infty$ (en $\mathbb{R}$)

2) Todo valor propio posee multiplicidad geométrica finita, i.e., los espacios propios son s.e.v. de $H_0^1(\Omega)$ de dimensión finita.

3) Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de valores propios creciente

$$(0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \to +\infty)$$

entonces existe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de valores propios que forma una base hilbertiana de $L^2(\Omega)$.

Demostración Recordemos que si $f \in L^2(\Omega)$, entonces el problema

$$(D_H) \quad \begin{cases} \underbrace{-\operatorname{div}(A\nabla u)}_{Lu} = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$f \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow u \in H_0^1(\Omega)$ $\qquad$ $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

Regularidad de u

posee una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$.

Definamos el operador

dependencia del operador diferencial

$$\Phi_L : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$
$$f \mapsto u_f$$

donde $u_f \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución débil para el problema (D_H)

$[i: H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)]$ identidad compacta.

Por otro lado, recordemos que si Ω es acotado $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, entonces el operador

$$B := i \circ \Phi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$f \mapsto u_f$$

con esto, B es lineal y compacto. (lineal por composición de operadores lineales dado que Φ_L es lineal pues L es lineal) La linealidad se puede demostrar haciendo uso de la formulación variacional

Además es compacto por ser la composición de operadores continuo y compacto gracias a que Φ_L es continuo pues se tiene la estabilidad de la solución (estimación)

¿B es autoadjunto?

P.D. $\forall f, g \in L^2(\Omega) \qquad \langle Bf, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, Bg\rangle_{L^2(\Omega)}$.

Notemos que

$$\langle Bf, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega Bf(x)\, g(x)\, dx = \int_\Omega u_f(x) g(x) dx = \langle u_f, g\rangle_{L^2(\Omega)}$$

donde $u_f \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución débil de D_H, i.e.,

$$\int_\Omega A\nabla u_f \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

para $v = u_g$,

$$\int_\Omega A\nabla u_f \cdot \nabla u_g \, dx = \int_\Omega f u_g \, dx = \langle f, u_g\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Por otro lado, como $g \in L^2(\Omega)$, existe un único $u_g \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega A\nabla u_g \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega g v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

tomando $v = u_f \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega A\nabla u_g \cdot \nabla u_f \, dx = \int_\Omega g\, u_f \, dx$$

Por lo tanto,

Por la simetría de la matriz

$$\langle Bf, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u_f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega A\nabla u_g \cdot \nabla u_f dx = \int_\Omega A\nabla u_f \cdot \nabla u_g \, dx = \langle f, u_g\rangle = \langle f, Bg\rangle$$

con lo que se sigue el resultado, i.e., B es autoadjunto.

- B no nulo

Sea $f \neq 0$ P.D. $Bf \neq 0 \Leftrightarrow u_f \neq 0$

Supongamos que $u_f = 0 \Rightarrow \int_\Omega f v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \int_\Omega f v \, dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0 \text{ ctp} \Rightarrow \Leftarrow.$$

· B inyectivo

$Bf = 0 \Rightarrow f = 0$ (Utilizando el argumento anterior)

· B definido positivo

P.D. $\forall f \in L^2(\Omega)$ con $f \neq 0$, $\langle Bf, f \rangle_{L^2(\Omega)} > 0$

En efecto, notemos que

$$\langle Bf, f \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u_f(x) f(x) \, dx = \int_\Omega A \nabla u_f \cdot \nabla u_f \, dx \geq \lambda(\Omega) \alpha \| \nabla u_f \|_{L^2}^2 \geq \alpha \| u_f \|_{H_0^1}^2 > 0.$$

Aplicando el teorema espectral al operador B, se tiene que

i) El conjunto de valores propios es contable en $\mathbb{R}^+$ con su único punto de acumulación

ii) $\forall \mu \in EV(B)$, μ posee multiplicidad geométrica finita.

iii) Sea $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de valores propios de B, $(\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots \to 0)$ entonces existe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de vectores propios que forma una base hilbertiana para L^2

3)

Como $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de vectores y valores propios de B, entonces

$\forall n \in \mathbb{N} \quad B v_n = \mu_n v_n$ (Por definición)

Como $\mu_n v_n \in H_0^1$ (pues $B v_n \in H_0^1$), se tiene que

$$\int_\Omega A \nabla(\mu_n v_n) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega v_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Así,

$$\int_\Omega A \nabla v_n \cdot \nabla v \, dx = \frac{1}{\mu_n} \int_\Omega v_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

tomando $\lambda_n := \mu_n^{-1}$, se tiene que y $u_n = v_n$ en $H_0^1(\Omega)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\int_\Omega A \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

notar que la sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente que tiende a $+\infty$.

2) Claramente, si λ_n posee multiplicidad geométrica finita.
Así mismo, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base hilbertiana para $L^2(\Omega)$.
Más aún, notar que los vectores propios pertenecen a $H_0^1(\Omega)$ y, por lo tanto, los s.e.v. propios son s.e. de $H_0^1(\Omega)$ de dimensión finita.

Observaciones:

De lo hecho anteriormente, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$, λ_n es un valor propio del problema (VPD) con vector propio u_n si y solo si μ_n es un valor propio de B con vector propio u_n.

En un sentido débil, se sigue que $-\operatorname{div}(A \nabla u_n) = \lambda_n u_n$ (pues se verifica (VPD), i.e. la formulación variacional).

2) Consideremos el problema de valores propios de Dirichet con $A = Id$, i.e.,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de valores propios del problema (VPD) asociados. Se cumple que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de valores propios, es una base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$.

Jueves, 22 de febrero de 2024.

(Recapitulación).

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Por lo hecho en la clase anterior, se tiene que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

$(\lambda = \lambda(\Omega),\ u_\lambda = u_\lambda(\Omega))$

La solución del problema depende de Ω.

Gacias al teorema espectral, existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de valores propios tal que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \longrightarrow +\infty$$

y además, existen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones propias que forman una base hilbertiana de $L^2(\Omega)$.

Si ahora, consideramos $A = Id$, se tiene el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Omega \end{cases}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forma una base ortogonal para $H_0^1(\Omega)$.

P.D. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal para $H_0^1(\Omega)$.
P.D. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es ortogonal en H_0^1 y base
P.D $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $\exists!\, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares tal que

$$v = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n v_n$$

Sea $v \in H_0^1$, cualquiera. Recuerde que

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx = \lambda_n \int_\Omega u_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\iff \quad \langle u_n, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_n \langle u_n, v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Notar que para $n \neq m$,

$$\langle u_n, u_m\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_n \langle u_n, u_m\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$$

y para $n = m$, se tiene que

$$\langle u_n, u_n\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_n \langle u_n, u_n\rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda_n \Rightarrow \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\lambda_n}$$

Por lo tanto, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia ortogonal en $H_0^1(\Omega)$.

Sea $v \in H_0^1(\Omega)$. Notar que $v \in L^2(\Omega)$ y, por lo tanto, $v = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle v, u_n\rangle_{L^2(\Omega)} u_n$

Pero, por lo anterior (formulación variacional)

$$v = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle v, u_n\rangle_{L^2(\Omega)} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{-1} \langle v, u_n\rangle_{H_0^1(\Omega)} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\langle v, u_n\rangle}{\langle u_n, u_n\rangle} u_n$$

Esto prueba que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que

$$\overline{\text{span}(u_n)}^{H_0^1} = H_0^1$$

Hemos probado la existencia de una sucesión de valores propios de $-\Delta$, i.e. hemos probado la existencia de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Recuerde que la constante de Poincaré depende del conjunto Ω.

¿Es posible hallar (o estimar) los valores propios del operador $-\Delta$?

Aplicaciones
Optimización
(Problemas inversos, procesamiento de imágenes)

conocimiento de los valores propios de un operador diferencial.

Sección: Cociente de Rayleigh.

Notemos que si consideramos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

este posee al menos una solución $(\lambda, u_\lambda) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ que satisface que

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u_\lambda v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

tomando $v = u_\lambda$, se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx = \lambda \int_\Omega |u_\lambda|^2 dx \Rightarrow \lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx}{\int_\Omega |u_\lambda|^2 dx} = \frac{\|\nabla u_\lambda\|_{L^2}^2}{\|u_\lambda\|_{L^2}^2} = \frac{\|u_\lambda\|_{H_0^1}^2}{\|u_\lambda\|_{L^2}^2}$$

De esta manera, se tiene que la constante de Poincaré de Ω verifica que

$$\lambda_1 = (C_p(\Omega))^{-2} \text{ el menor de los valores propios.}$$

Definamos el funcional

$$F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto F(u) = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Notar que encontrar el menor valor propio de $-\Delta$ (λ_1) equivale a resolver el siguiente problema de optimización

$$\begin{cases} \min\limits_{u\in H_0^1} & F(u) \\ \text{s.a.} & \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \end{cases}$$

Notar que si logramos probar que este problema de optimización se resuelve, entonces se debe probar que dicha solución es una función propia de $-\Delta$

Por otro lado, también se tiene que

$$\lambda_1 = \frac{1}{C_p^2} \leq \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2}$$

Definamos $G(u) := \dfrac{\|u\|_{H_0^1}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}$ con $G : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$. Así, G es invariante por escalamiento.

es decir, al reemplazar cu con $c\in\mathbb{K}$ y $c\neq 0$, en G, entonces G no se altera. Con esto,

$$G\left(\frac{u}{\|u\|_{L^2}}\right) = \left\|\frac{u}{\|u\|_{L^2}}\right\|^2_{H_0^1}$$

Proposición: Existe $u\in H_0^1(\Omega)$ tal que u es un mínimo global de F sujeto a la restricción $\|u\|_{L^2}=1$.

Demostración:

Definamos $C := \{ u\in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{L^2} = 1\}$ e $I := \inf\limits_{u\in C} F(u)$.

Puesto que C está acotado, basta probar que, el ínfimo se alcanza.
Por caracterización de ínfimo, existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en C minimizante, i.e.

$$F(u_n) \longrightarrow I \quad \text{cuando } n\to+\infty.$$

Notar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en H_0^1, pues $\|u_n\|^2_{H_0^1} = \|\nabla u_n\|^2_{L^2} \to I$ y $\|u\|_{L^2}=1$.
Por lo tanto, existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{en } H_0^1(\Omega)$$

Por el teorema de Rellich, se tiene que

$$u_{n_k} \longrightarrow \bar{u} \text{ en } L^2(\Omega) \quad \text{y además} \quad \|\bar{u}\|_{H_0^1} \leq \liminf_{k\to+\infty} \|u_{n_k}\|_{H_0^1}$$

De esta manera,

$$F(\bar{u}) = \|\nabla\bar{u}\|^2_{L^2} \leq \liminf_{k\to+\infty} F(u_{n_k}) = I$$

Por otro lado, $\bar{u}\in C$ y así, $F(\bar{u})\geq I$ y por tanto,

$$F(\bar{u}) = I$$

esto nos dice que F alcanza su mínimo en $\bar{u}\in H_0^1(\Omega)$.

Observación: El límite $\bar{u}\in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|\bar{u}\|_{L^2}=1$ es una función propia de $-\Delta$ con valor propio $F(\bar{u})$.

Viernes, 23 de febrero de 2024.

(Recapitulación)

$\bar{u}$ es una función propia de $-\Delta$ asociada a $\lambda = F(\bar{u})$

$$\begin{cases} \min F(u) \\ \text{s.a. } g(u) = 0 \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} F: H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto F(u) = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\[1em] g: H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto F(u) = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - 1 \end{aligned}$$

Teorema (Multiplicadores de Lagrange) (Gateaux)

Sean X un espacio normado, $x^*\in X$, $F: X\to\mathbb{R}$, $g: X\to\mathbb{R}$ diferenciables ~~en u~~ en x^* en una vecindad abierta de x^*, V_{x^*} tal que F' y g' son continuas

$$F': V_{x^*} \longrightarrow X^* \quad \text{y} \quad g': V_{x^*} \longrightarrow X^*$$

Si F posee un extremo local en x^* con $g(x^*)=0$, entonces existen $\mu \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que (no ambas iguales a cero)

$$L'(x^*, \mu, \lambda) = 0 \quad \text{donde} \quad L: X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(Lagrangiano) $\quad (x, \mu, \lambda) \longmapsto L(x, \mu, \lambda) = \mu F(x) - \lambda g(x)$.

Si x^* es un punto regular [$g'(x^*)$ sea sobreyectiva

$\Updownarrow$

$\exists h \in X$, $g'(x^*) h \neq 0$]

entonces, se puede tomar $\mu = 1$.

Atención: Probar todas las hipótesis del teorema para utilizarlo, i.e. espacios normados, diferenciabilidad, mínimo local (extremo) punto regular, etc.

Notemos que

$$L'(x^*, \mu^*, \lambda^*) = 0 \iff \mu^* F'(x^*)v - \lambda^* g'(x^*) v = 0 \quad \forall v \in X.$$

Regresando a nuestro problema:

Notemos que en nuestro caso: $F, g \in C^\infty(H_0^1(\Omega); \mathbb{R})$, y además

$$F'(u)v = 2\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad g'(u)v = 2\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Por otro lado, probamos que $\bar{u}$ es un mínimo global de F que cumple que $g(\bar{u})=0$. Así, $\bar{u}$ es un extremo local de F tal que $g(\bar{u})=0$. Notar que $\bar{u}$ es un punto regular, i.e., existe una vecindad $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que ~~$g(\bar{u})v \neq 0$~~ $g'(\bar{u})v \neq 0$, en efecto,

$$g'(\bar{u})\bar{u} = 2\|\bar{u}\|^2_{L^2} = 2 \neq 0.$$

Por el teorema de multiplicadores de Lagrange, existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, tal que

$$F'(\bar{u})v - \bar{\lambda} g'(\bar{u})v = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow 2\langle \bar{u}, v\rangle_{H_0^1} - 2\bar{\lambda}\langle \bar{u}, v\rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\therefore \int_\Omega \nabla \bar{u} \cdot \nabla v \, dx = \bar{\lambda} \int_\Omega \bar{u} v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Así, $\bar{u}$ es una función propia de $-\Delta$ (en el sentido débil) asociada al valor propio $\bar{\lambda}$. Considerando $v = \bar{u}$, se tiene que

$$F(\bar{u}) = \bar{\lambda}\|\bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} = \bar{\lambda}$$

Observaciones:

1) Puesto que $\bar{\lambda} = F(\bar{u}) \leq F(u) \quad \forall u \in C$, se tiene que $\bar{\lambda}$ es el menor de todos los valores propios de $-\Delta$ y $\bar{u}$ es su función propia asociada. Por notación, denotaremos $\bar{\lambda} =: \lambda_1$ y $u_1 := \bar{u}$

2)
$$\min_{u \in C} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \iff \min_{u \in H_0^1} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}$$

A este cociente, se lo conoce como el cociente de Rayleigh

Así, $\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \dfrac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx}$.

Nota: Se tiene que $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es un isomorfismo

En general, sabemos que

$$\Delta : W^{m,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{m-2,p}(\Omega) \quad \text{con } m \geq 2,\ p \in]1,+\infty[$$

y Ω es suficientemente regular, entonces Δ es un isomorfismo.

Nota 2: Si consideramos

$$\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \quad \text{isomorfismo}$$

Δ lineal, Δ es continua, Δ es biyectiva y Δ^{-1} es continua.

Notemos que lo mencionado en esta nota lo abordamos en el problema de valores y vectores propios de operadores elípticos y problema a valores en la frontera Dirichet homogéneas.

Martes, 27 de febrero de 2024.

(Recapitulación).

Recordemos que $0 < \lambda_1 = \min\limits_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \dfrac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 \, dx}$

$\uparrow$

$\lambda_1 = F(u_1)$

Estamos interesados en hallar el próximo valor propio de $-\Delta$ (en el sentido débil)

Denotemos por λ_2 el próximo valor propio de $-\Delta$ distinto de λ_1 y por u_2 la función propia asociado a λ_2.

Proposición: Si u_1 es la función propia asociada a λ_1, entonces

$$\langle u_2, u_1 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$$

Más aún, también se tiene que

$$\langle \nabla u_2, \nabla v_1 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Si en $H_0^1(\Omega)$ consideramos la norma del gradiente, entonces $\langle \nabla u_2, \nabla u_1 \rangle = 0$ caso contrario no es cierto.

Demostración Sean (u_1, λ_1) y (u_2, λ_2) tales que satisfacen que

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v \, dx = \lambda_1 \int_\Omega u_1 v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (1)$$

$$\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla w \, dx = \lambda_2 \int_\Omega u_2 w \, dx \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega) \qquad (2)$$

Considerando $v = u_2$ en (1) y $w = u_1$ en (2), se tiene que

$$\lambda_1 \int_\Omega u_1 u_2 \, dx = \lambda_2 \int_\Omega u_1 u_2 \, dx$$

$$\therefore (\lambda_1 - \lambda_2) \int_\Omega u_1 u_2 \, dx = 0$$

$$\therefore \int_\Omega u_1 u_2 \, dx = 0 \iff \langle u_1, u_2 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$$

Como $v = u_2$ en ②, se tiene que

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \, dx = \lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$$

$$\therefore \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_{L^2} = 0.$$

Gracias a lo anterior, se tiene el siguiente problema variacional

$$\begin{cases} \min\limits_{u \in H_0^1(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\ \text{s.a.} \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad g(u) = 0 \\ \qquad \langle u, u_1 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \end{cases}$$

Para plantear el problema, recordemos el planteamiento del problema anterior

$$F(u) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto F(u) = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$g(u) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto F(u) = \|u\|_{L^2(\Omega)} - 1$$

Con esto, podemos definir

$$G : V_1 \to \mathbb{R} \qquad V_1 = \{ u \in H_0^1(\Omega) : \langle u, u_1 \rangle_{L^2} = 0 \} = \operatorname{span}_{H_0^1} \{u_1\}^\perp$$

Gracias a la formulación variacional

$$u \mapsto G(x) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Depende el contexto

Notemos que V_1 es un s.e.v. cerrado de $H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto, V_1 es un espacio de Hilbert. Así, ahora debemos resolver el problema en V_1. Definamos

$$C_1 = \{ u \in V_1 : g(u) = 0 \} \qquad \therefore \begin{cases} \min \ G(u) \\ \text{s.a.} \ u \in C_1 \end{cases}$$

Teorema. Existe $u \in C_1$ tal que $G(u) = \min\limits_{v \in C_1} G(v)$. Es decir, G posee un mínimo global sujeto a que $u \in C_1$.

Demostración:

Totalmente análogo a la demostración del teorema anterior, considerando que

1) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión minimizante en C_1
2) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en V_1
3) $u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}$ en V_1 y $u_{n_k} \to \bar{u}$ en L^2

Teorema. Si $u \in V_1$ es un extremo local para G sujeto a que $g(u) = 0$, entonces u es una función propia de $-\Delta$ asociada al valor propio $\lambda = G(u)$

Demostración

Idea: Aplicar los multiplicadores de Lagrange

$G, g \in C^1(V_1, \mathbb{R})$ pues G se extiende a F y g se extiende a $\tilde{g}$. Por lo tanto como una función es derivable si al extenderla a un abierto más grande esta es diferenciable

Ahora, note que la formulación (VPD) se verificaría para todo $v \in V_1$, notando que $H_0^1 = V_1 \oplus V_1^{\perp}$ y por la ortogonalidad se sigue lo requerido.

De esta manera, denotemos por u_2 a la función propia de $-\Delta$ asociada al valor propio

$$\lambda_2 = \min_{v \in V_1} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega v^2 \, dx}.$$

Como $V_1 \subsetneq H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_0^1} R(v) \leq \min_{v \in V_1} R(v) = \lambda_2$$ con R denotando al cociente de Rayleigh.

Inductivamente, definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n := \{ u \in H_0^1(\Omega) : \langle u, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$$
$$= \left(\operatorname{span}_{H_0^1} \{ u_i \}_{i=1}^n \right)^{\perp}$$

Modificando apropiadamente los teoremas previos (existencia de mínimo global y demostración de la función propia) se justifica que el n-ésimo valor propio de $-\Delta$ se determina por

$$\lambda_n = \min_{v \in V_{n-1}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx}$$

con función propia $u_n \in V_n$ que satisface que

$$\|u_n\|_{L^2} = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_n = \frac{\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx}{\int_\Omega u_n^2 \, dx}$$

Además, como $H_0^1(\Omega) \supsetneq V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \cdots \supsetneq V_n \supsetneq \cdots$ se tiene que la sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.

Observación:

Sabemos que para λ_1 : $\dim(\ker(-\Delta - \lambda_1 \, id)) = 1$

λ_n, $n \geq 2$: $\dim(\ker(-\Delta - \lambda_n \, id))$ es finito.

Jueves, 29 de febrero de 2024.

(Dependencia continua de los datos)

Consideremos el siguiente modelo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \nabla u) + \vec{a} \, \nabla u + cu = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial n}{\partial u} + hu = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Modelo

↳ datos dependientes de Ω (Parámetros asociados a Ω)

↳ datos independientes de Ω

Estabilidad del problema

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\underbrace{(A, \vec{a}, c, h, \Omega)}_{\text{parámetros}} \left(C_1 \|f\| + C_2 \|g\| \right)$$

Siempre se debe precisar que es una solución para una EDP.

Por otro lado, podemos hablar de estabilidad global si considerando sucesiones de datos

$$\left\{\begin{array}{l} A_k \to A \\ \vec{a}_k \to \vec{a} \\ c_k \to c \\ h_k \to h \\ f_k \to f \\ g_k \to g \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \|u_k\| \leq C(A_k, \vec{a}_k, c_k, h_k) \left(\|f_k\| + \|g_k\| \right) \\ \Rightarrow u_k \to u \end{array}$$

Cuando se estudia la estabilidad del problema, se fija el dominio y por lo tanto de los parámetros asociados.

(Ω es fijo)

Si condieramos el operador diferencial L, entonces en el problema

$$Lu = f$$

Absorbe los parámetros ↑   ↑ Datos externas.