

Análisis en Espacios de Banach y Hilbert

Martes, 9 de noviembre de 2021

Teorema de la proyección

Dado $H \subseteq E$ no vacío, completo y convexo, para todo $u \in E$, existe un único $v \in H$ tal que

$$\|u - v\| = \text{dist}(u, H)$$

Demostración

P.D. $(\forall u \in E) (\exists! v \in H) (\|u - v\| = \inf_{w \in H} \|u - w\|)$

Sea $u \in E$ | ① $u \in H$: tomando $v = u$ se tiene que $\|u - v\| = 0 = \inf_{w \in H} \|u - w\|$

| ② $u \in E \setminus H$ $\text{dist}(u, H) > 0 \Leftrightarrow \inf_{w \in H} \|u - w\| > 0$ (sucesión minimizante)
Por caracterización del ínfimo, existe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en H tal que

$$\|u - v_n\| \rightarrow \text{dist}(u, H) \Rightarrow \|u - v_n\| \rightarrow \inf_{w \in H} \|u - w\|$$

P.D. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (Puesto que H es completo, basta probar que (v_n) es de Cauchy)

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\| &= \|v_n - u + u - v_m\| \\ &\leq \|v_n - u\| + \|u - v_m\| \\ &\leq \text{dist}(u, H) + \text{dist}(u, H) \\ &= 2 \text{dist}(u, H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= \|v_n - u + u - v_m\|^2 \\ &= \underbrace{\|v_n - u\|}_a^2 + \underbrace{\|u - v_m\|}_b^2 \\ &= 2(\|v_n - u\|^2 + \|u - v_m\|^2) - \|v_n - u - u + v_m\|^2 \\ &= 2(\|v_n - u\|^2 + \|u - v_m\|^2) - \|v_n + v_m - 2u\|^2 \\ &= 2(\|v_n - u\|^2 + \|u - v_m\|^2) - 4 \left\| \frac{v_n + v_m}{2} - u \right\|^2 \end{aligned}$$

Así, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y como H es completo, existe $v \in H$ tal que

$$v_n \rightarrow v$$

$$\begin{aligned} &\leq 2(\|v_n - u\|^2 + \|u - v_m\|^2) - 4 \text{dist}(u, H)^2 \\ &\leq 2 \text{dist}(u, H)^2 + 2 \text{dist}(u, H)^2 - 4 \text{dist}(u, H)^2 = 0 \end{aligned}$$

P.D. $\|u - v_n\| \rightarrow \|u - v\|$

$n, m \rightarrow +\infty$

Miércoles, 10 de Noviembre de 2021

Falta demostrar que $\|u - v_n\| \rightarrow \|u - v\|$

Sabemos que $v_n \rightarrow v$ en E , es decir, debemos mostrar que $|\|u - v_n\| - \|u - v\|| \rightarrow 0$

$$\|v_n - v\| = \|v_n - u + u - v\| = \|(v_n - u) - (v - u)\|$$

y entonces

$$|\|v_n - u\| - \|v - u\|| \leq \|v_n - u - (v - u)\| = \|v_n - v\| \rightarrow 0$$

Por unicidad del límite, se tiene que $\|u - v\| = \inf_{w \in H} \|u - w\| = \text{dist}(u, H)$

Ahora, falta mostrar la unicidad

• Unicidad: Supongamos que existe $v, z \in H$ tal que

$$\|u - v\| = \|u - z\| = \text{dist}(u, H)$$

Ahora, por la identidad del paralelogramo

$$\begin{aligned} \|v-z\| &= 2(\|v-u\|^2 + \|v-z\|^2) - \|v+z-2u\|^2 \\ &= 4 \operatorname{dist}(u, H)^2 - 4 \left\| \frac{v+z}{2} - u \right\|^2 \\ &\leq 4 \operatorname{dist}(u, H)^2 - 4 \operatorname{dist}(u, H)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Proposición 2 - Caracterización de la proyección de un punto sobre un conjunto convexo y completo-
 Sea $H \subseteq E$ no vacío, completo y convexo; así, $v \in H$ es la proyección de $u \in E$ sobre H si y solo si

$$(K = \mathbb{R}) \quad \forall w \in H \quad \langle u-v, w-v \rangle \leq 0$$

$$(K = \mathbb{C}) \quad \forall w \in H \quad \operatorname{Re}(\langle u-v, w-v \rangle) \leq 0$$

Demostración (Primera aproximación)

\Rightarrow Sea $w \in H$

$$\begin{aligned} \|(u-v) - (w-v)\|^2 &= \langle u-v - (w-v), u-v - (w-v) \rangle \\ &= \langle u-v, u-v - (w-v) \rangle - \langle w-v, u-v - (w-v) \rangle \\ &= \langle u-v, u-v \rangle - \langle u-v, w-v \rangle - \langle w-v, u-v \rangle + \langle w-v, w-v \rangle \\ &= \|u-v\|^2 - 2\langle u-v, w-v \rangle + \|w-v\|^2 \\ &= \operatorname{dist}(u, H)^2 - 2\langle u-v, w-v \rangle + \|w-v\|^2 \\ &\geq \operatorname{dist}(u, H)^2 - 2\langle u-v, w-v \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Así, } 2\langle u-v, w-v \rangle \geq \operatorname{dist}(u, H)^2 - \|(u-v) - (w-v)\|^2 \geq \operatorname{dist}(u, H)^2 - \|u-w\|^2$$

Sea $w \in H$. Consideremos el segmento de recta $[v, w]$. Sea $z \in [v, w] \in H$, convexidad

$$\begin{aligned} \alpha \|u-v\|^2 &\leq \|u-z\|^2 \\ &= \|u - ((1-\alpha)v + \alpha w)\|^2 \\ &= \|u-v - \alpha(w-v)\|^2 = \|u-v\|^2 - 2\alpha \langle u-v, w-v \rangle + \alpha^2 \|w-v\|^2 \end{aligned}$$

$$2\alpha \langle u-v, w-v \rangle \leq \alpha^2 \|w-v\|^2 \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]$ tal que $\alpha_n \neq 0$ y $\alpha_n \rightarrow 0$

\dagger Esto es cierto pues 0 es un punto de acumulación en $[0, 1]$; así

$$\langle u-v, w-v \rangle \leq \frac{\alpha_n}{2} \|w-v\|^2$$

Pasando el límite $n \rightarrow +\infty$

$$\langle u-v, w-v \rangle \leq 0.$$

Jueves, 11 de noviembre de 2021

(\Leftarrow) Supongamos que

$$\forall w \in H, \quad \langle u-v, w-v \rangle \leq 0$$

Definición.

Se dice que $v \in H$ es la proyección de $u \in E$ sobre H , con $H \neq \emptyset$ y E espacio pre-Hilbertiano, si:

$$\|u-v\| = \operatorname{dist}(u, H)$$

P.D. v es la proyección de u sobre H

P.D. $\|u-v\| = \operatorname{dist}(u, H)$

(2)

$$\operatorname{dist}(u, H) \leq \|u-v\|$$

Basta probar que $\|u-v\| \leq \text{dist}(u, M) \Leftrightarrow \|u-v\| \leq \inf_{w \in M} \|u-w\|$

Equivalentemente, se puede mostrar que

$$\|u-v\| \leq \|u-w\| \quad \forall w \in M$$

Sea $w \in M$, cualquiera.

$$\begin{aligned} \|u-w\|^2 &= \|u+v-v-w\|^2 \\ &= \langle (u+v) - (w+v), (u+v) - (w+v) \rangle \\ &= \|u-v\|^2 - 2\langle u-v, w-v \rangle + \|w-v\|^2 \\ &\geq \|u-v\|^2 + \|w-v\|^2 \\ &\geq \|u-v\|^2 \end{aligned}$$

Así, se concluye que

$$\|u-w\|^2 \geq \|u-v\|^2 \quad \forall w \in M.$$

• $\mathbb{K} = \mathbb{C} : z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 - \langle z_1, z_2 \rangle_{\mathbb{C}} - \langle z_2, z_1 \rangle_{\mathbb{C}} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 - \langle z_1, z_2 \rangle_{\mathbb{C}} - \overline{\langle z_1, z_2 \rangle_{\mathbb{C}}} + |z_2|^2 \end{aligned}$$

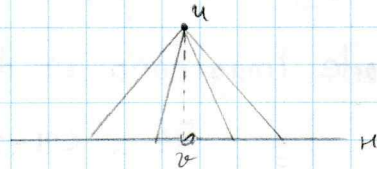
Observación

Para el recíproco de la proposición 2, no se necesita completitud o convexidad del conjunto.

(H puede ser cualquier conjunto no vacío)

$$\forall w \in H, \langle u-v, w-v \rangle \leq 0$$

No es cierto para el siguiente ejemplo



Clase 4 - Lunes 15 de noviembre de 2021

Proposición 3. - Caracterización de la proyección de un punto sobre un subespacio vectorial completo -

Sea H un subespacio vectorial de E .

$v \in H$ es la proyección de $u \in E$ sobre H si y solo si $\forall w \in H \langle u-v, w \rangle = 0$

Demostración

(\Rightarrow) Supongamos que v es la proyección de u sobre H (gracias al teorema de la proyección)

P.D. ($\forall w \in H$) ($\langle u-v, w \rangle = 0$)

① Si $u \in H$, entonces $v = u$ y así $\forall w \in H \langle u-v, w \rangle = 0$

Sea $w \in H$.

② Si $u \notin H$, Gracias a la caracterización de la proyección sobre un conjunto no vacío, convexo y completo

$$(\forall w \in H) \langle u-v, w-v \rangle \leq 0$$

Tomando $z = v + \lambda w \in H$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \langle u-v, \lambda w \rangle \leq 0$$

Considerando $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ en la desigualdad anterior, se sigue que

$$\langle u-v, w \rangle = 0.$$

(\Leftarrow) Supongamos que $(\forall w \in H) (\langle u-v, w \rangle = 0)$

P.D. v es la proyección de u sobre H

Basta mostrar que $(\forall w \in H) (\langle u-v, w-v \rangle \leq 0)$.

Sea $z \in H$. P.D. $\langle u-v, z-v \rangle \leq 0$.

Sabemos por (*) que

$$\langle u-v, z \rangle = 0 \quad \langle u-v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u-v, -v \rangle = 0$$

$$\langle u-v, z \rangle + \langle u-v, -v \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle u-v, z-v \rangle = 0 //$$

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(\Rightarrow) $(\forall z \in H) (\operatorname{Re}(\langle u-v, z-v \rangle) \leq 0)$

Sea $w \in E$ P.D. $\langle u-v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\langle u-v, w \rangle) = \operatorname{Im}(\langle u-v, w \rangle) = 0$

Para la parte imaginaria se debe mostrar que

$$\operatorname{Re}(i \langle u-v, w \rangle) = 0$$

(\Leftarrow) $z = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Observación

Para la implicación recíproca, H es

2 Operador proyección

Si H es un subconjunto no vacío, completo y convexo de E , gracias al teorema de la proyección, es posible definir un operador P_H como

$$P_H: E \rightarrow E \\ u \mapsto P_H(u) = v,$$

donde $v = \operatorname{argmin}_{w \in H} (\|u-w\|)$ y argmin es el argumento mínimo del funcional $\|u-w\|$ sobre el conjunto H .

Proposición 4.

El operador P_H es Lipschitz continua con constante $L=1$.

El operador P_H no incrementa las longitudes.

Demostración ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Sean $u_1, u_2 \in E$. P.D. $\|P_H u_1 - P_H u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|$

$$\Leftrightarrow \text{P.D. } \|P_H u_1 - P_H u_2\|^2 \leq \|u_1 - u_2\|^2$$

$$\textcircled{1} \quad (\forall w \in H) (\langle u_1 - P_H u_1, w - P_H u_1 \rangle \leq 0)$$

$$\textcircled{2} \quad (\forall w \in H) (\langle u_2 - P_H u_2, w - P_H u_2 \rangle \leq 0)$$

En $\textcircled{1}$ $w = P_H u_2$ y en $\textcircled{2}$ $w = P_H u_1$; así

$$\langle u_1 - P_H u_1, P_H u_2 - P_H u_1 \rangle \leq 0$$

$$\langle u_2 - P_H u_2, P_H u_1 - P_H u_2 \rangle \leq 0$$

Añ.

$$- \langle u_1 - P_H u_1, P_H u_1 - P_H u_2 \rangle \leq 0$$

$$\langle u_2 - P_H u_2, P_H u_1 - P_H u_2 \rangle \leq 0$$

de donde

$$\langle u_2 - P_H u_2, P_H u_1 - P_H u_2 \rangle - \langle u_1 - P_H u_1, P_H u_1 - P_H u_2 \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle u_2 - P_H u_2 - (u_1 - P_H u_1), P_H u_1 - P_H u_2 \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle u_2 - u_1, P_H u_1 - P_H u_2 \rangle + \|P_H u_1 - P_H u_2\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \|P_H u_1 - P_H u_2\|^2 \leq \langle u_1 - u_2, P_H u_1 - P_H u_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \|P_H u_1 - P_H u_2\|^2 \leq \|u_1 - u_2\| \|P_H u_1 - P_H u_2\|$$

$$\Rightarrow \|P_H u_1 - P_H u_2\| \leq \underbrace{\|P_H u_1 - P_H u_2\|}_{\geq 0} \leq \underbrace{\|u_1 - u_2\|}_{\leq 0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \|P_H u_1 - P_H u_2\| - \|u_1 - u_2\| \leq 0$$

$$\Rightarrow \|P_H u_1 - P_H u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|.$$

lo que concluye la demostración

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (\forall w \in H) (\operatorname{Re} (\langle u - P_H u, w - P_H u \rangle) \leq 0)$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}(z) \leq |z|$$

Proposición 5 P_H es lineal si y solo si H es un subespacio vectorial de E

Demostración

\Rightarrow Supongamos que P_H es lineal. P.D. H es un s.e.v. de E

$$\text{Conocemos que } \operatorname{Im}g(P_H) \subseteq H$$

$$\operatorname{Im}g(P_H) = H$$

Dado $v \in H$, entonces
 $P_H v = v \in H \therefore v \in \operatorname{Im}g(P_H)$

Gracias a que P_H es lineal, entonces $\operatorname{Im}g(P_H)$ es un subespacio vectorial de E

$\Leftrightarrow U$ es un s.e.v. de E . P_U es lineal

Dadas $\alpha \in \mathbb{K}$, $u_1, u_2 \in E$ P.D. $P_U(\alpha u_1 + u_2) = \alpha P_U(u_1) + P_U(u_2)$

P_U es lineal $\Leftrightarrow P_U$ es \mathbb{K} -lineal $\alpha \in \mathbb{C}: P_U(\alpha u_1 + u_2) = \alpha P_U(u_1) + P_U(u_2)$

$\forall w \in H \quad \langle u_1 - P_U u_1, w \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \forall w \in H \quad \langle u_2 - P_U u_2, w \rangle = 0$

$\forall w \in H \quad \langle \alpha u_1 + u_2 - \underbrace{P_U(\alpha u_1 + u_2)}_{\in H}, w \rangle = 0$

$\langle \underbrace{\alpha u_1 - u_2 - P_U(\alpha u_1) - P_U(u_2)}_{\in H}, w \rangle = 0 \quad \forall w \in H.$

Gracias a la caracterización de la proyección sobre un s.e.v.

$$\alpha P_U u_1 + P_U u_2 = P_U(\alpha u_1 + u_2).$$

Martes, 16 de noviembre de 2021

(Continuación) Proposición 5

Además, si el subespacio $U \neq \{0\}$, entonces $\|P_U\|_{\mathcal{L}(E, E)} = 1$

* Supongamos que $U = \{0\}$

operator
↓
 $P_U(\{0\}) = \{0\} \Rightarrow \|P_U\|_{\mathcal{L}(E, E)} = 0$

• Si $U \neq \{0\}$

$$P_U \in \mathcal{L}(E, E)$$

Como P_U es Lipschitz continua, entonces $\|P_U u - P_U 0\| \leq \|u - 0\|$

$$\Rightarrow \forall u \in E \quad \|P_U u\| \leq \|u\|$$

$$\Rightarrow \sup_{u \neq 0} \frac{\|P_U u\|}{\|u\|} \leq \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1$$

$$\Rightarrow \|P_U u\| \leq \|u\|$$

• P.D. $\|P_U\| \geq 1 \Leftrightarrow$ Hallar $\|u\|=1$ tal que $\|P_U u\|=1$

P.D. $(\exists u \in E \setminus \{0\}) \left(\frac{\|P_U u\|}{\|u\|} = 1 \right) \Rightarrow$ Basta mostrar $(\exists u \in E, \|u\|=1) (\|P_U u\|=1)$

Sea $w \in U \setminus \{0\}$. Tomando $u = w/\|w\| \in U$, se sigue que $\|u\|=1$ y

$$\|P_U u\| = \|u\| = 1.$$

Así, se concluye que $\|P_U u\| = 1$.

Observación

P_U es idempotente, $P_U^2 = P_U \quad P_U^2 = P_U \circ P_U.$

Ejercicio.

$$\ker(P_U) = (\text{Im}(P_U))^\perp$$

- 1.) U convexo
- 2.) U s.e.v.

Ejercicio 2

Sean $a \in \mathbb{R}^N$ y $b \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Se define $U = \text{span}\{b\}$
 Encuentre el operador proyección de a sobre U .

Ejercicio 1

Caso U s.e.v.

P.D. $\text{Ker}(P_U) \subseteq (\text{Img}(P_U))^\perp$

Sea $u \in \text{Ker}(P_U)$, P.D. $u \in (\text{Img}(P_U))^\perp$
 $\Leftrightarrow (\forall v \in \text{Img}(P_U)) \langle u, v \rangle = 0$

$u \in \text{Ker}(P_U) \Rightarrow P_U(u) = 0$

Sea $v \in \text{Img}(P_U) = U$. $\langle u, v \rangle = \langle u - 0, v \rangle$
 $= \langle u - P_U u, v \rangle$
 $= 0$

P.D. $(\text{Img}(P_U))^\perp \subseteq \text{Ker}(P_U)$

Sea $u \in (\text{Img}(P_U))^\perp$ P.D. $u \in \text{Ker}(P_U)$
 \Leftrightarrow P.D. $P_U u = 0$

$\forall v \in \text{Img}(P_U) = U$, $\langle u, v \rangle = 0$
 $\langle u - 0, v \rangle = 0 \quad \forall v \in U$

$\Rightarrow 0 = P_U u$

Caso: U convexo (No contamos con este resultado)

Ejercicio 2

$P_{\text{span}\{b\}} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$
 $a \mapsto p = \text{proj}_{\text{span}\{b\}} a$

$U = \text{span}\{b\}$ s.e.v.

$\|a - p\|_{\mathbb{R}^N} = \min_{q \in \text{span}\{b\}} \|a - q\|_{\mathbb{R}^N}$

Prob $\left\{ \begin{array}{l} \min \ a - q\ _{\mathbb{R}^N} \\ \text{s.c. } q \in \text{span}\{b\} \end{array} \right\}$	\parallel	Prob * U s.e.v \hookrightarrow hallar base ortonormal de U .	\parallel	Prob. Caracterización de un vector sobre s.e.v $\forall w \in \text{span}\{b\} \langle a - p, w \rangle = 0$ $\Leftrightarrow p = P_{\text{span}\{b\}} a$
---	-------------	--	-------------	---

(Prob 2) $\langle a - ab, b \rangle = 0$

$\alpha = \frac{\langle a, b \rangle}{\|b\|^2}$

$p = \text{proj}_{\text{span}\{b\}} a = \alpha b = \frac{\langle a, b \rangle}{\|b\|^2} \cdot b$

* $P_{\text{span}\{b\}} = \frac{\langle \cdot, b \rangle}{\|b\|^2} b$; \mathbb{R}^N es un espacio de Hilbert $(\mathbb{R}^N)^* \cong \mathbb{R}^N$

$b \leftrightarrow e_b$

$P_{\text{span}\{b\}} = e_b$

T no lineal

$\exists u \in T : Tu = 0$

$Tu = Lu + v \quad v \neq 0$

$Lu + v = 0$

$Lu = -v$

↑
Ecuación en operadores

$-v \in \text{Img}(L)$

Miércoles, 17 de noviembre de 2021

$$P_{\text{span}\{b\}} = \frac{\langle a, b \rangle}{\|b\|^2} b$$

$$P_{\text{span}\{b\}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$a \mapsto p = Pa$$

↑ matriz asociada

$$p = \frac{\langle b, a \rangle}{\|b\|^2} b = \frac{b^T a}{\|b\|^2} b = \frac{b \cdot b^T a}{\|b\|^2} = \frac{1}{\|b\|^2} \underbrace{(b b^T)}_{\mathbb{R}^{n \times n}} a$$

$$P = \frac{1}{\|b\|^2} (b b^T)$$

$$P_{\text{span}\{b\}} a = Pa$$

Resumen propiedades del operador proyección

Dados E un espacio prehilbertiano y H un subconjunto no vacío, convexo y completo, el operador proyección sobre H , $P_H: E \rightarrow E$, satisface que:

- P_H es idempotente
- P_H es Lipschitz continua, con constante 1.

Cuando H es un subespacio vectorial, entonces

- $P_H \in \mathcal{L}(E, E)$ tal que $\|P_H\| = 1$
En este caso P_H es conocido como el operador proyección ortogonal de H .
- $\text{Ker}(P_H) = (\text{Im}(P_H))^\perp$

Resumen propiedades del complemento ortogonal de un conjunto

Dadas E un espacio prehilbertiano y H un subconjunto no vacío, el complemento ortogonal de H , denotado H^\perp es el conjunto

$$H^\perp = \{ u \in E : \forall v \in H, \langle u, v \rangle = 0 \}$$

- H^\perp es un subespacio vectorial cerrado de E
- Si $H \subseteq N$, entonces $N^\perp \subseteq H^\perp$
- $H^\perp = \overline{H^\perp}$
- $H \subseteq H^{\perp\perp}$
- Si E es un espacio de Hilbert, entonces

H es un subespacio vectorial cerrado si y solo si $H = H^{\perp\perp}$

- $H^{\perp\perp} = \overline{\text{span}(H)}$

Sueves, 18 de noviembre de 2021

Teorema. 6 - Caracterización de un subespacio denso en un espacio de Hilbert

Sea H un subespacio vectorial de E . Si H es denso en E , entonces $H^\perp = \{0\}$. Además, si E es un espacio de Hilbert, entonces el recíproco es cierto.

Observación

En el caso en el que E es un espacio de Hilbert, se tiene que

$$\overline{H} = E \text{ si y solo si } H^\perp = \{0\}$$

- E espacio pre-hilbertiano
Sup $H \neq \emptyset$ subconjunto de E tal que H es denso en E

P.D. $H^\perp = \{0\}$

⑧

Sea $x \in H^\perp$. P.D. $x=0$

$$x \in H^\perp \Rightarrow (\forall v \in H) (\langle x, v \rangle = 0)$$

Además, como $H^\perp \subseteq E$, por lo tanto $x \in E$, así, existe una sucesión $(v_n)_n$ en H tal que

$$v_n \rightarrow x$$

Dado que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es continuo en cada argumento, entonces se tiene que

$$\langle v_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$$
$$= 0$$

Por unicidad del límite, $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

• Supongamos que $H^\perp = \{0\}$. P.D. $\bar{H} = E$

Sea $x \in E$, P.D. Existe una sucesión en H tal que $x_n \rightarrow x$

1) $x \in H$, $(x_n)_n = (x)_n$ converge a x

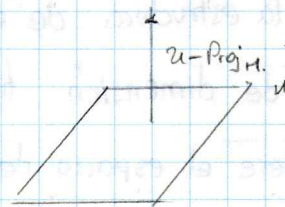
2) $x \in H^c$: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow (0) \text{ converge a } 0 \\ x \neq 0 \Rightarrow \end{cases}$

!Nos quedamos atascados!

Supongamos que $H^\perp = \{0\}$ y $\bar{H} \neq E$

Sea $x \in E \setminus \bar{H}$.

\bar{H} es cerrado y subespacio vectorial



Las hipótesis adecuadas para demostrar que $\bar{H} = E$ son: E espacio de Hilbert y H s.e.v de E .

Notar que $x - P_{\bar{H}}x \perp \bar{H}$ $(\forall v \in \bar{H}) (\langle x - P_{\bar{H}}x, v \rangle = 0)$

Notar que $x - P_{\bar{H}}x \neq 0$. En particular, $\forall v \in H$ $\langle x - P_{\bar{H}}x, v \rangle = 0$

$$\therefore x - P_{\bar{H}}x \in H^\perp \quad x - P_{\bar{H}}x = 0$$

Proposición 7 - Espacios de Hilbert como suma directa

Sea E un espacio de Hilbert y H es un subespacio cerrado de E . Entonces

$$E = H \oplus H^\perp$$

Demostración

P.D. $E = H \oplus H^\perp$

Dado que $H + H^\perp \subseteq E$, basta probar que $E \subseteq H + H^\perp$

Sea $x \in E$. P.D. $x \in H + H^\perp$

Como H es un subespacio vectorial cerrado de E y E es un espacio de Hilbert, entonces existe $v = P_H x$. Podemos escribir

$$x = \frac{P_H x}{\in H} + \frac{x - P_H x}{\in H^\perp}$$

Vimos en la demostración anterior que $x - P_H x \perp H$ y por lo tanto $x - P_H x \in H^\perp$

Se ha demostrado que $E = H + H^\perp$

Lunes, 22 de Noviembre de 2021

Bases hilbertianas

Motivación

¿Cuál es la razón de ser de un espacio vectorial de E sobre \mathbb{K} ? Será conocer

- ¿la forma de los vectores en el espacio tridimensional, o en la cuarta dimensión o en el (NO) espacio vectorial de las once dimensiones sugerido por la teoría de supercuerdas
- ¿la representación de los vectores que la constituyen?
- ¿cómo combinar los vectores que lo constituyen y las consecuencias de dichas combinaciones?
- ¿cómo transformar ciertos vectores en otros?
- ¿cómo se generan nuevas estructuras matemáticas a partir de los espacios vectoriales?

¿Es necesario conocer todo el espacio vectorial para comprender los vectores que lo constituyen y sus relaciones? De igual manera, dados dos espacios vectoriales, ¿es necesario conocer todos los elementos de los dos espacios vectoriales para determinar las transformaciones que preservan la estructura de ambos espacios?

1. E espacios de dimensión finita

2. Espacios de dimensión infinita: extensión del concepto de base

Ejemplo Considere el espacio de las sucesiones reales $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (\mathbb{R}^{∞})

¿Es el conjunto

$$S = \{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, \dots), (0, 0, 1, \dots), \dots\}$$

una base algebraica para $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Debemos suprimir la necesidad de considerar sumas finitas. ¿Sumas infinitas? ¿Qué sentido tiene?

Noción de convergencia: norma. Si la norma es $\|u\| = \|(u_1, u_2, \dots)\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2\right)^{1/2}$, ¿cuál es la norma de $(1, 1, 1, \dots)$?

¿Qué podemos decir del conjunto S si consideramos las sucesiones en ℓ_{∞} ?

Familias ortonormales.

Martes, 23 de noviembre de 2021

Sean E un espacio vectorial sobre \mathbb{K} con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\{e_i\}_{i \in I}$ una familia ortonormal de vectores en E .

Definición 1: $\{e_i\}_{i \in I}$ se dice maximal

$$\langle x, e_i \rangle = 0 \text{ si para todo } i \in I \Rightarrow x = 0$$

Consideremos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en ℓ_{∞} definida por

$$x_1 = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_{\infty}$$

$$x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right) \in \ell_{\infty}$$

$$x^3 = (1, 1/2, 1/4, 0, \dots) \in \ell_{\infty} \quad x_n = (1, 1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^{n-1}, \dots)$$

$(x_n)_n$ converge a x respecto a la norma $\|\cdot\|_2$

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_2^2 &= \|(1, 1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^{n-1}, 0, 0, \dots) - (1, 1/2, 1/2^2, 1/2^3, \dots)\|_2^2 \\ &= \|(0, 0, 0, \dots, 0, -1/2^n, -1/2^{n+1}, \dots)\|_2^2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2 = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2^k}\right)^2 = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{4^k} \end{aligned}$$

$\leftarrow n-1$ cola de la serie geométrica

Proposición 8:

Sean E un espacio prehilbertiano sobre \mathbb{K} y $\{e_i\}_{i \in I}$ una familia ortonormal de E . Si $\text{span}\{e_i\}_{i \in I} = E$, entonces la familia $\{e_i\}_{i \in I}$ es maximal.

Demostración

Supongamos que $\text{span}\{e_i\}_{i \in I} = E$.

Supongamos además que $\langle x, e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I$. P.D. $x=0$
 $x \in E$.

$$\text{span}\{e_i\}_{i \in I} = \left\{ \sum_{j \in J} a_j e_j : \#J \subseteq I, \text{card}(J) < +\infty \right\}$$

$\exists (x_n)_n$ una sucesión del $\text{span}(U)$ tal que $x_n \rightarrow x$ en E .

$$\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle \text{ en } \mathbb{R} \quad \langle x_n, x \rangle = 0$$

Como $x_n \in \text{span}\{e_i\}_{i \in I}$, entonces existe $J \subseteq I$ tal que $\text{Card}(J) < +\infty$ tal que

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k \in J_n} d_k e_k \\ \langle x_n, x \rangle &= \left\langle \sum_{k \in J_n} d_k e_k, x \right\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &= \sum_{k \in J_n} d_k \langle e_k, x \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$, entonces $\langle x, x \rangle = 0$ y por lo tanto, $x=0$.

Observación: ¿Es cierto que $(\text{span}\{e_i\}_{i \in I})^\perp = (\{e_i\}_{i \in I})^\perp$?

Proposición 9: Sean E un espacio de Hilbert y $\{e_i\}_{i \in I}$ una familia ortonormal maximal de E , entonces $\text{span}\{e_i\}_{i \in I} = E$.

Demostración.

Supongamos que $\{e_i\}_{i \in I}$ una familia ortonormal maximal P.D. $\text{span}\{e_i\} = E$

Basta mostrar que $(\overline{\text{span}\{e_i\}_{i \in I}})^\perp = \{0\}$ y por la propiedad de los ortogonales, basta mostrar que

$$(\text{span}\{e_i\}_{i \in I})^\perp = \{0\}$$

Sea $x \in \text{span}\{e_i\}_{i \in I}$. P.D. $x=0$

$$\exists J \subseteq I \quad \text{card}(J) < +\infty \quad \text{tal que} \quad \sum_{j \in J} d_j e_j = x$$

$$\langle x, e_i \rangle = d_i \quad x = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$$

$$\langle x, e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \{e_i\}_{i \in I}^\perp$$

• $\text{span} \{e_i\}_{i \in I}^\perp$ vs $\{e_i\}_{i \in I}^\perp$

P.D. $\{e_i\}_{i \in I}^\perp \subseteq \text{span} \{e_i\}_{i \in I}^\perp$

Sea $v \in \{e_i\}_{i \in I}^\perp$ P.D. $v \in (\text{span} \{e_i\}_{i \in I}^\perp)^\perp$

$$\text{P.D. } \langle v, \sum_{j \in J} d_j e_j \rangle = 0 \quad \forall J \subseteq I \text{ card}(J) < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \text{P.D. } \sum_{j \in J} d_j \langle v, e_j \rangle = 0 \quad \forall J \subseteq I \text{ card}(J) < +\infty$$

! Se cumple la igualdad!

$$\{e_i\}_{i \in I}^\perp = \text{span} \{e_i\}_{i \in I}^\perp$$

Basta mostrar que $\{e_i\}_{i \in I}^\perp = \{0\}$ $x \in \{e_i\}_{i \in I}^\perp \Leftrightarrow \langle x, e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I$
 $\Rightarrow x = 0$

Miércoles, 24 de noviembre de 2021

$B = \{e_1, \dots, e_m\}$ base ortonormal

$$[x] = \begin{bmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_m \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$T = \{e_i \in \ell_{\infty} : e_i^{(i)} = e_i^{(i+1)} = 1, i \in \mathbb{N}\}$$

$$T = \{(1, 1, 0, 0, 0, \dots), (0, 1, 1, \dots), (0, 0, 1, 1, \dots)\}$$

$$U = \{e_i \in \ell_{\infty} : e_i^{(i)} = e_i^{(i+2)} = 1 : e_i^{(j)} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{i, i+2\}, i \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{(1, 0, 1, \dots), (0, 1, 0, 1, \dots), (0, 0, 1, 0, 1, \dots), \dots\}$$

$$W = \{e_i / \|e_i\| : e_i \in U \quad \forall i\}$$

Sea $x \in \ell_{\infty}$.

Jueves, 25 de noviembre de 2021

Teorema 10. Todo espacio pre-hilbertiano sobre \mathbb{K} posee una familia ortonormal maximal

Lema 11 Sea X un conjunto no vacío parcialmente ordenado. Si todo subconjunto $A \subseteq X$ totalmente ordenado posee una cota superior, entonces X posee al menos un elemento maximal.

Conceptos del lema de Zorn.

• Sea X un conjunto no vacío y $R \subseteq X \times X$ una relación sobre X . Se dice que R es una relación de orden parcial si

1. Para todo $x \in X$, $x R x$ (Reflexividad)
2. Para todo $x, y \in X$ tal que $x R y$ y $y R x \Rightarrow x = y$ (Antisimetría)
3. Para todo $x, y, z \in X$ tal que $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$ (Transitividad)

• Si todos los elementos de X son comparables (i.e. para todo $x, y \in X$, $x R y$ o $y R x$) entonces se dice que R es una relación de orden total y que el conjunto X es totalmente ordenado.

• Es usual asignar una relación de orden \mathbb{R} la notación \leq , aún cuando ésta no necesariamente represente a la relación de orden usual sobre \mathbb{R}

• Se dice que $m \in X$ es un elemento maximal de X si verifica que

$$\text{dado } x \in X \text{ tal que } m \leq x \Rightarrow m = x,$$

es decir, no existe ningún elemento del conjunto que sea mayor que el elemento maximal (mayor respecto a la relación \leq)

Observaciones

- Un conjunto puede tener varios, uno o ningún elemento maximal.
- Un elemento maximal no necesita ser una cota superior, por tanto, un elemento maximal no necesariamente es un máximo del conjunto. Más aún, un conjunto puede tener elementos maximales sin que este tenga un máximo. Sin embargo, todo máximo de un conjunto es un elemento maximal

Ejemplo: Consideremos la siguiente relación de orden parcial sobre \mathbb{N} :

$$x \leq y, \text{ si y solo si } x | y \text{ (} x \text{ es un divisor de } y \text{)}$$

Para $A = \{2, 3, 4, 8\}$, el conjunto de cotas superiores de A es $\{24k : k \in \mathbb{N}\}$, por tanto, A está acotado superiormente

Martes, 30 de noviembre de 2021

Los elementos maximales son elementos del conjunto

$m \in A$ es un elemento maximal si $m R x \Rightarrow x = m$

Podemos tener un conjunto cuyos elementos sean todos maximales.

$2R2$
 $3R3$
 $4R4$
 $8R8$

R es una relación de orden parcial

$$2R2, 2R4, 2R8 \Rightarrow 2 \text{ no es maximal}$$

$$3R3 \Rightarrow 3 \text{ es un elemento maximal}$$

$$4R4, 4R8 \Rightarrow 4 \text{ no es un elemento maximal}$$

$$8R8$$

Demostración (Teorema-10)

Sea E , un espacio pre-hilbertiano sobre \mathbb{K}

$E = \{0\}$ no admite una familia ortonormal maximal.

\hookrightarrow tiene base y es \emptyset

\downarrow vector normal.

Supongamos que $\dim(E) \geq 1$. Si $\dim(E) = 1$, $\Rightarrow B \in \{e\}$.

Supongamos que $\dim(E) \geq 2$. Esto nos garantiza que existen al menos dos vectores l.i., digamos, e y f .

Además, equipamos a E con la relación de orden parcial \leq . Sea $A \subseteq E$ un conjunto ordenado totalmente.

P.D. A posee una cota superior

$$\text{P.D. } (\exists k)(\forall a \in A)(a \leq k)$$

\leftarrow subconjuntos

Hasta aquí, no contamos con ninguna información sobre A , que en teoría es un conjunto totalmente ordenado.

Sin pérdida de generalidad, i.e., si es un conjunto ortonormal (proceso de Gram-Schmidt)

Definamos entonces \mathcal{A} es una familia ortonormal.

$$\mathcal{A} = \{ \{e_i\}_{i \in I} \subseteq E : \{e_i\}_{i \in I} \text{ contenga a } \{e, f\} \}$$

$$\{e, f\} \in \mathcal{A}$$

(\mathcal{A}, \subseteq) es un conjunto no vacío parcialmente ordenado.

Sea $B \subseteq \mathcal{A}$ cualquier conjunto totalmente ordenado.
Hallamos, $K \in E$ tal que

$$(\forall B \in \mathcal{B}) (B \subseteq K)$$

Tomando $K = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, se verifica lo requerido. Gracias al lema de Zorn, \mathcal{A} posee al menos un elemento maximal, digamos $\{e_i\}_{i \in I}$.

Es claro que $\{e_i\}_{i \in I}$ es una familia ortonormal por definición de \mathcal{A} .

Basta mostrar que $\{e_i\}_{i \in I}$ es maximal, es decir, se debe probar que $\langle x, e_i \rangle = 0 \ \forall i \in I$, [A] entonces $x = 0$.

(Por contradicción) Supongamos que $x \neq 0$. Definimos la familia $\mathcal{C} = \{e_i\}_{i \in I} \cup \{x/\|x\|\}$.
Notar que por la hipótesis [A], \mathcal{C} es una familia ortonormal. Además, \mathcal{C} contiene a $\{e, f\}$, se sigue que $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$.

Finalmente, $\{e_i\}_{i \in I} \in \mathcal{C}$ y como $\{e_i\}_{i \in I}$ es un elemento maximal de \mathcal{A} , entonces

$$\mathcal{C} = \{e_i\}_{i \in I} \Rightarrow \Leftarrow$$

Así, se ha probado que existe $\{e_i\}_{i \in I}$ es una familia ortonormal maximal.

Lecture N° 5

Bases Hilbertianas

Caso particular: E espacio prehilbertiano separable

Ideas:

- Usar el principio del buen ordenamiento de \mathbb{N} para obtener un conjunto finito de vectores linealmente independientes.
- Aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt junto con el método de inducción matemática.

Proposición 11 Sea E un espacio prehilbertiano separable sobre \mathbb{K} , entonces toda familia ortonormal (maximal o no) es finita o infinita contable.

Demostración:

P.D. $\exists \psi: \{e_i\}_{i \in I} \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva $e_i \neq e_j \Rightarrow \frac{\psi(e_i) \neq \psi(e_j)}{k_i \neq k_j}$

Basta mostrar que existe $\psi: I \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva

Sean $i, j \in I$ tal que $i \neq j$ P.D. $k_i \neq k_j$

Como E es separable, existe $D \subseteq E$ numerable y denso en E .

Además, como D es numerable, existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow D$

$$n \mapsto \varphi(n)$$

Podemos considerar $D = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Así, para $e_i \in E$, existe d_{n_i} tal que

Así, para $e_i \in E$, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe d_{n_i} tal que

$$\|e_i - d_{n_i}\| < \varepsilon.$$

Definamos $\varphi: i \mapsto n_i$, donde i es el índice correspondiente a e_i y n_i es el índice correspondiente a d_{n_i} .

Veamos que φ es inyectiva.

Sea $i, j \in I$ tal que $i \neq j$. P.D. $n_i \neq n_j$ veamos que $d_{n_i} \neq d_{n_j}$.

¿ $d_{n_i} \neq d_{n_j}$ es posible que $n_i = n_j$? NO

Para ello, veamos que $\|d_{n_i} - d_{n_j}\| > 0$

$$\begin{aligned} \|e_i - e_j\| &= \|e_i + d_{n_i} - d_{n_j} + d_{n_j} - d_{n_i} - e_j\| \\ &\leq \|e_i + d_{n_i}\| + \|d_{n_i} - d_{n_j}\| + \|e_j - d_{n_j}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|d_{n_i} - d_{n_j}\| &\geq \|e_i - e_j\| - \|e_i + d_{n_i}\| - \|e_j - d_{n_j}\| \\ &> \|e_i - e_j\| - \varepsilon - \varepsilon \\ &= \|e_i - e_j\| - 2\varepsilon > 0 \end{aligned}$$

tomando $\varepsilon = \frac{\|e_i - e_j\|}{4} > 0$

$$\therefore \frac{\|e_i - e_j\|}{2} > 0$$

Pero como $\|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle e_i, e_j \rangle) + \|e_j\|^2 \quad \therefore \|d_{n_i} - d_{n_j}\| > 0 \Rightarrow n_i \neq n_j$ ■

Definición Sea H un espacio prehilbertiano sobre \mathbb{K} . Se dice que una familia $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ es una base de Hilbert (o base hilbertiana o ortonormal) si $\{e_i\}_{i \in I}$ es una familia ortonormal maximal de H tal que para todo $x \in H$ existe una única familia de escalares $\{d_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{K}$ tal que

$$x = \sum_{i \in I} d_i e_i$$

donde $\sum_{i \in I}$ es una suma generalizada.

Suma generalizada Sea E un espacio prehilbertiano sobre \mathbb{K} y $\{u_i\}_{i \in I}$ una familia en E . Se dice que la familia $\{u_i\}_{i \in I}$ es sumable con suma u , denotado por $\sum_{i \in I} u_i = u$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $S_0 \subseteq I$ finito tal que para todo $S \subseteq I$ con $S_0 \subseteq S$

$$\left\| u - \sum_{j \in S} u_j \right\| < \varepsilon$$

* Cuando $I = \mathbb{N}$ \Rightarrow suma generalizada \equiv convergencia de una serie

Teorema. Serie de Fourier en espacios de Hilbert separables Sean H un espacio de Hilbert sobre \mathbb{K} infinito dimensional separable con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia ortonormal maximal de H , entonces

1) $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Hilbert de H y para todo $x \in H$

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$$

(La serie dada se la conoce como serie de Fourier de x y a los coeficientes $\langle x, e_n \rangle$ se los denomina coeficientes de Fourier de x relativas a la base $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.)

2. Se verifica la identidad de Parseval

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

Demostración

• Etapa 1:

Supongamos que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base hilbertiana

$$(\forall x \in H) (\exists! \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ familia en } \mathbb{K}) \left(x = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n \right) \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n d_k e_k \quad [*]$$

P.D. $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_n = \langle x, e_n \rangle$

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

$$P_{\text{span}\{e_i\}_{i=1}^n} x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

Dado que $\text{span}\{e_i\}_{i=1}^n$ es un subespacio vectorial finito dimensional, se tiene que $\text{span}\{e_i\}_{i=1}^n \ni z$ por lo tanto, por el teorema de la proyección

$$\|x - P_{\text{span}\{e_i\}_{i=1}^n} x\| \leq \|x - z\| \quad \forall z \in \text{span}\{e_i\}_{i=1}^n$$

$$z = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$$

Por lo tanto, en particular, para $z = \sum_{i=1}^n d_i e_i$

$$\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^n d_i e_i\|$$

Por el teorema de estricción,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\| = 0$$

$$\therefore x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n \quad [**]$$

Por [*] y [**]

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$$

Dado que $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es única, entonces $d_n = \langle x, e_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$

• Notar que $\{\langle x, e_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de escalares que satisfacen [**]

Aprovechemos que $\sum_{n \in \mathbb{N}} d_n e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$, se sigue que

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n d_k e_k \quad x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n d_k e_k - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=1}^n (d_k - \langle x, e_k \rangle) e_k \right] = 0$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (d_n - \langle x, e_n \rangle) e_n = 0$$

como $0 \in H \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = 0$

$\langle (d_n - \langle x, e_n \rangle) e_n, (d_n - \langle x, e_n \rangle) e_n \rangle = 0 \quad \therefore \|d_n - \langle x, e_n \rangle\|_{n \in \mathbb{N}} = 0$

$\forall n \in \mathbb{N} : d_n = \langle x, e_n \rangle$

Etapa I

Cuando H es un espacio de Hilbert, sabemos que existe $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia ortonormal maximal

P.D. $(\forall x \in H) (x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n)$ P.D. $y = x$ ↓ Etapa 3

Consideremos $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en H .

P.D. $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en H .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m > n$ con $n, m \in \mathbb{N}$

$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$

$\left\| \sum_{k=m+1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \xrightarrow{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} 0$

$\left\langle \sum_{k=m+1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle \rightarrow 0$

$= \sum_{k=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} \langle e_k, e_j \rangle \xrightarrow{S_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}}$

$= \sum_{k=m+1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} = \sum_{k=m+1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$

$\therefore \|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$ coeficientes de Fourier P.D. $\sum_{k=m+1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$

obs. $n \rightarrow \infty : m$ -cola de una suc

$t_n = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$

Veamos que (t_n) es convergente.

Notar que $(t_n)_n$ es una sucesión creciente. Basta ver que $(t_n)_n$ es acotada superiormente

P.D. $(\exists K > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) (t_n \leq K)$

$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$

$= P_{\text{span}\{e_k\}_{k=1}^n} x \leq \|x\|^2$

Por lo tanto, gracias al teorema de convergencia monótona, $(t_n)_n$ es convergente. Así, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y como H es completo, entonces $(s_n)_n$ es convergente, digamos a $y \in H$.

ETAPA III P.D. $y = x$

Notar que $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$

$$\text{P.D. } x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \Leftrightarrow \quad \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle - \sum_{j=1}^n \overline{\langle x, e_j \rangle} \langle x, e_j \rangle + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle x, e_j \rangle \langle e_k, e_j \rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \rightarrow 0$$

$$\text{P.D. } \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \text{Identidad de Parseval}$$

Por lo realizado previamente

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

y por tanto, haciendo $n \rightarrow +\infty$, se sigue que

$$\|x\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad * \text{Desigualdad de Bessel}$$

$$\langle z, e_m \rangle = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow z = 0$$

Basta probar que $\langle y - x, e_m \rangle = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$\langle y - x, e_m \rangle = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n - x, e_m \right\rangle$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k - x, e_m \right\rangle$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_m \rangle - \langle x, e_m \rangle \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_m \rangle - \langle x, e_m \rangle \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\langle x, e_m \rangle - \langle x, e_m \rangle \right] = 0$$

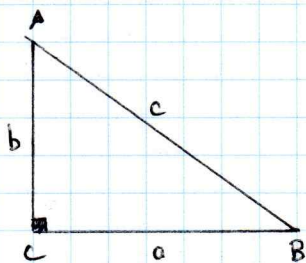
ETAPA IV

Dado que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$, entonces

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Leftrightarrow \left\| x \right\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

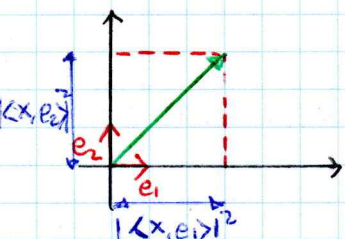
$$\therefore \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2$$



$$a \leq c \Leftrightarrow a^2 \leq c^2$$

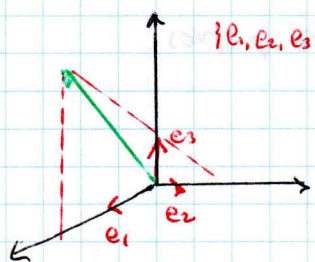
$$b \leq c \Leftrightarrow b^2 \leq c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow \text{Teo de pitágoras}$$



$$|\langle x, e_1 \rangle|^2 + |\langle x, e_2 \rangle|^2 = \|x\|^2$$

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$



$$|\langle x, e_1 \rangle|^2 + |\langle x, e_2 \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Observaciones

- 1) La desigualdad de Bessel es válida para cualquier espacio E con producto interno (completo o no).
- 2) $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$ es una base de Hilbert si y solo si $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la identidad de Parseval
- 3) Dada cualquier familia ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en cualquier espacio con producto interno E , se tiene que para todo $x \in E$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, e_n \rangle = 0$$

- 4) La identidad de Parseval puede verse como una versión infinito dimensional del teorema de Pitágoras

Análisis de Fourier

↳ estudiar los elementos básicos de una función
señales \rightarrow modeladas mediante funciones

Bases:

base formada por los vectores propios de una matriz

$$\mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow$ representación particular de x respecto a la base canónica

¿Un cambio de coordenadas provoca un cambio en la longitud de un vector? NO
Longitud de un vector es invariante bajo cambio de sistema de coordenadas

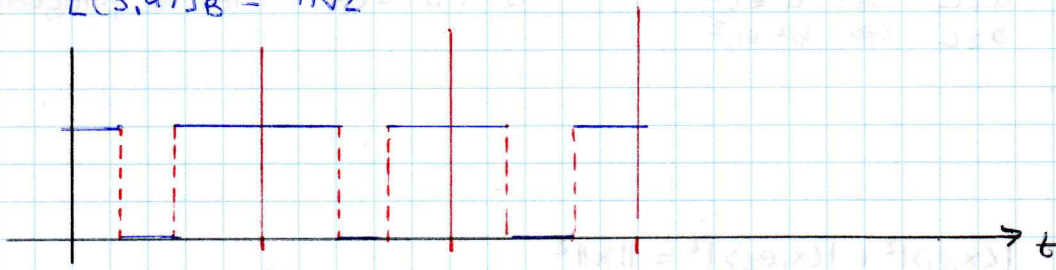
$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k \quad \{u_1, \dots, u_n\} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \underbrace{|\langle x, u_k \rangle|^2}_{u_k}$$

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1) \right\}$$

$$[(3, 4)]_B = 7/\sqrt{2}$$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(t) = \begin{cases} a & 0 \leq t < 1/3 \vee 2/3 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1/3 \leq t \leq 2/3 \end{cases}$$

f periódica de periodo 1

$$* T: H \rightarrow H$$

$$u \mapsto Tu$$

↳ asociado a los valores propios

$$Tu = \lambda u$$

Martes 14 de diciembre de 2021

Corrección Control 2

Pregunta 1. Sea H un espacio de Hilbert y M un subconjunto no vacío de H . Muestre que $M^{\perp\perp}$ es el subespacio vectorial más pequeño (en el sentido de la inclusión de conjuntos) que contiene a M .

$$P.D. (\forall F \text{ s.e.v. cerrado } M) (M \subseteq F \Rightarrow M^{\perp\perp} \subseteq F)$$

Sea F un s.e.v. cerrado en H tal que $M \subseteq F$

$$M \subseteq F \Rightarrow F^{\perp} \subseteq M^{\perp} \Rightarrow (M^{\perp})^{\perp} \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$$

demostrar

demostrar

Como H es un espacio de Hilbert, entonces $F = F^{\perp\perp}$. Así

$$M^{\perp\perp} \subseteq F$$

Pregunta 2. Muestre que todo conjunto no vacío y convexo y cerrado en un espacio de Hilbert posee un único elemento con la norma más pequeña.

Sea H un espacio de Hilbert y $M \neq \emptyset$ convexo y cerrado en H

$$P.D. (\exists! x_0 \in M) \|x_0\| \leq \|x\| \quad \forall x \in M \Leftrightarrow (\exists! x_0 \in M) \|x_0\| = \min\{\|x\| : x \in M\}$$

$$\Leftrightarrow (\exists! x_0 \in M) \|x_0 - 0\| = \min\{\|x - 0\| : x \in M\}$$

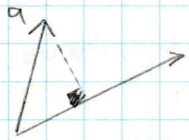
Si $0 \in M$, entonces $x_0 = 0$.

Si $0 \notin M$, entonces gracias al teorema de la proyección, existe un único $x_0 \in M$ tal que

$$\|x_0 - 0\| = \min_{x \in M} \|x - 0\|$$

Pregunta 3. Sean V un espacio vectorial de \mathbb{R}^n y $\{v_1, \dots, v_p\}$ una base de V con $p < n$. Halle la matriz proyección P_V de cualquier vector $a \in \mathbb{R}^n$ sobre V , donde P_V está en función de B con $B = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$\dim V = p$. Hallar una matriz P_V tal que $\forall a \in \mathbb{R}^n \quad P_V a = \text{proj}_V a$.

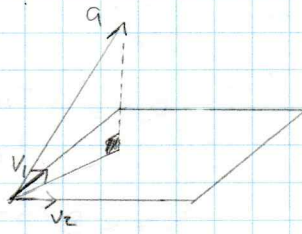


proj a
span{v}

Como \mathbb{R}^n es un espacio de Hilbert y V es un subespacio vectorial de dimensión finita de \mathbb{R}^n entonces por el teorema de la proyección, existe un único $b \in V$ tal que

$$b = \text{proj}_V a.$$

Idea: Caso \mathbb{R}^3



$$\text{proj}_V a = d_1 v_1 + d_2 v_2$$

$$= \text{span}\{v_1, v_2\}$$

$$= \frac{\langle a, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle a, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$= \frac{a^T v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle a, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$= \frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} a + \frac{v_2 v_2^T}{\|v_2\|^2} a$$

Esto es cierto si los vectores son ortogonales.

$$= \underbrace{\left(\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} + \frac{v_2 v_2^T}{\|v_2\|^2} \right)}_{P_V} a$$

Caso contrario, se debe usar Gram-Schmit.

Pero $P_V = f([v_1, v_2])$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$Ax = [v_1 | v_2 | \dots | v_p] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$= x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p \in C(A)$$

↳ Espacio columna
Espacio de todas las combinaciones lineales de las columnas de A .

$$y \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

$$yA = [y_1, \dots, y_n] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n \in F(A)$$

Para el caso del problema solicitado, se tiene que

$$P_V = \frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} + \dots + \frac{v_p v_p^T}{\|v_p\|^2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Notar que $\langle v_i, a - \text{proj}_V a \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$ (Caracterización de la proyección)

$$\begin{cases} v_1^T (a-b) = 0 \\ v_2^T (a-b) = 0 \\ \vdots \\ v_p^T (a-b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1^T (a - P_V a) = 0 \\ \vdots \\ v_p^T (a - P_V a) = 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{bmatrix} v_1^T (a - P_V a) \\ v_2^T (a - P_V a) \\ \vdots \\ v_p^T (a - P_V a) \end{bmatrix}_{p \times 1} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_p^T \end{bmatrix}_{p \times n} \begin{bmatrix} a - P_V a \\ \vdots \\ a - P_V a \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{p \times 1}$$

$$B^T = [v_1 | v_2 | \dots | v_p]^T$$

$$B^T [a - P_V a] = \vec{0}$$

$$B^T a - B^T P_V a = \vec{0}$$

Notemos que

$$P_V a \in \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$$

$$P_V a = d_1 v_1 + \dots + d_p v_p$$

$$Pv a = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = [v_1 | v_2 | \dots | v_p] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}$$

$$= B \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}$$

↑ incógnitas

$$B^T a - B^T B \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\underbrace{B^T B}_{\in \mathbb{R}^{p \times p}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = B^T \tilde{a} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$$

↑ vector de incógnitas

$B^T B$ es invertible $\Leftrightarrow B$ tenga todas sus columnas li.
($\text{rango}(B) = p$)

Proposición: $\ker(B^T B) = \ker(B)$.

Viernes, 15 de diciembre de 2021

Observación(*) Sean H un espacio de Hilbert separable y $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base Hilbertiana de H .

Si $x, y \in H$ son tales que sus coeficientes de Fourier son iguales, entonces $x = y$? Sí

$$\langle x, e_n \rangle = \langle y, e_n \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\langle x - y, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore x = y$$

* Si $(e_i)_{i \in I}$ y $(f_j)_{j \in J}$ son bases hilbertianas en un espacio de Hilbert H , entonces $\text{card}((e_i)_{i \in I}) = \text{card}((f_j)_{j \in J})$?

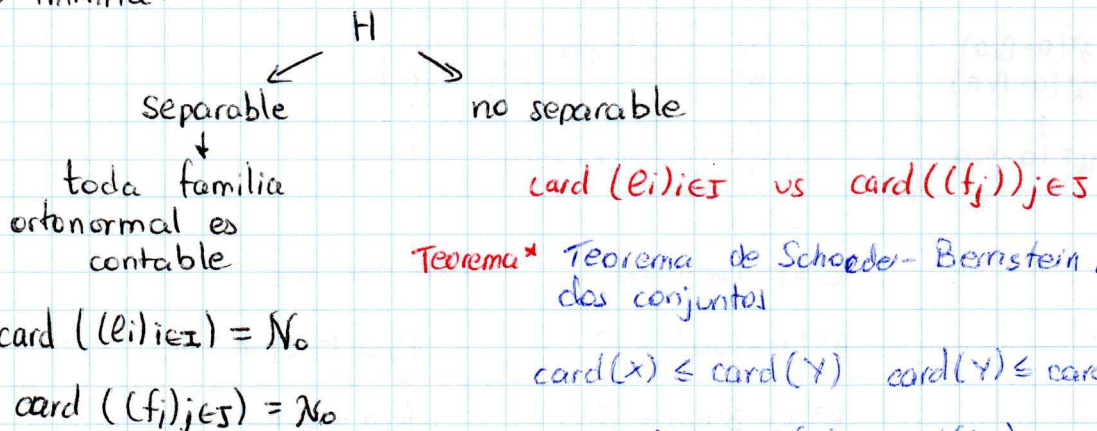
(a) $\dim(H) < +\infty$; las cardinalidades coinciden

base ortonormal
↑ algebraica

base hilbertiana
↑ asociada a la norma

En dimensión finita, las bases ortonormales son las bases hilbertianas.

(b) $\dim(H)$ infinita:



Teorema* Teorema de Schroeder-Bernstein, X, Y dos conjuntos

$$\text{card}(X) \leq \text{card}(Y) \quad \text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$$

$$\Rightarrow \text{card}(X) = \text{card}(Y)$$

La dimensión de un espacio de Hilbert es la cardinalidad de cualquier base de Hilbert

Resultado fundamental en análisis de Fourier

Consideremos la familia $\{e^{2\pi k i x}\}_{k \in \mathbb{N}}$ base hilbertiana para $L^2[0,1]$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

coeficientes de Fourier $\{ \cos(nx), \sin(nx) \}_{n \in \mathbb{N}}$

¿Cuál es el espacio de Hilbert asociado?

Espacio vectorial de las funciones Lebesgue cuadrado integrable

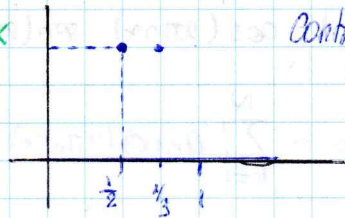
$$L^2(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty \}$$

$$\mathbb{R}^2(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty \}$$

Integral de Riemann

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$$

$$\langle f, f \rangle \geq 0$$



Contraejemplo

$$f = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \\ 1 & \text{si } x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \end{cases}$$

$f \in L^2[0,1] \Rightarrow f = \sum_{k \in \mathbb{K}} c_k e^{2\pi k i x}$, donde $c_k = \langle f, e^{2\pi k i x} \rangle$ $k \in \mathbb{K}$

$$\int_0^1 (e^{2\pi k i x})^2 dx = \int_0^1 e^{4\pi k i x} dx = \frac{e^{4\pi k i x}}{4\pi k i} \Big|_0^1 = \frac{e^{4\pi k i} - e^0}{4\pi k i}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (e^{2\pi k i x})^2 dx = \frac{1}{4\pi k i} [e^{4\pi k i} - 1]$$

Así, como

$$e^{4\pi k i} = \cos(4\pi k) + i \sin(4\pi k)$$

Jueves, 16 de diciembre de 2021

Sobre la esfera unitaria a valores complejos se identifica con el espacio vectorial de las funciones definidas sobre \mathbb{R} a valores complejos

f es periódica de periodo 1 \Rightarrow existe $F: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} f(x+1) &= F(e^{2\pi i(x+1)}) = F(e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i}) \\ &= F(e^{2\pi i x}) = f(x) \end{aligned}$$

f periódica de periodo $2\pi \Rightarrow$ existe $F: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(x) = F(e^{ix})$

$$f(x+2\pi) = F(e^{(x+2\pi)i}) = F(e^{ix} \cdot e^{2\pi i}) \\ = F(e^{ix}) = f(x)$$

f periódica de periodo $2\pi \Rightarrow \exists F: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que
 $f(x) = F(e^{\frac{2\pi i}{2}x})$

* f es periódica de periodo 1:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)$$

$$L^2(0,1) = \{ f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C} : \int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty, f \text{ es } 1\text{-periódica} \}$$

Las funciones con 1-periodica solo pueden representarse con funciones 1-periodicas.

$$(*) \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

$L^2(0,1)$ con el producto interno (*) es un espacio de Hilbert

$$\{ 1, \cos(2\pi n x), \sin(2\pi n x) \}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$f \in L^2(0,1) : a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(2\pi k x) + b_k \sin(2\pi k x)$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow f(x) \\ N \rightarrow +\infty \end{array}$$

Para que la convergencia sea cierta, basta ver que $\{ 1, \cos(2\pi n x), \sin(2\pi n x) \}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Hilbert de $L^2(0,1)$

$$a_0 + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(2\pi k x) + b_k \sin(2\pi k x)] = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi k x i}$$

Gracias a la identidad anterior, basta ver que $\{ e^{2\pi k x i} \}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base Hilbertiana de $L^2(0,1)$.

Se debe probar que $\{ e^{2\pi k x i} \}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una familia ortonormal maximal

$$\langle f, e^{2\pi k i} \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow f = 0$$

Sabemos que

$$\int_0^1 f(x) e^{-2\pi k x i} dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

↓
expresar mediante funciones sencillas.

↳ Demostrar $\overline{\text{span}\{e^{2\pi k i}\}}$ es denso en $L^2(0,1)$

$$\overline{\text{span}\{e^{2\pi k i}\}_{k \in \mathbb{Z}}} = L^2(0,1).$$

$f \in L^2(0,1)$ P.D. $\exists \left(\sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi k x i} \right)$ que converge a f en $L^2(0,1)$

* $C([0,1])$ es denso en $L^2(0,1)$

* Basta probar que $\text{span} \{e^{2\pi i k x}\} = C([0,1])$ ~~X~~

Lunes, 20 de diciembre de 2021

CAPITULO 2: TEOREMAS FUNDAMENTALES

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^{n \times 1} : Ax = b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto \varphi(n) = x_n$$

$$x \in \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\downarrow \\ x^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

elemento dual de x vector fila.

$$\varphi_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \varphi_x(y)$$

$$= x^T y$$

Teorema de Hahn-Banach

Motivación Sea E un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{K}

- ¿Es el espacio dual-algebraico de E no vacío? Sí, basta considerar el funcional lineal nulo.
- ¿Existe un funcional $\varphi: E \rightarrow \mathbb{K}$ lineal no nulo sobre \mathbb{K} ?
- 1) E , espacio vectorial de dimensión finita. Existen funcionales lineales no nulos definidos sobre cualquier espacio vectorial no nulo de dimensión finita.

En efecto, sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base para el espacio vectorial no nulo E de dimensión n .

Para cualquier $k \in \{1, \dots, n\}$ fijo, se define el funcional

$$\varphi_k: E \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{tal que} \quad \varphi_k(v_i) = \delta_{ik}$$

donde δ_{ik} es la delta de Kronecker.

Para todo $x \in E$, existe un único conjunto de escalares $\{d_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^n d_i v_i$$

Por extensión lineal, se extiende φ_k a todo elemento de E : para cada $x \in E$.

$$\varphi_k(x) = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} d_i \varphi_k(v_i)$$

Notemos que φ_k es un funcional lineal no trivial sobre E .

2) E , espacio vectorial de dimensión infinita. (Uso del lema de Zorn)

Considere F un ^{sub}espacio vectorial no nulo de E . ¿Es posible extender un funcional lineal no nulo sobre F a todo el espacio vectorial E sin que se pierda la linealidad?

Ahora, sea E un espacio normado.

- ¿Existen funcionales lineales continuos en E ?

$F \neq \{0\}$ $\varphi: F \rightarrow \mathbb{K}$ lineal no nulo $\Psi: E \rightarrow \mathbb{K}$ lineal no nulo y $\Psi|_F = \varphi$

- ¿Existen funcionales lineales continuos no nulos sobre E ?
- ¿Es posible extender de manera lineal y continua, un funcional lineal continuo sobre un subespacio vectorial a todo el espacio de E ?

Martes, 21 de diciembre de 2021

Definición Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Decimos que $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional sublineal si satisface las siguientes propiedades

- 1) Para todo $\lambda > 0$ y para todo $x \in E$: $p(\lambda x) = \lambda p(x)$,
- 2) Para todo $x, y \in E$: $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Observación: Note que

- 1) Todo funcional lineal $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional sublineal
- 2) Toda seminorma es un funcional sublineal. Recuerde que una seminorma sobre un espacio vectorial E de campo \mathbb{K} es una función $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:
 - $\varphi(u) \geq 0$ para todo $u \in E$
 - $\varphi(0) = 0$
 - $\varphi(\lambda u) = |\lambda| \varphi(u)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $u \in E$.
 - $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$ para todo $u, v \in E$.

Así, toda norma es una seminorma y por tanto, toda norma es un funcional sublineal.

Ejemplos:

- Sean E un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal. La función definida por $p(x) = |f(x)|$ es una seminorma de E .

- La función

$$p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto p(x, y) = |x| + y$$

es un funcional sublineal que no es una norma ni seminorma.

Teorema Hahn-Banach (Forma analítica-algebraica)

Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , F un subespacio vectorial de E y $g: F \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal tal que

$$\begin{cases} \theta(x) \leq p(x) & \forall x \in F \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \operatorname{Re}(\theta(x)) \leq p(x) & \forall x \in F \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

donde p es un funcional sublineal sobre E . Entonces, ^{existe} $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal tal que

1) $f|_F = g$

2)

$$\begin{cases} f(x) \leq p(x) & \forall x \in E \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \operatorname{Re}(f(x)) \leq p(x) & \forall x \in E \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Demostración

Etapa 1: Extender el funcional a un subespacio vectorial con una dimensión adicional.
Supongamos que $E \neq F$. Para $z \in E \setminus F$, se define el siguiente subespacio vectorial

$$F_z = \{ y + tz : y \in F, t \in \mathbb{R} \}$$

- Todo elemento de F_z se escribe de forma única
- F_z es un subespacio vectorial

Se define

$$f: F_z \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y + tz \mapsto g(y) + t\alpha$$

lineal, extensión, dominado por p

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante a precisar más adelante para que f sea lineal y tenga las propiedades de extensión deseadas.

Notar que se necesita que

$$f(y + tz) \leq p(y + tz), \quad \forall y \in F, \forall t \in \mathbb{R}$$

Esta última desigualdad es equivalente a

$$g(y) + t\alpha \leq p(y + tz), \quad \forall y \in F, \forall t \in \mathbb{R}$$

Para ello debemos analizar los siguientes casos

$t=0$: Se cumple independientemente del valor de α pues

$$g(y) \leq p(y), \quad \forall y \in F.$$

• $t > 0$: Dividiendo la desigualdad para t , se sigue que

$$g\left(\frac{y}{t}\right) + \alpha \leq p\left(\frac{y}{t} + z\right) \quad \forall y \in F.$$

Luego, definiendo $u = y/t \in F$, se tiene que

$$g(u) + \alpha \leq p(u + z), \quad \forall u \in F,$$

lo que implica que

$$\alpha \leq p(u + z) - g(u), \quad \forall u \in F.$$

• $t < 0$: Dividiendo la desigualdad para $-t$ y realizando un desarrollo análogo al anterior, se sigue que

$$\alpha \geq g(v) - p(v - z), \quad \forall v \in F$$

Luego, se sigue que

$$g(v) - p(v - z) \leq \alpha \leq p(u + z) - g(u), \quad \forall u, v \in F.$$

Para que se verifique lo anterior, debe cumplirse que

$$g(v) - p(v - z) \leq p(u + z) - g(u) \quad \forall u, v \in F.$$

Sean $u, v \in F$, se tiene que

$$\begin{aligned} g(u) + g(v) &= g(u + v) \\ &\leq p(u + v) \leq p(u + z) + p(v - z), \end{aligned}$$

lo que muestra lo requerido.
Así, tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{v \in F} \{g(v) - p(v-z)\} \leq \alpha \leq \inf_{u \in F} \{p(u+z) - g(u)\},$$

se tiene que f está dominado por p , es lineal y es una extensión de g a F_z .

Etapas 2: Extender el funcional a todo el espacio E mediante el lema de Zorn.

Se define

$$\Omega := \left\{ (Z, L_Z) : \begin{array}{l} Z \text{ es un subespacio vectorial de } E \text{ tal que } F \subseteq Z \\ L_Z : Z \rightarrow \mathbb{R} \text{ es lineal} \\ L_Z|_F = g \\ \forall x \in Z: L_Z(x) \leq p(x) \end{array} \right\},$$

y la siguiente relación de orden parcial sobre Ω

$$(Z_1, L_{Z_1}) \leq (Z_2, L_{Z_2}) \quad \text{si y solo si} \quad Z_1 \subseteq Z_2 \quad \text{y} \quad L_{Z_2}|_{Z_1} = L_{Z_1}$$

- Ω es no vacío
- Todo conjunto totalmente ordenado de Ω , $\{(Z_i, L_{Z_i})\}_{i \in I} \subseteq \Omega$, posee una cota superior. En efecto, considere $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$ y

$$L_Z : Z \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto L_{Z_i}(x), \quad \text{con } x \in Z_i.$$

Z es un subespacio vectorial de E , L está bien definida, es decir, la definición de L no depende del índice elegido y $(Z, L_Z) \in \Omega$ es cota superior de $\{(Z_i, L_{Z_i})\}_{i \in I}$.

Luego, por el lema de Zorn posee al menos un elemento maximal $(\hat{Z}, L_{\hat{Z}})$

Finalmente, notar que $Z = E$ pues si no, es posible encontrar un par $(W, L_W) \in \Omega$ tal que $(\hat{Z}, L_{\hat{Z}}) < (W, L_W)$, lo que contradice que $(\hat{Z}, L_{\hat{Z}})$ es un elemento maximal de Ω .

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Idea: Usar el teorema de Hahn-Banach caso real

Notar que g es un funcional \mathbb{C} -lineal representado por

$$g : F \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto g(x) = g_1(x) + i g_2(x),$$

donde $g_1, g_2 : F_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ son funcionales \mathbb{R} -lineales. Además, por hipótesis, se sabe que

$$g_1(x) \leq p(x) \quad \forall x \in F_{\mathbb{R}},$$

y así, por el T-HB caso real, existe $f_1 : E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ funcional \mathbb{R} -lineal tal que

- $f_1|_{F_{\mathbb{R}}} = g_1$
- $f_1(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E_{\mathbb{R}}$.

Ahora, como para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\text{Im}(z) = -\text{Re}(iz)$$

se define el siguiente funcional

$$f: E \rightarrow \mathbb{C}$$
$$x \mapsto f(x) := f_1(x) - if_2(x).$$

Notar que f es \mathbb{R} -lineal y puesto que de la definición misma de f se tiene que $f(ix) = if(x)$ para todo $x \in E$, entonces f es \mathbb{C} -lineal. Además, claramente $f|_F = g$ y $\operatorname{Re}(f(x)) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Lunes, 3 de Enero de 2022.

Corolario. Dados E un espacio normado sobre \mathbb{K} , F un subespacio vectorial de E y $g \in F^*$, existe $f \in E^*$ tal que

- 1) $f|_F = g$
- 2) $\|f\|_{E^*} = \|g\|_{F^*}$

Como $g \in F^*$, entonces

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \|g\|_{F^*} \|x\| \\ \Rightarrow \frac{-\|g\|_{F^*} \|x\|}{p(x)} &\leq g(x) \leq \frac{\|g\|_{F^*} \|x\|}{p(x)} \\ \Rightarrow -p(x) &\leq g(x) \leq p(x). \end{aligned}$$

Demostración: Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Se define

$$p: E \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto p(x) = \|g\|_{F^*} \|x\|$$

- p es una seminorma
- $|g(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in F$.

Por el teorema de HB caso real, existe $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, tal que

$$f|_F = g \quad f(x) \leq p(x) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} f(x) &\leq p(x) \quad \forall x \in E \\ \Rightarrow f(x) &\leq \|g\|_{F^*} \|x\| \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

$$f \text{ es acotado} \Leftrightarrow |f(x)| \leq c \|x\| \quad \forall x \in E$$
$$\Leftrightarrow -c \|x\| \leq f(x) \leq c \|x\| \quad \forall x \in E$$

Como E es un subespacio vectorial, si $x \in E$, entonces $-x \in E$ y así

$$f(-x) \leq \|g\|_{F^*} \|x\| \Rightarrow -f(x) \leq \|g\|_{F^*} \|x\| \Rightarrow -\|g\|_{F^*} \|x\| \leq f(x)$$

De donde, se sigue que

$$\therefore |f(x)| \leq \|g\|_{F^*} \|x\| \quad \forall x \in E.$$

Además

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|g\|_{F^*} \quad \forall x \in E$$
$$\Rightarrow \|f\|_{E^*} \leq \|g\|_{F^*}.$$

$$\|g\|_{F^*} = \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{|g(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|_{E^*}$$

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Se puede probar el funcional p es una seminorma, entonces existe $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ lineal

$$g \in F^* \Leftrightarrow |g(x)| \leq \|g\| \|x\|$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(g(x)) \leq p(x) \quad \forall x \in E \Rightarrow \operatorname{Re}(f(x)) \leq p(x) \quad \forall x \in E$$

\downarrow
 $|f(x)| \leq p(x)$ solo cuando p es una seminorma

Terminar los detalles de la demostración.

Corolario. Sea E un espacio normado sobre \mathbb{K} $\operatorname{span}\{x\}$, s.e.v. más pequeño que contiene a x .

$$(\forall x \in E) (\exists f \in E^*) (f(x) = \|x\|^2 \text{ y } \|f\|_{E^*} = \|x\|)$$

Dado $x \in E$, hallar $f \in E^*$ tal que $f(x) = \|x\|^2$

Demostración: Si $x=0$, entonces tomando $f=0$ verifica el resultado.

Si $x \neq 0$, consideramos $F = \operatorname{span}\{x\}$ y se define

$$g: F \rightarrow \mathbb{K} \\ \alpha x \mapsto g(\alpha x) = \alpha \|x\|^2$$

$$g: F \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = \|x\|^2 \\ g(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha g_1 + \beta g_2$$

g está bien definida es lineal y acotada. Por el teorema de HB forma analítica topológica, existe $f \in E^*$ tal que

$$f|_F = g \quad \|f\|_{E^*} = \|g\|_{F^*} \quad \forall x \in A \exists y \in B \neq \exists x \in A \forall y \in B$$

Para mostrar que g es acotado p.d. $|g(y)| \leq C \|y\|$

$$|g(\alpha x)| = |\alpha| \|x\|^2 = |\alpha| \|x\| \|x\| = \frac{\|x\|}{C} \|\alpha x\| = C \|\alpha x\|$$

así, tomando $y = \alpha x \in \operatorname{span}\{x\}$,

$$|g(y)| \leq C \|y\| \quad \forall y \in F$$

$$f \text{ es acotada } \Leftrightarrow \exists C > 0 \forall x \in A \quad |f(x)| \leq C \|x\|$$

\uparrow
 $\|x\|$

Así, $|g(y)| = \|x\| \|y\|$, si $y \neq 0 \Rightarrow |g(y)| / \|y\| = \|x\|$, tomando el supremo, se sigue que

$$\|g\|_{F^*} = \|x\|$$

Además, como $x \in F$,

$$f(x) = f(1 \cdot x) = g(1 \cdot x) = \|x\|^2$$

Observación: la unicidad del funcional $f \in E^*$ asociado a un elemento $x \in E$, se tiene cuando E^* es un espacio estrictamente convexo, es decir, si para cualesquiera $f_1, f_2 \in E^*$ de norma unitaria y para todo $\lambda \in]0, 1[$

$$\|\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2\|_{E^*} < 1$$

$$x \in F \Leftrightarrow \text{def } f(x) = \|x\|^2 \wedge \|f\| = \|x\|$$

$$F = \{ f \in E^* : f(x) = \|x\|^2 \wedge \|f\| = \|x\| \} = F(x)$$

$F \neq \emptyset$ por THB. Si E^* es estrictamente convexo, entonces $x \in F \Leftrightarrow F = \{f\}$

$$\Psi: x \in E \mapsto f \in E^*$$

E^* estrictamente convexo $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall f_1, f_2 \in E^*, \text{ con } \|f_1\| = \|f_2\| = 1) (\forall \lambda \in]0, 1[) (\|(1-\lambda)f_1 + \lambda f_2\| < 1)$

A es convexo $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A) (\forall \lambda \in [0, 1]) ((1-\lambda)x + \lambda y \in A)$

En un espacio normado $B(x, r)$ es convexo

$$u, v \in B(x, r) \text{ y } \lambda \in [0, 1] \quad \text{¿} (1-\lambda)u + \lambda v \in B(x, r) \text{?}$$

$$\|(1-\lambda)u + \lambda v - x\| = \|u - x + \lambda(v - u)\|$$

$$\leq \|u - x\| + \lambda \|v - u\|$$

$$< r + \lambda$$

$$\|(1-\lambda)u + \lambda v - x\| = \|(1-\lambda)u + \lambda v - [(1-\lambda)x + \lambda x]\|$$

$$\leq (1-\lambda)\|u - x\| + \lambda\|v - x\|$$

$$< (1-\lambda)r + \lambda r = r. \quad \text{Así, la bola abierta es convexa.}$$

$B(x, r)$ es convexa $\Leftrightarrow (\forall u, v \in B(x, r)) (\forall \lambda \in [0, 1]) ((1-\lambda)u + \lambda v \in B(x, r))$
 $\|u - x\| \leq r$
 $\|v - x\| \leq r$
 $\|(1-\lambda)u + \lambda v - x\| < r.$

E^* es estrictamente convexo $\Leftrightarrow (\forall f_1, f_2 \in S(0, 1)) (\forall \lambda \in]0, 1[) ((1-\lambda)f_1 + \lambda f_2 \in B(0, 1))$

\Leftrightarrow Bola cerrada $B(0, 1)$ es estrictamente convexa

Miércoles 5 de enero de 2021

(a combinación convexa pertenece al interior)

Ejemplos de espacios normados con dual topológico estrictamente convexo.

• H espacio de Hilbert

• $L^p(\Omega) = \{ [f] : f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |f(x)|^p dx(x) < +\infty \}, 1 < p < +\infty$

Los espacios pre-hilbertianos también son estrictamente convexos pero no se puede asegurar que su dual lo sea.

Ejemplo de un espacio normado cuyo dual topológico no es estrictamente convexo.

• (ℓ^1) no es estrictamente convexo.

* $(\ell^1)^* = \ell^\infty$

$$\ell^1 = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_n |x_n| < +\infty \}, \|(x_n)\|_{\ell^1} = \sum_n |x_n|$$

$$\ell^\infty = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \}, \|(x_n)\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

$(\ell^1)^*$ no es estrictamente convexo.

↳ para probar esto, negamos la definición

$$(1, 1, 0, 0, \dots) \in (\ell^1)^*$$

$$(1, 0, 0, 0, \dots) \in (\ell^1)^*$$

$$\|(1, 1, 0, 0, \dots)\|_{(\ell^1)^*} = 1$$

$$\|(1, 0, 0, 0, \dots)\|_{(\ell^1)^*} = 1$$

Sea $\lambda \in (0, 1)$

$$\|(1-\lambda)(1, 1, 0, 0, \dots) + \lambda(1, 0, 0, 0, \dots)\|_{(\ell^1)^*} = \|(1, 1-\lambda, 0, 0, \dots)\|_{(\ell^1)^*} = 1.$$

Por lo tanto, $(\ell^1)^*$ no es estrictamente convexo.

Observación: Los espacios estrictamente convexos se pueden ver como espacios intermedios entre los espacios pre-hilbertianos o espacios con producto escalar y los espacios normados.

Supongamos que existen $f, g \in F(x)$, distintos, entonces

$$f(x) = \|x\|^2 = g(x) \quad \|f\|_{E^*} = \|g\|_{E^*} = \|x\| = \|g\|_{E^*}$$

Como el espacio es estrictamente convexo, podemos considerar

$$\|f\|_{E^*} = \|x\| = \|g\|_{E^*} = 1$$

Sea $\alpha \in]0, 1[$, entonces

$$\begin{aligned} (1-\alpha)f(x) + \alpha g(x) &= [(1-\alpha)f + \alpha g](x) \leq \|(1-\alpha)f + \alpha g\|_{E^*} < \|x\| \\ &= (1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha\|x\|^2 & \therefore 1 < 1 \Rightarrow \text{contradicción} \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

\therefore Así, $f \in E^*$ es el único funcional que está en la dualidad de x .

Corolario: Sea E un espacio normado sobre \mathbb{K} . Para todo $x \in E$, se cumple que

$$\|x\|_E = \max_{\substack{f \in E^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E^*}}$$

Demostración.

Si $x=0$, entonces

$$\|x\|_E = 0 \quad \text{y} \quad |f(x)| = |f(0)| = 0.$$

Por lo tanto, se cumple la relación buscada

$$\left\{ \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E^*}} : f \in E^*, f \neq 0 \right\} = \mathbb{R} \quad \text{Por el axioma del supremo, el conjunto posee supremo}$$

Por otro lado, para todo $f \in E^*$ no nulo, se tiene que

$$|f(x)| \leq \|f\|_{E^*} \|x\|_E.$$

Así, por (*)

$$\sup_{\substack{f \in E^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E^*}} \leq \|x\|_E$$

Por otro lado, existe $g \in E^*$ tal que

$$g(x) = \|x\|_E^2 \quad \text{y} \quad \|g\|_{E^*} = \|x\|_E,$$

así, como $x \neq 0$ y $g \neq 0$, Por lo tanto, hemos encontrado $g \in E^*$ no nulo tal que

$$\frac{|g(x)|}{\|g\|_{E^*}} = \|x\|_E$$

lo que indica que se alcanza el supremo, es decir, el máximo y que es igual a $\|x\|_E$.

Forma geométrica del teorema de Hahn-Banach.

Interpretación geométrica de los espacios duales.

Definición: Sean E un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , f un funcional lineal no nulo sobre E y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se dice que $H \subseteq E$ es un hiperplano si

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} : H = [f = \alpha] := \{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} : H = [\operatorname{Re}(f) = \alpha] := \{x \in E : \operatorname{Re}(f)(x) = \alpha\}$$

Definición Sean $A, B \subseteq E$ no vacíos disjuntos. Sean, además, f un funcional no nulo sobre E y $\alpha \in \mathbb{R}$, los cuales definirán un hiperplano H

lineal
 Todo funcional complejo se determina por su parte real
 $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Re}(iz)$

1) H separa A y B si

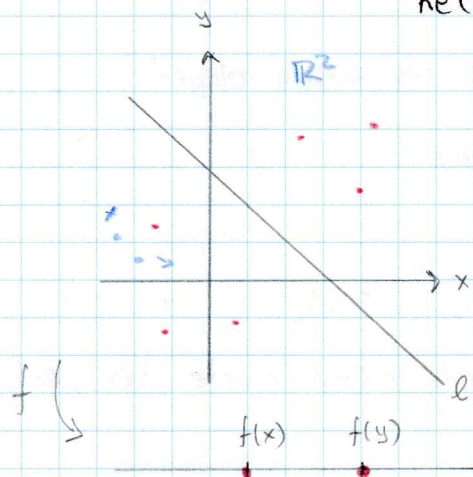
$$f(a) \leq \alpha \leq f(b) \quad \forall (a,b) \in A \times B$$

$$\operatorname{Re}(f)(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re}(f)(b) \quad \forall (a,b) \in A \times B.$$

2) H separa estrictamente A y B si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(a) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(b) \quad \forall (a,b) \in A \times B$$

$$\operatorname{Re}(f)(a) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq \operatorname{Re}(f)(b) \quad \forall (a,b) \in A \times B.$$



$$l : ax + by = c$$

$$f(x, y) = ax + by = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{a}^T \vec{x}$$

* Los elementos de E^* permiten separar puntos de E .

$$x \neq y \text{ en } E \Rightarrow \text{Existe } f \in E^* \text{ tal que } f(x) \neq f(y)$$

Lunes, 10 de enero de 2021

Corrección del control

Sea H un espacio de Hilbert separable. Sin hacer uso del Lema de Zorn, muestre que H posee una base ortonormal contable.

P.D. $\exists \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ familia ortonormal maximal en H tal que

$$\overline{\operatorname{span} \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}} = H$$

Como H es separable, entonces existe $D = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ denso en H .

① Si D es ortonormal, entonces D es una base ortonormal contable pues

$$\overline{D} = H \Rightarrow \overline{\operatorname{span} D} = H$$

② Si D no es ortonormal, entonces D podría incluso no ser l.i.

$$S = \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}$$

Por el principio del buen ordenamiento, S posee mínimo, denotémoslo por $i_1 = \min(S)$. Así, definamos $z_1 = x_{i_1}$, luego,

$$\operatorname{span} \{z_1\} = \operatorname{span} \{x_{i_1}, x_2, \dots, x_{i_1}\}$$

Sea $T_1 = \{i \in \mathbb{N} : z_1 \text{ y } x_i \text{ son l.i.}\} \subseteq \mathbb{N}$ y no vacío.

$$\forall i, j \in \mathbb{N}$$

$$\text{Por absurdo, } (\forall i \in \mathbb{N}) (\exists d_i \neq 0) (z_1 = d_i x_i) \Rightarrow d_i x_i = d_j x_j \Rightarrow x_i = \frac{d_j}{d_i} x_j$$

$$\text{span}\{D\} = \text{span}\{x_i\}$$

$$\text{span}\{D\} = H = \text{span}\{x_i\} = \text{span}\{x_i\}$$

Así, se concluye que H es de dimensión finita; pero esto es absurdo. Así, T_1 es no vacío.

Por el principio del buen ordenamiento, existe $i_2 = \min T_1$ así, definamos $z_2 = x_{i_2}$.

Notemos que así

$$\text{span}\{z_1, z_2\} = \text{span}\{x_{i_1}, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_2}\}.$$

Nuevamente, definamos $T_2 = \{i \in \mathbb{N} : z_2 \text{ y } x_i \text{ son l.i.}\}$ y por el PBO, existe $i_3 = \min T_2$,

$$\text{span}\{z_1, z_2, z_3\} = \text{span}\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_2}, \dots, x_{i_3}\}.$$

como se analizó previamente T_2 es no vacío. Inductivamente, es posible elegir

$$\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \quad \text{linealmente independientes}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{span}\{z_1, \dots, z_n\} = \text{span}\{x_{i_1}, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_2}, \dots, x_{i_3}, \dots, x_{i_n}\}.$$

Por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmit, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal tal que

$$\text{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \text{span}\{z_1, \dots, z_n\}.$$

$$\text{span}\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \text{span} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z_1, \dots, z_n\} = \text{span}\{z_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Finalmente,

$$\text{span}\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \text{span}\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$$

$$= \text{span}\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$$

$$= \text{span } D$$

$$\overline{\text{span}\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}} = \overline{\text{span } D} = H$$

Así, por definición, hemos probado que H posee una base ortonormal maximal.

Ejercicio: Sea H un espacio de Hilbert sobre un campo \mathbb{K} y $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ una familia ortonormal en H .

a) Muestre que dados cualquier subfamilia infinita contable $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}}$, digamos $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y cualquier familia de escalares $\{d_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{K})$, entonces la serie

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} d_j u_j$$

es convergente.

Definamos

$$s_n = \sum_{j=1}^n d_j u_j$$

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en H , lo que implica que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en H .

b) Considere $u \in H$ cualquiera pero fijo y $d_\theta = \langle u, u_\theta \rangle$.
Muestre que para cualquier $J \subseteq I$ contable

$$\sum_{\theta \in J} |d_\theta|^2 \leq \|u\|^2$$

Definamos $J = \{\theta_k : k \in \mathbb{N}\}$

$$\left\| u - \sum_{j=1}^n \langle u, u_{\theta_j} \rangle u_{\theta_j} \right\|^2$$

$$\begin{aligned} &= \|u\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle u, \sum_{j=1}^n d_{\theta_j} u_{\theta_j} \rangle + \sum_{j=1}^n |d_{\theta_j}|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2 \sum_{j=1}^n |d_{\theta_j}|^2 + \sum_{j=1}^n |d_{\theta_j}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^n |d_{\theta_j}|^2 \leq \|u\|^2$$

Por teorema de convergencia $\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} |d_{\theta_j}|^2 \leq \|u\|^2$
monótona.

ii) Muestre p que para cualquier $m \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$J_m := \{\theta \in I : |d_\theta| \geq 1/m\}$$

es finito.

Sea $m \in \mathbb{N}$ y consideremos $\{\theta_1, \dots, \theta_p\} \subseteq J_m$
 $|d_{\theta_j}|^2 \geq 1/m^2$

y

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p |d_{\theta_j}|^2 &\leq \|u\|^2 \\ &\geq \sum_{j=1}^p \frac{1}{m^2} \end{aligned}$$

$$\therefore p/m^2 \leq \|u\|^2 \Rightarrow p \leq m^2 \|u\|^2$$

$\therefore \operatorname{card} \{\theta_1, \dots, \theta_p\} \leq m^2 \|u\|^2$. Por lo tanto, J_m es finito.

iii) Justifique por qué de los numerales anteriores, el conjunto

$$\underbrace{\{\theta \in I : d_\theta \neq 0\}}_{S_m} = I(u)$$

es a lo más contable.

$$\{\theta \in I : d_\theta \neq 0\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\{\theta \in I : |d_\theta| \geq 1/m\}}_{J_m}$$

\uparrow basado en la propiedad arquimediana.

$\therefore \{\theta \in I : d_\theta \neq 0\}$ es contable.

$$\sum_{\theta \in I} d_\theta u_\theta = \sum_{\theta \in I(u)} d_\theta u_\theta \leq \|u\|^2 \quad \text{Desigualdad de Bessel.}$$

Hartes, 11 de enero de 2022.

Definición:

$\{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ y $\{x \in F : f(x) \geq \alpha\}$ son denominadas semiespacios cerrados y los conjuntos

$\{x \in E : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in F : f(x) > \alpha\}$ son denominadas semiespacios abiertos

Ejemplo: Considere $A = \{(x_n) \in C_{00} : x_n \geq 0\}$, con $\alpha = \max \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$ y $B = \{0\}$

A y B son conjuntos convexos y disjuntos
 sin embargo no es posible separar A y B mediante un hiperplano
 En efecto, razonando por contradicción y sin pérdida de generalidad, supongamos que existe
 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ funcional lineal no nulo tal que

$$f(\{x_k\}) \geq 0 \quad \text{para todo } \{x_k\} \in A.$$

* Notemos que A es convexo pues tomando $\{x_n\}$ y $\{y_n\} \in A$, entonces

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{k_1} > 0 \text{ y } x_m = 0 \quad \forall m > k_1, \text{ y } \exists k_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } y_{k_2} > 0 \text{ y } y_k = 0 \quad \forall k > k_2$$

$$\text{spg si } k_1 > k_2 \quad z_{k_1} = \frac{(1-\lambda)x_{k_1}}{\lambda} \quad \therefore \{z_n\} \in A$$

Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$, $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$. Notar que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin A$, con

lo cual $f(e_n) \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún como, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para $n \in \mathbb{N}$

$\lambda e_n + e_{n+1} \in A$, entonces $f(\lambda e_n + e_{n+1}) \geq 0$. Esto implica que

$$\lambda f(e_n) + f(e_{n+1}) \geq 0 \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $f(e_n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y esta desigualdad debe ser válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se sigue que $f(e_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $f = 0$ lo que es una contradicción. pues se requiere por hipótesis que f sea no nulo.

Proposición: Un hiperplano $H = [f = \alpha]$ (o $H = [Re(f) = \alpha]$) es cerrado en E si y solo si f es continua (i.e. $f \in E^*$)

Demostración (Caso $\|k\| = \mathbb{R}$)

\Leftarrow) Puesto que $\{\alpha\}$ es cerrado en \mathbb{R} y f es continua, se tiene que $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ es cerrado en E.

\Rightarrow) Supongamos que H es cerrado en E. Debemos mostrar que existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c \|x\|$ para todo $x \in E$

Como $E \setminus H$ es un abierto de E, para $x_0 \in E \setminus H$, entonces existe $R > 0$ tal que $B(x_0, R) \subseteq E \setminus H$.

Como $f(x_0) \neq \alpha$, sin pérdida de generalidad podemos considerar que $f(x_0) < \alpha$.

Notar que es suficiente probar que

$$f(x) < \alpha \quad \text{para todo } x \in B(x_0, R).$$

* Supongamos que $f(x) < \alpha \quad \forall x \in B(x_0, R)$. Sea $x \in B(x_0, R) = \{x_0\} + RB(0, 1)$. Existe $z \in B(0, 1)$

$$\text{tal que } x = \{x_0\} + Rz \quad \alpha > f(x) = f(x_0 + Rz) = f(x_0) + Rf(z)$$

$$\Rightarrow f(z) < (\alpha - f(x_0))/R.$$

Notar que $z \in B(0, 1)$ depende de $x \in B(x_0, R)$, pero x es arbitrario, lo que implica que z es arbitrario. Así,

$$f(z) < (\alpha - f(x_0))/R \quad \forall z \in B(0, 1).$$

Además, como $-z \in B(0, 1)$, para cualquier $z \in B(0, 1)$; se tiene que

$$f(-z) < (\alpha - f(x_0))/R$$

y, por linealidad de f , se sigue que

$$f(z) > (f(x_0) - \alpha)/R \quad \forall z \in B(0, 1)$$

$$\therefore -(\alpha - f(x_0))/R < f(z) < (\alpha - f(x_0))/R \quad \forall z \in B(0, 1)$$

$$\Rightarrow |f(z)| < (\alpha - f(x_0))/R \quad \forall z \in B(0, 1)$$

$$\therefore \sup_{z \in B(0, 1)} |f(z)| < (\alpha - f(x_0))/R$$

$$= \|f\|_{E^*} \quad \therefore f \text{ es acotada y así continua.}$$

* Demostremos entonces que $f(x) < \alpha$ para todo $x \in B(x_0, R)$. Por absurdo, supongamos que existe $x_1 \in B(x_0, R)$ tal que $f(x_1) > \alpha$. Puesto que $B(x_0, R)$ es convexa, entonces

$[x_0, x_1] \subseteq B(x_0, R)$, con lo cual \uparrow como la bola está en el complemento, $f(x) \neq \alpha$

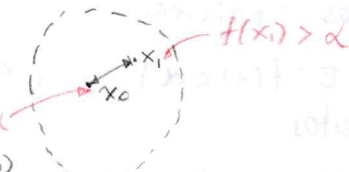
viércoles, 12 de enero de 2012 \uparrow la contradicción sería $f(x_1) \geq \alpha \uparrow$

$$x^* = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$$

$$\text{d } \exists \lambda \in]0, 1[\text{ tal que } f(x^*) = \alpha?$$

$$f(x^*) = (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$$

$$= f(x_0) - \lambda f(x_0) + \lambda f(x_1) \quad \text{d } \lambda = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \in]0, 1[?$$



Como $\alpha \neq f(x_0)$ y $f(x_1) < \alpha < f(x_0)$, entonces $\lambda \neq 0$ y está bien definido.

Así, como $f(x_0) > \alpha$, entonces $f(x_1) > f(x_0)$. $\frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} < 1 \Leftrightarrow \alpha - f(x_0) < f(x_1) - f(x_0)$
 $f(x_1) - f(x_0) < \alpha - f(x_0) \Leftrightarrow f(x_1) < \alpha$ \forall

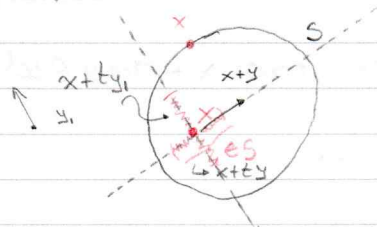
$\therefore \exists x^* \in [x_0, x_1]$ tal que $f(x^*) = \alpha$.

De donde, por contradicción, se ha probado que

$$f(x) < \alpha \quad \forall x \in B(x_0, \rho)$$

y con * se sigue el resultado.

Sea E un espacio vectorial real, $S \subseteq E$ (subconjunto)



¿Cómo saber si $x \in S$?

si existe t tales que todos los puntos $x + ty \in S$, x está en S
(Para cualquier $y \in S$) (t es un factor de escalamiento)

Definición: Sea $x \in S \subseteq E$, entonces x es un punto interior de S si
 $(\forall y \in S) (\exists \varepsilon = \varepsilon(y) > 0) (\forall |t| \leq \varepsilon) (x + ty \in S)$

* $K \subseteq E$ convexo, $x \in K$ punto interior.

Definición: $P = P_{K,x} : E \rightarrow \mathbb{R}$

depende del conjunto K $y \mapsto p(y) = \inf \{ a > 0 : x + 1/a y \in K \}$

La función gauge / espesor de K , funcional de Minkowski asociado a K .

Esta función devuelve el espesor del conjunto en la dirección del vector y .

Sueves, 13 de enero de 2022.

Propiedades sea $y \in E$.

• $P(y) < +\infty$ P.D. $\{ a > 0 : x + 1/a y \in K \} \neq \emptyset$

Como $x \in K$ es un punto interior, entonces existe $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tal que

$$x + ty \in K \quad \forall |t| \leq \varepsilon$$

Considerando $t = \varepsilon$, se tiene que $x + \varepsilon y \in K$; así

$$x + 1/\varepsilon y \in K \Rightarrow 1/\varepsilon \in \{ a > 0 : x + 1/a y \in K \}$$

Por teorema del ínfimo, $\inf \{ a > 0 : x + 1/a y \in K \} < +\infty$

• $a_1 \in \{ a > 0 : x + 1/a y \in K \}$ y $a_2 > a_1$, entonces $a_2 \in \{ a > 0 : x + 1/a y \in K \}$

P.D. $a_2 \in \{ a > 0 : x + 1/a y \in K \}$.

Sabemos que $a_1 > 0$ y $x + 1/a_1 y \in K$. P.D. $a_2 > 0 \Rightarrow x + 1/a_2 y \in K$.

Dado que $a_2 > a_1$ y $a_1 > 0$, entonces $a_2 > 0$.

Ahora, como K es convexo, $x, x + 1/a_1 y \in K$, entonces

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad (1-\lambda)x + \lambda(x + 1/a_1 y) \in K$$

Como $a_2 > a_1$, entonces $a_1/a_2 < 1$, así, tomando $\lambda = a_1/a_2$, se sigue que

$$(1-\lambda)x + \lambda(x + 1/a_1 y) \Leftrightarrow x + \lambda/a_1 y \in K \quad a_1 < a_2 \Rightarrow a_1/a_2 < 1$$
$$\Rightarrow x + 1/a_2 y \in K$$

Conclusión $\{ a > 0 : x + 1/a y \in K \} = (a_0, +\infty)$ ó $[a_0, +\infty)$

• P es subaditivo P.D. $(\forall y_1, y_2 \in E) (P(y_1 + y_2) \leq P(y_1) + P(y_2))$

Sean $y_1, y_2 \in E$. Notar que $p(y_1) < +\infty$, por caracterización del ínfimo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_1 > 0$ tal que $\varepsilon + p(y_1) > a_1$; $x + 1/a_1 y_1 \in K$.

Análogamente, para $p(y_2)$, existe $a_2 > 0$ tal que

$$\varepsilon + p(y_2) > a_2; \quad x + 1/a_2 y_2 \in K$$

Por otro lado, $p(y_1 + y_2) = \inf \{ a > 0 : x + 1/a (y_1 + y_2) \in K \}$, y por la convexidad de K , se tiene que

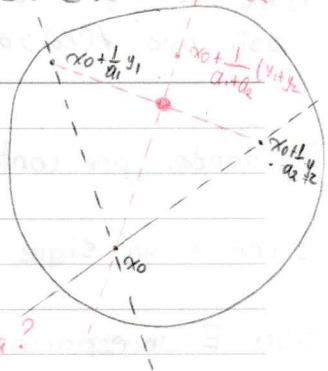
$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad (1-\lambda)(x + 1/a_1 y_1) + \lambda(x + 1/a_2 y_2) \in K$$

$$\Rightarrow x + (1-\lambda)(1/a_1 y_1) + \lambda(1/a_2 y_2) = \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \frac{1-\lambda}{a_1} = \frac{\lambda}{a_2} ?$$

$$\Rightarrow a_2(1-\lambda) = a_1 \lambda \Rightarrow a_2 - \lambda a_2 = a_1 \lambda \Rightarrow a_2 = (a_1 + a_2) \lambda \Rightarrow \lambda = a_2 / (a_1 + a_2) < 1$$

notar que $1-\lambda = \alpha_1/(a_1 a_2) y_1 + \alpha_2/(a_1 a_2) y_2 = x + 1/(a_1 a_2) (y_1 + y_2) \in K$
 Lo que implica que $a_1 + a_2 \in \{a > 0 : x + 1/a (y_1 + y_2) \in K\}$, de donde

$$p(y_1 + y_2) \leq a_1 + a_2 \leq p(y_1) + \epsilon + p(y_2) + \epsilon < p(y_1) + p(y_2) + 2\epsilon$$



Finalmente, para todo $\epsilon > 0$

$$p(y_1 + y_2) < p(y_1) + p(y_2) + 2\epsilon$$

haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, $p(y_1 + y_2) \leq p(y_1) + p(y_2)$.

• p es homogénea positiva.

Pertenece a la combinacion convexa?

Sean $a > 0$ y $y \in E$, cualquiera:

$$\begin{aligned} p(ay) &= \inf \{ a > 0 : x + 1/a (ay) \in K \} = \inf \{ a > 0 : x + a/a y \in K \} \\ &= \inf \{ a/a a > 0 : x + a/a \in K \} \\ &= \inf \{ ab > 0 : x + 1/b y \in K \} \quad b = a/a \\ &= a \inf \{ b > 0 : x + 1/b y \in K \} = a p(y) \end{aligned}$$

• a) $x + y \in K \Rightarrow p(y) \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{si } x + y \in K &\Rightarrow \exists \{ a > 0 : x + 1/a y \in K \} \\ &\Rightarrow p(y) \leq 1 \end{aligned}$$

b) $x + y$ es un punto interior de $K \Leftrightarrow p(y) < 1$

\Rightarrow supongamos que $x + y$ es un punto interior de K . P.D. $p(y) < 1$.

Basta probar que, existe $a \in \{ a > 0 : x + 1/a y \in K \}$ $a < 1$.

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} x + y \text{ punto interior de } K \Leftrightarrow (\forall z \in E) (\exists \epsilon = \epsilon(z) > 0) (\forall |t| < \epsilon) (x + y + tz \in K) \end{array} \right.$$

Considerando $z = y$ en $[*]$, existe $\epsilon = \epsilon(y) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} (\forall |t| < \epsilon) (x + y + ty \in K) \\ x + (t+1)y \in K \Rightarrow x + (1+\epsilon)y \in K \quad \text{tomando } t = \epsilon \\ x + \frac{1}{1+\epsilon} y \in K \end{aligned}$$

Así, $1/\epsilon \in \{ a > 0 : x + 1/a y \in K \} \Rightarrow p(y) \leq 1/(1+\epsilon) < 1$.

\Leftarrow sup $p(y) < 1$ P.D. $x + y$ es un punto interior de K
 P.D. $(\forall z \in E) (\exists \epsilon = \epsilon(z) > 0) (\forall |t| < \epsilon) (x + y + tz \in K)$.

Sea $z \in E$. Como $p(y) < 1$, entonces existe $0 < a < 1$ tal que $x + 1/a y \in K$

Además, como x es un punto interior de K , entonces existe $\delta(z) > 0$ tal que $|s| \leq \delta \Rightarrow x + sz \in K$.

$$\begin{aligned} \text{Por convexidad de } K, \forall \lambda \in [0, 1], \text{ entonces} \\ (1-\lambda)(x + 1/a y) + \lambda(x + sz) \in K \\ \Leftrightarrow \forall \lambda \in [0, 1] \quad x + (1-\lambda)/a y + \lambda s z \in K \end{aligned}$$

Así, se requiere que $(1-\lambda)/a = 1$, de donde $\lambda = 1-a > 0$; así tomando $\lambda = 1-a$
 $x + y + \frac{(1-a)s z}{a} \in K$
 $x + y + tz \in K$. Tomando $\epsilon = (1-a)\delta$

Lunes, 17 de enero de 2022.

Tomando $\epsilon = \delta$, no se tiene el resultado.

Supongamos que se tiene, entonces, tendríamos que probar que

$$\begin{aligned} x + y + tz \in K \quad \forall |t| \leq \delta \\ \times (1-a)\delta \leq t \leq \delta \quad \text{con } t = (1-a)s. \text{ definamos } r = \frac{1}{1-a} t, \quad |r| = \frac{1}{1-a} |t| \leq \frac{\delta}{1-a} \end{aligned}$$

Así, $x + y + tz = x + y + (1-a)r z$; en efecto, como $1-a < 1$, entonces $(1-a)^{-1} > 1$; por lo tanto, no se tiene el resultado deseado.

Propiedad. Sea $p: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ un funcional sublineal

a) $A = \{x \in E: p(x) \leq 1\}$ es convexo

b) $B = \{x \in E: p(x) < 1\}$ es convexo y 0 es un punto interior de B .

Demostración:

a) Sean $x_1, x_2 \in A$ y $\lambda \in [0, 1]$. P.D. $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$.

$$p(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda p(x_1) + (1-\lambda)p(x_2) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Así, $p(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq 1$; y por lo tanto, es convexo.

b) La demostración de convexidad es similar

P.D. 0 es un punto interior de B *Notemos que $0 \in B$, en efecto es una condición necesaria para $0 \in B$*

Sea $y \in E$, cualquiera. P.D. $\exists \varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tal que $\forall |t| \leq \varepsilon \quad ty \in B$ P.D. $p(ty) < 1$.

* $t > 0$: $p(ty) = tp(y) < 1$ cuando $t < 1/p(y)$

* $t < 0$: $p(ty) = p(-t(-y)) = -tp(-y) < 1$ cuando $t > -1/p(-y)$

$$-\frac{1}{p(-y)} < t < \frac{1}{p(y)} \quad -\frac{1}{p(-y)} - \varepsilon \quad 0 \quad \varepsilon \quad \frac{1}{p(y)}$$

es necesario dividir para que $t = \varepsilon$ sea verdad, caso contrario no es

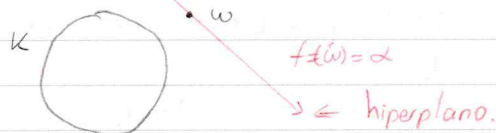
tomando $\varepsilon = \min\{1/p(y), -1/p(-y)\} / 2$. Así, se tiene que $\forall |t| \leq \varepsilon, ty \in B$ y así;
 $p(ty) < 1$

Finalmente, si $t = 0$, notemos que $tp(y) = 0 < 1$.

CASO: ($y = 0$), ($\forall \varepsilon > 0$) $\forall |t| \leq \varepsilon \rightarrow ty \in B$.

Teorema. Sean E , un e.v. real, y $K \subseteq E$ no vacío y convexo, y $w \in K$ si todas las puntas en K son puntas interiores, entonces existe $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que
 $K \subseteq \{x \in E: f(x) < \alpha\}$ y $f(w) = \alpha$

Gráficamente



Demostración:

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $0 \in K$. En efecto, si no fuera este el caso, entonces, se define $\tilde{K} = x_0 - K$ $x_0 \in K$ $\tilde{K} = \{x_0 - k: k \in K\}$ donde $0 \in \tilde{K}$ pues $0 = x_0 - x_0$

Así, $0 \in \tilde{K}$ y $\tilde{K} \neq \emptyset$ y \tilde{K} es convexo; en efecto, tomemos $x, y \in \tilde{K}$

$$(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)(x_0 - k_1) + \lambda(x_0 - k_2) = [(1-\lambda)x_0 + \lambda x_0] - [(1-\lambda)k_1 + \lambda k_2] = x_0 - k \in \tilde{K}$$

Sea $\tilde{x} \in \tilde{K}$. P.D. \tilde{x} es punto interior de \tilde{K} .

Sea $y \in E$. P.D. $(\exists \varepsilon = \varepsilon(y) > 0) (\forall |t| \leq \varepsilon) \tilde{x} + ty \in \tilde{K}$. Como $\tilde{x} \in \tilde{K}$, entonces $\tilde{x} = x_0 - k$ con $k \in K$ y como todas sus puntas son interiores, entonces existe $\delta(y) > 0$ tal que

$$k + sy \in K \quad \forall |s| \leq \delta$$

y $\tilde{x} + ty = x_0 - k + ty = x_0 - (k - ty)$ si $|t| \leq \delta$, tomando $\varepsilon = \delta$, se tiene que
 $\tilde{x} + ty \in \tilde{K} \quad \forall |t| \leq \varepsilon$.

En efecto, si $|t| \leq \delta$, tomando $s = -t$

$$\tilde{x} + ty = x_0 - (k - ty) = x_0 - (k + sy) \quad |s| = |-t| = |t| \leq \delta$$

$$\therefore \tilde{x} + ty \in x_0 - K = \tilde{K}$$

Así, hemos probado que sin pérdida de generalidad $0 \in K$.

Como $0 \in K$, definimos

$$p(y) = p_{K,0}(y) = \inf \{ \alpha > 0: \frac{1}{\alpha} y \in K \}$$

Consideremos $F = \text{span}\{w\} = \{cw: c \in \mathbb{R}\}$ y

$$g: F \rightarrow \mathbb{R}$$

$$cw \mapsto g(cw) = cp(w)$$

Es claro que g es lineal y además

notemos que w está fijo.

$g \leq p$ en F .

Martes, 18 de enero de 2022.

A partir de este punto, denominaremos punto interior al punto que satisface la definición topológica de un punto interior, y punto interno al punto que satisface la definición algebraica de punto interno.

Sea $cw \in F$, cualquiera.

$$g(cw) = \begin{cases} g(0) \leq p(0) & ; c=0 \\ cg(w) = cp(w) = p(cw) & ; c>0 \\ cg(w) = cp(w) \leq 0 \leq p(cw) & ; c<0. \end{cases}$$

Así, por el teorema de Hahn-Banach, existe $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que

$$f|_F = g, \quad f \leq p \text{ en } E.$$

- $f(w) = g(w) = p(w)$.

Tomando $\alpha = p(w)$, se sigue que $f(w) = \alpha$ y $K \subseteq \{x \in E : f(x) < \alpha\}$.

En efecto, sea $x \in K$, p.d. $f(x) < \alpha$; así

$$f(x) \leq p(x) < 1 \leq \alpha = p(w)$$

x es un punto interno \uparrow

Por otro lado, note que como $w \notin K$, entonces

$$1 \notin \{a > 0 : \forall a w \in K\} \Rightarrow 1 \text{ es cota inferior } \{a > 0 : \forall a w \in K\}$$

$$\Rightarrow p(w) \geq 1, \quad \hookrightarrow \text{por caracterización de cota inferior}$$

$$\therefore f(x) < 1 = p(w) = \alpha.$$

Corolario. Sean E un espacio vectorial real, $K \subseteq E$ no vacío y convexo, y $w \notin K$, si existe $x \in K$ un punto interno de K , entonces existen $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$K \subseteq \{z \in E : f(z) \leq \alpha\} \text{ y } f(w) = \alpha$$

Demostración: Idea (replicar la demostración del teorema anterior)

Teorema: Hahn-Banach - Primera forma geométrica. Sean E un e.v. real y K_1, K_2 conjuntos, no vacíos, convexos y disjuntos. Si $x_0 \in K_1$ es un punto interno de K_1 , entonces existe un hiperplano $H = \{f = \alpha\}$ que separa K_1 y K_2 .

Demostración

$$* K = K_1 - K_2 = \{k_1 - k_2 : k_1 \in K_1 \text{ y } k_2 \in K_2\}$$

① K es convexo

② $(\forall y \in K_2) (x_0 - y \text{ es un punto interno de } K)$

③ $0 \notin K$, $0 = k_1 - k_2$, $k_1 \in K_1$ y $k_2 \in K_2$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

Dado que se satisfacen las hipótesis del corolario, con lo cual existen $L: E \rightarrow \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$K \subseteq \{z \in E : L(z) \leq \beta\} \text{ y } L(0) = \beta \Rightarrow \beta = 0 \text{ pues } L \text{ es lineal}$$

$$\text{Así, } \beta = 0 \Rightarrow K_1 - K_2 \subseteq \{z \in E : L(z) \leq 0\}$$

$$\therefore \forall a \in K_1, \forall b \in K_2 \quad L(a) \leq L(b)$$

tomando $f = L$ y $\alpha = \sup \{L(a) : a \in K_1\} \in \mathbb{R}$ (existe por el axioma del supremo), se tiene lo requerido, es decir,

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b) \quad \forall a \in K_1, \forall b \in K_2.$$

Teorema: Segunda forma geométrica del teorema de Hahn-Banach.

Sean E un ^{normado} \mathbb{R} -espacio real y sean K_1, K_2 conjuntos, no vacíos, convexos y disjuntos. Si K_1 es compacto y K_2 es cerrado, entonces existe un hiperplano $H = \{f = \alpha\}$ que separa estrictamente a K_1 y K_2 .

Demostración:

P.D. $(\exists f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineal}) (\exists \alpha \in \mathbb{R}) (\exists \varepsilon > 0) (f(x) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leq f(y)) \quad \forall (x, y) \in K_1 \times K_2$

Definamos $K = K_1 - K_2$

- K es convexo
- $K \neq \emptyset$
- $0 \notin K \Leftrightarrow 0 \in K^c$. Notar que K es cerrado. $\Rightarrow K^c$ es abierto

En efecto, sea $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en K tal que $w_n \rightarrow w$, $\forall n \in \mathbb{N} w_n = x_n - y_n$, $x_n \in K_1$, $y_n \in K_2$
 $\Rightarrow x_n - y_n \rightarrow w$ en E

Por otro lado, $(x_n)_n$ es una sucesión en K_1 , existe $(x_{n_k})_k$ una subsucesión de $(x_n)_n$ tal que

$$x_{n_k} \rightarrow x \in K_1$$

Luego, $y_{n_k} \rightarrow x - w$. Por lo tanto, como K_2 es cerrado $x - w \in K_2$.

Así, existe $y \in K_2$, tal que $x - w = y$; así, $w = x - y$ con $x \in K_1$ y $y \in K_2$ tal
 $\Rightarrow w \in K$.

Como $0 \in K^c$ y K^c es abierto y entonces cero es un punto interior de $K^c \Rightarrow 0$ es un punto interno de K^c

Todo punto interior es un punto interno

Además, existe $B_r(0) \subseteq K^c$, por lo tanto

$$B_r(0) \cap K = \emptyset$$

Así, $B_r(0)$ es un conjunto no vacío, convexo con 0 punto interno.

Por el teorema de Hahn-Banach - 1ª forma geométrica, existe $L: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que
 $L(x) \leq \beta \leq L(z) \quad \forall (x, z) \in K \times B_r(0)$.

Así, $L(x - y) \leq L(z) \quad \forall x \in K_1, \forall y \in K_2$ y $\forall z \in B_r(0)$, notamos que
 $B_r(0) = rB_1(0)$.

Por lo tanto,

$$L(x - y) \leq L(rw) \quad \forall x \in K_1, \forall y \in K_2 \text{ y } \forall w \in B_1(0)$$
$$= rL(w)$$

$$L(x - y) \leq \inf_{w \in B_1(0)} L(rw) = r \inf_{w \in B_1(0)} L(w) \quad \forall x \in K_1, \forall y \in K_2$$

Como $\inf_{w \in B_1(0)} L(w) = -\|L\|_{E^*}$ $\therefore L(x - y) \leq -r\|L\|_{E^*} \quad \forall (x, y) \in K_1 \times K_2$

$$\Rightarrow L(x) - L(y) \leq -r\|L\|_{E^*}$$
$$\Rightarrow L(x) \leq L(y) - r\|L\|_{E^*}$$
$$= L(y) - \frac{r}{2}\|L\|_{E^*} - \frac{r}{2}\|L\|_{E^*}$$

$$\Rightarrow L(x) + \frac{r}{2}\|L\|_{E^*} \leq L(y) - \frac{r}{2}\|L\|_{E^*} \quad \forall (x, y) \in K_1 \times K_2$$

$$\forall (x, y) \in K_1 \times K_2 \quad L(x) + \frac{r}{2}\|L\|_{E^*} \leq \sup_{x \in K_1} L(x) + \frac{r}{2}\|L\|_{E^*} \leq \inf_{y \in K_2} L(y) - \frac{r}{2}\|L\|_{E^*} \leq L(y) - \frac{r}{2}\|L\|_{E^*}$$

Tomando, $f = L$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que

$$\sup_{x \in K_1} L(x) + \frac{r}{2}\|L\|_{E^*} \leq \alpha \leq \inf_{y \in K_2} L(y) - \frac{r}{2}\|L\|_{E^*}$$

y $\varepsilon = \frac{r}{2}\|L\|_{E^*}$, se tiene lo requerido

Observación: Si se elimina la hipótesis de compacidad

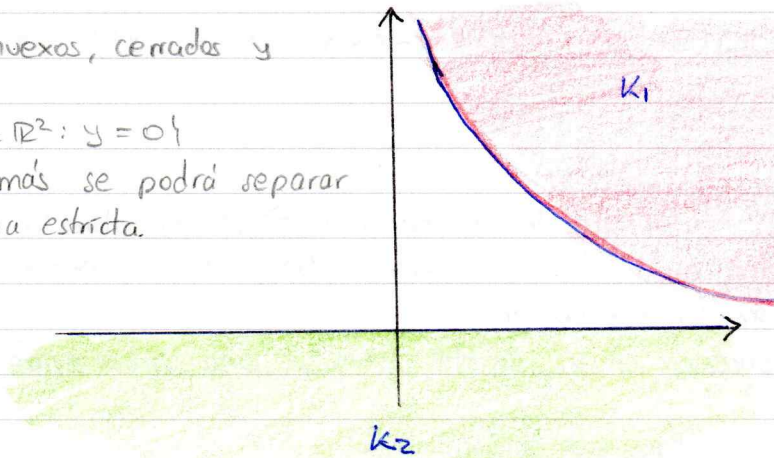
Por ejemplo, considere $K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 1/x\}$

$K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$

K_1 y K_2 son convexas, cerradas y no vacías

$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$

Sin embargo, jamás se podrá separar K_1 y K_2 de forma estricta.



Corolario. Sean E un e.n. y F s.e.v. tal que $\bar{F} \neq E$, luego, existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ tal que

$$f = 0 \text{ en } F$$

Demostración:

Sea $x_0 \in E \setminus \bar{F}$, Definimos $K_1 = \{x_0\}$ y $K_2 = \bar{F}$, claramente K_1 y K_2 son no vacías, convexas y disjuntas. Además, K_1 es compacto y K_2 es cerrado, entonces por el teorema de Hahn-Banach segunda forma geométrica, existe $H = [f = \alpha]$ tal que

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \quad \forall x \in K_2$$

Al ser \bar{F} s.e.v. de E y $f(x) < \alpha \quad \forall x \in \bar{F}$, entonces $f = 0$.

Corolario. Sean E un e.n. y F s.e.v. Si para todo $f \in E^*$ tal que $f \neq 0$ en F ,

entonces $\bar{F} = E$, F es denso.

$$(\forall f \in E^*) (f \neq 0 \text{ en } F \Rightarrow f = 0 \text{ en } E) \Rightarrow \bar{F} = E$$

Viércoles, 19 de enero de 2022.

Espacio de Baire

Definición Sea (X, d) un e.m. Se dice que (X, d) es un e. Baire si para toda $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de conjuntos abiertos y densos en X , entonces

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \text{ es denso.}$$

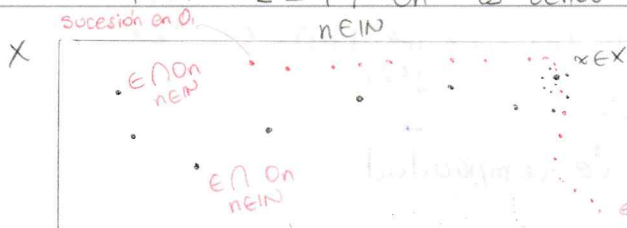
no vacío.

Teorema: Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire

Demostración:

Sea $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos abiertos y densos

P.D. $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ es denso en X



A es denso en X si para todo $O \in \mathcal{X}$ abierto $A \cap O \neq \emptyset$

P.D. Para todo $G \in \mathcal{X}$ abierto $E \cap G \neq \emptyset$

Sea G cualquier abierto en (X, d) . P.D. Existe $x \in E \cap G$.

Dado que O_1 es denso en X, entonces $O_1 \cap G \neq \emptyset$.

Denotemos $x_1 \in O_1 \cap G$. Dado que O_1 y G son abiertos, entonces $O_1 \cap G$ es abierto, entonces existe $r_1 > 0$ tal que

$$B_{r_1}(x_1) \subseteq O_1 \cap G.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar $r_1 \leq 1$ y además, $B(x_1) \subseteq O_1 \cap G$

Ahora, dado que O_2 es denso en X y $B_{r_1}(x_1)$ es un conjunto abierto, entonces existe $x_2 \in O_2 \cap B(x_1, r_1)$.

Por tanto, existe $r_2 \leq 1/2$ tal que $B_{r_2}(x_2) \subseteq O_2 \cap B_{r_1}(x_1)$ y con las mismas consideraciones $B_{r_2}(x_2) \subseteq O_2 \cap B_{r_1}(x_1)$.

Inductivamente, podemos construir una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X y una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$B_{r_n}(x_n) \subseteq O_n \cap B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \quad \forall n \geq 2$$

Pues para $n=1$ $B_{r_1}(x_1) \subseteq G$ y además $0 < r_n \leq 1/n$. Notemos que $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy por construcción.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Sabemos que

$$B_{r_n}(x_n) \subseteq O_n \cap B_{r_{n-1}}(x_{n-1})$$

$$\forall p \in \mathbb{N} : x_n \in B_{r_p}(x_p) \subseteq B_{r_{p-1}}(x_{p-1}) \subseteq B_{r_{p-1}}(x_{p-1}) \subseteq B_{r_{p-2}}(x_{p-2})$$

Así,

$$\forall n \geq p \quad x_n \in B_{r_p}(x_p) \quad \text{y} \quad \forall m \geq p \quad x_m \in B_{r_p}(x_p)$$

Por lo tanto,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_p) + d(x_m, x_p) < r_p + r_p = 2r_p \leq 1/p + 1/p = 2/p$$

Por la propiedad arquimediana de \mathbb{K} , existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2/p_0 < \varepsilon$

Tomando $N = p_0 \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}) (n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

Como X es un e.m. completo, existe

Jueves, 20 de enero de 2022.

Sea $p \in \mathbb{N}$ arbitrario. Notar que $x_n \in B_{r_n}(x_n)$. Más aún, $\forall n \geq p \quad x_n \in B_{r_p}(x_p)$ y como $x_n \rightarrow x$ entonces $x \in \overline{B_{r_p}(x_p)} \quad \forall p \in \mathbb{N}$ y así, dado que

$$B_{r_p}(x_p) \subseteq O_p \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

entonces

$$x \in O_p \quad \forall p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in E.$$

Finalmente, como $x \in B_{r_1}(x_1) \subseteq O_1 \cap G \subseteq G$ y así, $x \in G$. De donde $x \in E \cap G$.

Corolario Sean (X, d) un e.m. completo no vacío, y una sucesión $(F_n)_n$ de cerrados en X tal que

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$

Demostración:

Por contradicción, supongamos que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \text{int}(F_n) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \text{int}(F_n)^c = X$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \overline{F_n^c} = X$$

Donde $(F_n)_n$ es una sucesión de abiertas y densas; así, por el teorema de Baire

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c = X$$

Más aún, por hipótesis.

$$\emptyset = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c = X \Rightarrow X = \emptyset$$

lo cual no es posible pues X es no vacío.

Principio del acotamiento uniforme.

(Principio del acotamiento uniforme local)

Corolario. Sea (X, d) un espacio completo no vacío. Sea $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ familia de funciones continuas de X en \mathbb{R} . ← toda la familia es acotada puntualmente.

Si $(\forall x \in X) (\exists H(x) < +\infty) (\sup_{\alpha \in I} |f_\alpha(x)| \leq H(x))$, si la familia es acotada, entonces existen $\emptyset \neq X_0$ abierto y $H < +\infty$ tales que entonces cada término está acotada. El recíproco no es cierto en general!

$$\forall x \in X_0 \quad \sup_{\alpha \in I} |f_\alpha(x)| \leq H.$$

Equivalentemente $(\forall x \in X) (\exists \delta > 0) (\forall \alpha \in I) (|f_\alpha(x)| \leq M_\delta)$

orden de las cuantificadores.

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}$: $F_n = \{x \in X : \sup_{\alpha \in I} |f_\alpha(x)| \leq n\}$

* $F_n \neq \emptyset$. Sea $n \in \mathbb{N}$. $\sup_{\alpha \in I} |f_\alpha(x)| \leq n \Leftrightarrow \forall \alpha \in I : |f_\alpha(x)| \leq n$

↳ En general no es cierto. $\rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : F_n \neq \emptyset$

* F_n es cerrado, para cada $n \in \mathbb{N}$

$(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sucesión en F_n tal que $x_m \rightarrow x$ P.D. $x \in F_n$

$$\forall \alpha \in I : |f_\alpha(x_m)| \leq n$$

por continuidad $\Rightarrow f_\alpha(x_m) \rightarrow f_\alpha(x)$
 $m \rightarrow +\infty$

y, por lo tanto,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |f_\alpha(x_m)| \leq n \Rightarrow |f_\alpha(x)| \leq n \quad \text{así, } x \in F_n$$

* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = X$

Sea $x \in X$, existe $H(x) < +\infty$ tal que

$$\sup_{\alpha \in I} |f_\alpha(x)| \leq H(x) < n(x) \Rightarrow x \in F_{n(x)}$$

Así, por el corolario del T. Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$, así, tomando $\emptyset \neq X_0 = \text{int}(F_{n_0})$ y $H = n_0$, entonces

$$\forall x \in X_0 \quad \sup_{\alpha \in I} |f_\alpha(x)| \leq H$$

Teorema: Principio de acotamiento uniforme.

Sean E, F espacios normados, con E un espacio de Banach y $\{T_i\}_{i \in I} \in \mathcal{L}(E, F)$ con I una familia cualquiera. Si $\{T_i\}_{i \in I}$ es acotada puntualmente, es decir, para todo $x \in E$, existe $M_x < +\infty$

$$\|T_i x\|_F \leq M_x \quad \text{para todo } i \in I,$$

entonces $\{T_i\}_{i \in I}$ es acotada uniformemente, es decir, existe $H < +\infty$ tal que

$$\|T_i x\|_F \leq H \|x\| \quad \text{para todo } i \in I \text{ y para todo } x \in E.$$

Demostración.
Definamos

$$f_i: E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_i(x) = \|T_i(x)\|_F$$

* $\{f_i\}_{i \in I}$ familia de funciones continuas tal que
 $(\forall x \in E) (\exists M_x < +\infty) (\sup_{i \in I} |f_i(x)| \leq M_x)$

Por el principio, existen $O \subseteq E$ abierto y $K < +\infty$ tal que

$$\forall x \in O \quad \sup_{i \in I} |f_i(x)| \leq K \Leftrightarrow \forall x \in O \quad \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F \leq K$$

$$\Rightarrow (\exists z \in E) (\exists r > 0) (\forall x \in B(z, r) \neq \emptyset) (\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F \leq K)$$

$$\Leftrightarrow (\exists z \in E) (\exists r > 0) (\forall y \in B(0, r)) (\sup_{i \in I} \|T_i(z+y)\| \leq K)$$

Más aún, para todo $y \in E$ tal que $\|y\|_E = r/2$, se tiene que

$$\|T_i(y)\|_F \leq \|T_i(y+z)\|_F + \|T_i z\| \leq 2K.$$

Finalmente, sean $x \in E$ e $i \in I$ arbitrarios. Definamos

$$y = \frac{x}{\|x\|} \frac{r}{2}, \text{ se sigue que}$$

$$\|T_i x\|_F = \left\| T_i \left(\frac{r}{2} \|x\| y \right) \right\|$$

$$= \frac{r}{2} \|x\| \|T_i y\|$$

$$\leq \frac{4}{r} K \|x\|_E$$

$$\therefore \forall i \in I \quad \forall x \in E \quad \|T_i x\|_F \leq 4/rK \|x\|_E$$

tomando $u = 4/rK$ se sigue el resultado deseado.

Lunes, 24 de enero de 2022

Teorema -- Banach-Steinhaus

Sea $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}(E, F)$ con E espacio de Banach y F un espacio normado. Si $(T_n)_n$ converge fuertemente, entonces existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T_n \rightarrow T$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

$(T_n)_n$ converge fuertemente $\Leftrightarrow \forall x \in E, (T_n x)_n$ ^{es una sucesión en F} converge en F

Demostración.

Definamos $S: E \rightarrow F$

$$x \mapsto Sx = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x = y_x \text{ Claramente, } S \text{ está bien definido por hipótesis}$$

y además y_x es único por unicidad del límite.

* S es lineal

Sean $x_1, x_2 \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$S(\lambda x_1 + x_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\lambda x_1 + x_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda T_n x_1 + T_n x_2 = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x_1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x_2$$

$$= \lambda Sx_1 + Sx_2$$

* S es acotado

$$\text{P.D. } (\exists C > 0) (\forall x \in E) \|Sx\|_F \leq C \|x\|_E$$

$(T_n x)_n$ es convergente

$$\Leftrightarrow \exists C_x > 0 \text{ tal que } \|T_n x\| \leq C_x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

[familia $(T_n)_n$ está acotada puntualmente]

Por el principio del acotamiento uniforme, existe $K > 0$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in E) \|T_n x\| \leq K \|x\|_E$$

Por lo tanto, se sigue que, por definición $T_n x \rightarrow Sx$ en F , entonces $\|T_n x\| \rightarrow \|Sx\|$ en \mathbb{R} . Se donde,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x\| \leq K \|x\|_E \quad \left(\begin{array}{l} \text{Preservaci3n de la desigualdad a trav3s de} \\ \text{limites} \end{array} \right)$$

$$\therefore \|Sx\| \leq K \|x\|_E$$

Tomando $C=K>0$, se tiene el resultado.

Finalmente, tomando $T=S \in \mathcal{L}(E,F)$, se tiene que $T_n \rightarrow T$ fuertemente

Observaci3n. Sea $(T_n)_n$ una sucesi3n en $\mathcal{L}(E,F)$ y $T \in \mathcal{L}(E,F)$

$$\begin{array}{ccc} T_n \rightarrow T \text{ uniformemente} & \Rightarrow & T_n \rightarrow T \text{ fuertemente} \\ \Updownarrow \text{det} & \not\Leftarrow & \Updownarrow \text{det} \\ \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \rightarrow 0 \text{ en } \mathbb{R} & & \forall x \in E : T_n x \rightarrow T x \text{ en } F \end{array}$$

Lunes, 31 de enero de 2022.

Ejemplo del rec3proco anterior

H espacio de Hilbert separable y $\{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ una base hilbertiana de H .

Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos definir

$$P_n : H \rightarrow H \quad P_n \in \mathcal{L}(H,H)$$

$$P_n = P_{\text{span}\{e_k | k=1, \dots, n\}}$$

$P_n \rightarrow \text{id}$ fuertemente pero $P_n \not\rightarrow \text{id}$ uniformemente

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$$

Sea $x \in H$. P.D. $P_n x \rightarrow x$ en H $n \rightarrow +\infty$

$$\text{P.D. } \|P_n x - x\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\|P_n x - x\|_H = \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k - x \right\|_H \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

Para ver que $P_n \not\rightarrow \text{id}$ uniformemente, basta ver que

$$\|P_n - \text{id}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Sea } x \in H, \quad \|P_n x - x\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Por lo tanto,

$$\therefore \|P_n x - x\|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|P_n x - x\| \leq \|x\| \quad \forall x \in H, \|x\|=1$$

$$\Rightarrow \|P_n - \text{id}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq 1$$

Consideremos $m > n$

$$\|P_n e_m - \text{id}(e_m)\|_H = \|0 - e_m\| = \|e_m\| = \|1\|$$

Por lo tanto,

$$\|P_n - \text{id}\|_{\mathcal{L}(H,H)} = 1.$$

lo que prueba el resultado deseado.

Teorema de la aplicación abierta.

Sean E, F espacios normados.

$f: E \rightarrow F$ aplicación abierta $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U \subseteq E$ abierto, $f(U) \subseteq F$ abierto.

$f: E \rightarrow F$ continua $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall V \subseteq F$ abierto, $f^{-1}(V) \subseteq E$ es abierto
 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall C \subseteq F$ cerrado, $f^{-1}(C) \subseteq E$ es cerrado

$f: E \rightarrow F$ aplicación cerrada $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall K \subseteq E$ cerrado, $f(K) \subseteq F$ cerrado

$f: E \rightarrow F$ biyectiva

f aplicación abierta $\Leftrightarrow f^{-1}$ es continua.

$\Leftrightarrow \forall U \subseteq E$ abierto $(f^{-1})^{-1}(U)$ abierto en F
 $f(U)$

$T: E \rightarrow F$ lineal y biyectiva

$\Rightarrow dT^{-1}: F \rightarrow E$ lineal? **Si.**

$T \in \mathcal{L}(E, F)$ biyectiva

$\Rightarrow dT^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$? **No, en general**

Ejemplo

$$T: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left(\frac{x_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Es fácil ver que T es lineal. Además, T es continua pues

$$\|T((x_n)_{n \in \mathbb{N}})\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{x_n}{n} \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} \text{ en el e.u.}$$

Linealidad. $T(\lambda(u_n)_n + (v_n)_n) = T((\lambda u_n + v_n)_n) = ((\lambda u_n + v_n)/n)_n = (\lambda u_n/n + v_n/n)_n = (\lambda u_n/n)_n + (v_n/n)_n = \lambda T((u_n)_n) + T((v_n)_n)$
operaciones algebraicas sobre el espacio de sucesiones \uparrow operaciones sobre el campo

Además, T es biyectiva cuya inversa

$$T^{-1}: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$$

$$(y_n)_n \mapsto T^{-1}((y_n)_n) = (ny_n)_n$$

Sin embargo, T^{-1} no es acotada si se considera $(y_n)_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, donde el término no nulo de la sucesión se encuentra en la posición n -ésima

$$\|T^{-1}((y_n)_n)\|_{\ell^\infty} = \|T^{-1}((0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots))\|_{\ell^\infty}$$

$$= \|(0, \dots, 0, n, 0, \dots)\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n| = n.$$

y por tanto, T^{-1} no es acotada ya que $n \in \mathbb{N}$, $\|T^{-1}\| \geq n$

Teorema [Aplicación abierta]

Sean E, F espacios de Banach, si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ sobreyectiva, entonces T es una aplicación abierta (i.e. T^{-1} es continua)

Demostación

P.D. T es una aplicación abierta.

Sea $U \subseteq E$, abierto. P.D. $T(U)$ es abierto en F .

Sea $y \in T(U)$. P.D. $\exists r > 0$ tal que $B_F(y, r) \subseteq T(U)$

$$\textcircled{1} B_F(y, r) = \{y\} + r B_F(0, 1)$$

$$\textcircled{2} x \in U \Rightarrow \exists R > 0 \quad B_E(x, R) \subseteq U$$

Basta probar que $B_F(y, r) \subseteq T(B_E(x, R))$ p.d. interior del conjunto no es vacío.

② Basta probar $B_F(0, r) \subseteq T(B_E(0, R))$ que existe $r > 0$ tal que

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(B_E(0, n))} = F?$$

Martes, 1 de febrero de 2022.

Sea $y \in F$, P.D. $(\exists m \in \mathbb{N}) y \in T(B_E(0, m))$.

Como $y \in F$, entonces existe $x \in E$ tal que $Tx = y$.

$$x \in E \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in B_E(0, m) \Rightarrow Tx \in T(B_E(0, m_x)) \subseteq \overline{T(B_E(0, m_x))}$$

Propiedad Arquimediano ($\forall r \in \mathbb{R}$) ($\forall k \in \mathbb{N}$) ($r < k$).

$$\Rightarrow y \in T(B_E(0, m_x)).$$

Por el teorema de Baire, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(T(B_E(0, m_0)))$ es no vacío. Así existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} B_F(0, \delta) &\subseteq T(B_E(0, m_0)) \\ B_F(0, \delta) &\subseteq m_0 \overline{T(B_E(0, 1))} \subseteq m_0 T(B_E(0, 1)) \\ &\Rightarrow B_F(0, \delta/m_0) \subseteq \overline{T(B_E(0, 1))} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{P.D. } (\exists \alpha > 0) \left(B_F(0, \delta/m_0) \subseteq T(B_E(0, \alpha)) \right)$$

$$\frac{\mathbb{R}}{\alpha} B_F(0, \delta/m_0) \subseteq \frac{\mathbb{R}}{\alpha} T(B_E(0, \alpha)) = T(B_E(0, 2))$$

$$B_F(0, (\delta/m_0)/\alpha) \subseteq T(B_E(0, 2))$$

$$\exists \hat{\delta} > 0 : B_F(0, \hat{\delta}) \subseteq T(B_E(0, 1))$$

$$\text{P.D. } (\exists \lambda > 0) B_F(0, \lambda) \subseteq T(B_E(0, 1))$$

Notar que, para todo $\lambda > 0$

$$B_F(0, \hat{\delta}/\lambda) \subseteq T(B_E(0, 1/\lambda))$$

Por lo tanto, en particular para $2^k > 0$ con $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$B_F(0, \hat{\delta}/2^k) \subseteq T(B_E(0, 1/2^k)) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Notemos que si $k=0$, entonces

$$B_F(0, \hat{\delta}) \subseteq T(B_E(0, 1))$$

$y \in B_F(0, \hat{\delta})$, entonces $y \in T(B_E(0, 1)) \Rightarrow$ existe $x_1 \in B_E(0, 1)$ tal que

$$\|Tx_1 - y\| < \hat{\delta}/2.$$

De donde,

$$Tx_1 - y \in B_F(0, \hat{\delta}/2) \Rightarrow \exists x_2 \in B_E(0, 1/2) \text{ t.q. } \|y - Tx_1 - Tx_2\| < \hat{\delta}/2^2$$

Es decir

$$y - Tx_1 - Tx_2 \in B_F(0, \hat{\delta}/2^2) \Rightarrow \exists x_3 \in B_E(0, 1/4) \text{ tal que } \|y - Tx_1 - Tx_2 - Tx_3\| < \hat{\delta}/2^3$$

Inductivamente, encontramos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en E tal que $\|x_n\|_E < \frac{1}{2^{n-1}}$.

es decir, $(x_n \in B(0, 1/2^{n-1}))$

$$\|y - \sum_{k=1}^n Tx_k\|_F < \hat{\delta}/2^n \quad [*]$$

Sea $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notar que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E , por lo tanto, existe $x \in E$ tal que $s_n \rightarrow x$

Como T es continua, entonces $Ts_n \rightarrow Tx$ en F y así, por otro lado, de $[*]$ se conoce que

$$\|y - T(s_n)\| < \hat{\delta}/2^n \Rightarrow Ts_n \rightarrow y \text{ cuando } n \rightarrow +\infty \text{ en } F$$

Por unicidad del límite $y = Tx$ y por otro lado

$$\|y - Ts_n\| < \frac{\hat{\delta}}{2^n} \Rightarrow \|y\| < \|Ts_n\| + \frac{\hat{\delta}}{2^n}$$

$$\Rightarrow \|y\| < \sum_{k=1}^n \|Tx_k\| + \frac{\hat{\delta}}{2^n} \leq C \sum_{k=1}^n \|x_k\| + \frac{\hat{\delta}}{2^n} < C \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{\hat{\delta}}{2^n}$$

y cuando $n \rightarrow +\infty$

$$\|y\| < 2C$$

$$\|x\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \Rightarrow x \in B_E(0, 3)$$

Tomando $\delta' = C > 0$, se sigue que

Corolario [Teorema de isomorfismos de Banach] Sean E, F espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$ biyectiva. Entonces, T^{-1} es continua.

Demostración:

$T \in \mathcal{L}(E, F)$ biyectiva $\Rightarrow T$ es una aplicación abierta
teo Aplic. Abierta

$\Leftrightarrow T^{-1}$ es continua.

Teorema del grafo cerrado.

* $T \in \mathcal{L}(E, F)$
 $x_n \rightarrow x \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx$ ejemplo de no convergencia

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$
 $x_n = 1 - \frac{1}{n} \quad 0 \leq x_n < 1$
 $x_n \rightarrow 1, f(x_n) = \lfloor 1 - \frac{1}{n} \rfloor = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Así, $f(x_n) \not\rightarrow f(1)$.

* $T: \mathcal{P}([0,1]) \rightarrow \mathcal{P}([0,1])$

$$p \mapsto Tp = \frac{dp}{dx} \quad \|Tp\|_{C^0([0,1])} = \max_{x \in [0,1]} |Tp(x)| = \max_{x \in [0,1]} |p'(x)|$$

$\triangleright T$ es lineal

$$p(x) = x^n \Rightarrow p'(x) = nx^{n-1}$$

$\triangleright T$ no es acotado.

$$\|T(x^n)\|_{C^0([0,1])} = n = C_p$$

$$p_n \rightarrow p \Rightarrow Tp_n \rightarrow Tp$$

T operador integral

Se tendrá que si $p_n \rightarrow p$, entonces

$$f \mapsto Tf = \int f$$

$$\int f_n \rightarrow \int f$$

$$f \mapsto \int_a^b f$$

Grafo de un operador

Sean E, F espacios normados $T: E \rightarrow F$ lineal (no se requiere que sea lineal necesariamente)

$$G(T) = \{ (x, Tx) : x \in E \} \subseteq E \times F$$

cuando T es lineal, entonces

$G(T)$ es un subespacio vectorial de $E \times F$

- $\| (x, Tx) \| := \| x \|_E + \| Tx \|_F$ se denomina la norma del grafo.
- $\therefore G(T)$ es un espacio normado.

Definición $T: E \rightarrow F$ es un operador cerrado si $G(T)$ es cerrado en $E \times F$.

$G(T)$ es cerrado en si mismo pero no necesariamente lo es en $E \times F$

$G(T)$ es cerrado \Leftrightarrow $(\forall (z_n)_n \text{ en } G(T)) \left(\begin{matrix} \text{carac.} \\ z_n \rightarrow z \end{matrix} \Rightarrow z \in G(T) \right)$ está sobrentendida.

$\Leftrightarrow (\forall (x_n)_n \text{ sucesión en } E) \left((x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y) \text{ en } E \times F \Rightarrow Tx = y, x \in E \right)$

$\Leftrightarrow (\forall (x_n)_n \text{ sucesión en } E) \left(\begin{matrix} x_n \rightarrow x \text{ en } E \\ Tx_n \rightarrow y \end{matrix} \Rightarrow y = Tx \right)$

Cuando T es continuo, si $x_n \rightarrow x$, entonces $Tx_n \rightarrow Tx$

$$x_n \rightarrow x \text{ y } Tx_n \rightarrow y \Rightarrow Tx = y$$

T cerrado.

Continuidad no es suficiente para que sea un operador cerrado. Se requiere que sea lineal y continuo.

Proposición Sean E, F espacios de Banach. Si $T: E \rightarrow F$ es un operador cerrado, entonces $G(T)$ es un espacio de Banach.

Demostración

Sea $(x_n, Tx_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $G(T)$.

P.D. $(\exists (x, Tx) \in G(T)) \left((x_n, Tx_n) \rightarrow (x, Tx) \text{ en } G(T) \right)$

(x_n, Tx_n) es una sucesión de Cauchy en $G(T) \Rightarrow (x_n)_n$ sucesión de Cauchy en E y $(Tx_n)_n$ es de Cauchy en F .

$$\Rightarrow (\exists x \in E) \text{ t.q. } (x_n \rightarrow x) \text{ y } (\exists y \in F) (Tx_n \rightarrow y)$$

Finalmente, como G es cerrado $Tx = y$; así $(x, Tx) \in G(T)$

$$(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, Tx) \text{ en } G(T)$$

Sean

Proposición E, F espacios normados. Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces T es un operador cerrado

Demostración.

Sea $(x_n)_n$ sucesión en E tal que $x_n \rightarrow x$ en E y $Tx_n \rightarrow y$ en F . P.D. $y = Tx$

$x_n \rightarrow x$ en $E \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx$ en F

Por unicidad del límite, $Tx = y$.

Teorema [Grafo cerrado] Sean E, F espacios de Banach. Si $T: E \rightarrow F$ es lineal y cerrado, entonces T es acotado.

Demostración

P.D. $(\exists c > 0) (\forall x \in E) (\|Tx\|_F \leq c \|x\|_E)$

Idea. $P_x: E \times F \rightarrow E$
 $(x, y) \mapsto x$

$P_y: E \times F \rightarrow F$
 $(x, y) \mapsto y$

$P_y \circ P_x^{-1} = T$
 \uparrow op. lineal acotado $\quad \nwarrow$ op lineal y acotado

Idea 2 $(\exists c > 0) (\|Tx\| \leq c \|x\|)$

si $\|Tx_n\| \leq K \|x_n\|$ con K independiente de n .
 entonces, tomando el límite cuando $n \rightarrow +\infty$
 $\therefore \|Tx\| \leq K \|x\|$

$x_n \rightarrow x$
 $Tx_n \rightarrow y$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow Tx = y$ T cerrado

Sea $x \in E$, cualquiera. Como E es cerrado en sí mismo, entonces existe $(x_n)_n$ una sucesión en E tal que $x_n \rightarrow x$.

Ahora, vamos a probar que $(Tx_n)_n$ converge.
 Equivalentemente, como F es de Banach, podemos probar que $(Tx_n)_n$ es de Cauchy.
 Así, sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Y sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n$
 $\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\|$

Lunes, 7 de febrero de 2021.

Corrección Control 5

Pregunta 1.

E e.v. y F s.v.p. de E . $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in F$
 \downarrow funcional sublineal

$z \in E \setminus F$ $\tilde{f}: F + \alpha z \rightarrow \mathbb{R}$
 $\tilde{f}(x + \alpha z) \mapsto f(x) + \alpha a$ con a por determinar
 el cual satisface que

$$\sup_{y \in F} \{ f(y) - p(y-z) \} \leq a \leq \inf_{y \in F} \{ p(y+z) - f(y) \}$$

Notar que si $\sup_{y \in F} \{ f(y) - p(y-z) \} < \inf_{y \in F} \{ p(y+z) - f(y) \}$, entonces se tiene que

$\forall a \in [\sup_{y \in F} \{ f(y) - p(y-z) \}, \inf_{y \in F} \{ p(y+z) - f(y) \}]$

$\tilde{f}(x + \alpha z) = f(x) + \alpha a$ es lineal, es una extensión de F y está dominada por p .

Pregunta 2.

Supongamos que $f \leq g$, $f, g \in W$ con W s.e.v. $B(x)$
 $g - f \in W$ y $g - f \geq 0$
 $\therefore l(g - f) \geq 0 \Rightarrow l(g) - l(f) \geq 0$
 $\Rightarrow l(f) \leq l(g)$

literal b)

$p(f) = \inf \{ l(g) : f \leq g, g \in W \}$
 P.D. $\forall f \in B(x) : p(f) \in \mathbb{R}$

Notemos que $W \neq \{0\}$. Por otro lado, para cualquier $f \in B(x)$, existe $C_f > 0$ tal que

$|f(x)| \leq C_f \quad \forall x \in X$
 $\Leftrightarrow -C_f \leq f(x) \leq C_f \quad \forall x \in X$

Como existe $w_0 \in W$ tal que $w_0 \geq 0$
 $-C_f w_0(x) \leq f(x) \leq C_f w_0(x)$

$$l(-cfw_0) \in \{l(g) : f \leq g, g \in W\}$$

$$p(f) \leq l(-cfw_0) = -cf l(w_0) < +\infty$$

$$-\infty < -cf l(w_0)$$

* Sea $g \in W$ tal que $f \leq g$. Notar que

$$-cfw_0 \leq f \leq g$$

Como l es positivo $\Rightarrow l(-cfw_0) \leq l(g)$

$$\Rightarrow -cf l(w_0) \leq l(g)$$

$$-\infty < -cf l(w_0) \leq p(f)$$

Como l es positivo $\Rightarrow l(-cfw_0) \leq l(g) \Rightarrow -cf l(w_0) \leq l(g)$

\Rightarrow

literal c)

Problemas que p es homogénea positiva

Sean $\alpha > 0$ y $f \in B(X)$, $p(\alpha f) = \inf \{l(g) : \alpha f \leq g, g \in W\}$

$$= \inf \{ \alpha l(g/\alpha) : f \leq g/\alpha, g/\alpha \in W \}$$

definamos $h = g/\alpha \in W$

$$= \inf \{ \alpha l(h) : f \leq h, h \in W \}$$

$$= \alpha \inf \{ l(h) : f \leq h, h \in W \}$$

$$= \alpha p(f)$$

• p subaditivo. Sean $f_1, f_2 \in B(X)$

$$P.D. p(f_1 + f_2) \leq p(f_1) + p(f_2)$$

Por la caracterización del ínfimo, dado $\epsilon > 0$ sabemos que existen $g_1 \in W$ y $g_2 \in W$ tales que

$$f_1 \leq g_1, \quad f_2 \leq g_2$$

$$p(f_1) + \frac{\epsilon}{2} > l(g_1) \quad p(f_2) + \frac{\epsilon}{2} > l(g_2)$$

③

④

Por (1) y (2) $f_1 + f_2 \leq g_1 + g_2$, $g_1 + g_2 \in W$

$$p(f_1 + f_2) \leq l(g_1 + g_2) = l(g_1) + l(g_2)$$

$$= p(f_1) + \frac{\epsilon}{2} + p(f_2) + \frac{\epsilon}{2} = p(f_1) + p(f_2) + \epsilon$$

por (3) y (4)

$$\therefore (\forall \epsilon > 0) p(f_1 + f_2) < p(f_1) + p(f_2) + \epsilon$$

Luego, con $\epsilon \rightarrow 0$, entonces

$$p(f_1 + f_2) \leq p(f_1) + p(f_2)$$

• Supongamos que $f \leq 0$. Como W es s.e.u. de $B(X)$, entonces $0 \in W$

$$p(f) \leq l(0) = 0$$

\nwarrow linealidad

• $p(f) = l(f)$ para todo $f \in W$.

Sea f cualquiera con $f \in W$.

$$p(f) \leq l(f) \quad \text{pues } f \in W \text{ y } f \leq f$$

$$P.D. l(f) \leq p(f) \Leftrightarrow l(f) \leq l(g) \quad \forall g \in W, f \leq g$$

Pero como l es creciente si tomamos $g \in W$ tal que $f \leq g$ como l es creciente entonces

$$l(f) \leq l(g)$$

Como se quería

literal d)

$l: W \rightarrow \mathbb{R}$ lineal positivo
 $l(f) \leq p(f) \quad \forall f \in W \quad p: B(x) \rightarrow \mathbb{R}$ sublineal

Por T.H-B existe $L: B(x) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
 $L|_W = l$ y $L(f) \leq p(f) \quad \forall f \in B(x)$

P.D. $\forall f \geq 0, L(f) \geq 0$

Sea $f \geq 0$. Notemos que $-f \in B(x)$ y $-f \leq 0$.

Como

$$L(-f) \leq p(-f) \leq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0$$

Ejercicio 3.

a) $(\forall x \in E) (\exists C_x > 0) (\forall y \in F) |a(x, y)| \leq C_x \|y\|$

b) $(\forall y \in E) (\exists C_y > 0) (\forall x \in E) |a(x, y)| \leq C_y \|x\|$

Definamos $\forall x \in E \quad f_x: F \rightarrow \mathbb{R}$

$$y \mapsto f_x(y) = a(x, y)$$

$\forall x \in E \quad f_x \in F^*$ por (a)

$$(\forall x \in E) (\exists C_x > 0) (\forall y \in F) |f_x(y)| \leq C_x \|y\| \quad (*)$$

Notar que en particular

$$(\forall x \in E) (\exists C_x > 0) (\forall y \in S_F(0, 1)) |f_x(y)| \leq C_x$$

Para cada $y \in S_F(0, 1)$, $g_y: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto g_y(x) = f_x(y)$$

Notar que $\forall y \in S_F(0, 1)$, $g_y \in E^*$ y además

$$|g_y(x)| = |f_x(y)| \leq C_x$$

$\{g_y\}_{y \in S_F(0, 1)}$ es una familia en E^* acotada \vec{x} puntualmente.

Pero por el principio del acotamiento uniforme, existe $C > 0$ tal que

$$|g_y(x)| \leq C \|x\| \quad \forall x \in E \quad \forall y \in S_F(0, 1) \quad (**)$$

Sean $z \in F \setminus \{0\}$ y $x \in E$

$$|a(x, z)| = \left| \|z\| a\left(x, \frac{z}{\|z\|}\right) \right| = \|z\| |g_{z/\|z\|}(x)| \leq \|z\| C \|x\| \quad [**]$$

$$\therefore |a(x, z)| \leq C \|x\| \|z\|$$

Para $z=0$ se cumple trivialmente la desigualdad

$$\therefore (\exists C > 0) \quad \forall x \in E \quad \forall z \in F \quad |a(x, z)| \leq C \|x\| \|z\|$$

Si $a \in E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal y acotada, entonces existe $C > 0$ tal que

$$|a(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|$$

Se concluye así, que si la forma bilineal es acotada en cada componente, entonces es acotada

a bilineal acotada \Rightarrow a es acotada en cada componente

El recíproco es cierto si los espacios son de Banach.

Martes, 8 de febrero de 2022

Teorema del grafo cerrado

Sean E, F espacios de Banach.

Si $T: E \rightarrow F$ es lineal y cerrado, entonces T es cerrado.

Demostración

P.D. $(\exists C > 0) (\forall x \in E) (\|Tx\|_F \leq C \|x\|_E)$

Como $G(T)$ es un espacio normado con

$$\|(x, Tx)\|_{G(T)} = \|x\| + \|Tx\|_F$$

note que si existe $K > 0$ tal que $\|(x, Tx)\|_{G(T)} \leq K \|x\|$.

el resultado se sigue de inmediato " $\Psi(x) \implies \|\Psi(x)\|_{G(T)} \leq K \|x\|_E$ "

$$\Psi: E \rightarrow G(T)$$

$$x \mapsto (x, Tx)$$

$$\Phi: G(T) \rightarrow E$$

si Ψ es lineal y acotada, estamos listos.

* Ψ es lineal: Sean $\alpha \in \mathbb{K}$, $x_1, x_2 \in E$

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha x_1 + x_2) &= (\alpha x_1 + x_2, T(\alpha x_1 + x_2)) \\ &= (\alpha x_1, \alpha Tx_1) + (x_2, Tx_2) \\ &= \alpha(x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2) = \alpha\Psi(x_1) + \Psi(x_2) \end{aligned}$$

$$\|(x, Tx)\|_{G(T)} = \|Tx\|_F + \|x\|_E$$

Ψ es inyectiva

$$\text{Sea } x \in \text{Ker}(\Psi) \implies \Psi(x) = (0, 0) \implies (x, Tx) = (0, 0) \implies x = 0$$

Ψ es sobreyectiva

$$\text{Sea } (a, b) \in G(T), \quad a \in E \text{ y } b = Ta.$$

$$\text{Tomando } x = a \in E, \text{ se tiene que } \Psi(x) = (x, Tx) = (a, Ta) = (a, b)$$

Por lo tanto, Ψ es biyectiva. Así, existe la inversa

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}: G(T) &\rightarrow E \quad (\text{lineal y acotado}) \\ (x, Tx) &\mapsto x \end{aligned}$$

$$\|\Psi^{-1}(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\|_F = \|(x, Tx)\|_{G(T)}$$

Por el teorema de los isomorfismos de Banach, $(\Psi^{-1})^{-1}$ es acotada, por lo tanto Ψ es acota, pero esto es lo que queríamos probar.

Corolario. Sea E un espacio vectorial $(E, \|\cdot\|_1)$ y $(E, \|\cdot\|_2)$ son e. de Banach. Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son compatibles, entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

Definición

$\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son compatibles si:
($\forall (x_n)_n$ sucesión en E) ($x_n \rightarrow x$ en $(E, \|\cdot\|_1)$ y $x_n \rightarrow x$ en $(E, \|\cdot\|_2)$)
 $\implies x = y$.

Demostración (corolario)

$$\text{P.D. } (\exists \alpha > 0) (\exists \beta > 0) (\forall x \in E) \left(\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \right)$$

Así, definamos

$$\text{id}: (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$$

la cual es lineal y es cerrada.

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en E tal que $x_n \rightarrow x$ en $(E, \|\cdot\|_1)$ y $\text{id}(x_n) \rightarrow y$ en $(E, \|\cdot\|_2)$

P.D. $y = \text{id}(x)$

$$\begin{aligned} \text{Pero } x_n \rightarrow x \text{ en } \|\cdot\|_1 &\implies x = y \iff y = \text{id}(x) \\ \text{y } x_n \rightarrow y \text{ en } \|\cdot\|_2 &\implies \text{normas compatibles.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema del grafo cerrado la identidad es continua, es decir, existe

$\beta > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

Intercambiando los roles de $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en id, se sigue que $\text{id}(E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ es acotada y por lo tanto, existe $C > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$\|\text{id}(x)\|_1 \leq C \|x\|_2$$

Tomando $\alpha = 1/C > 0$, se tiene el resultado.

Corolario

Sea E espacio de Banach tal que $E = F_1 \oplus F_2$, donde F_1 y F_2 son s.e. cerrado de E

Si P_{F_1} es el operador de proyección sobre F_1 , entonces P_{F_1} es acotado.

$P_{F_1} x = a$ (operador lineal idempotente)
con $x = a + b$, $a \in F_1$ y $b \in F_2$.

Demostración

Sea $(x_n)_n$ sucesión en E tal que $x_n \rightarrow x$ en E .

P.D. $P_{F_1}(x_n) \rightarrow P_{F_1}(x)$ en E

$\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in E \Rightarrow x_n = a_n + b_n, a_n \in F_1$ y $b_n \in F_2$

↓

Idea. $x = a + b$ en E F_1 F_2 $P_{F_1} x_n = a_n \Rightarrow P_{F_1} x_n \rightarrow a$

P.D. P_{F_1} es cerrado.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_n \rightarrow x$ en E y $P_{F_1}(x_n) \rightarrow y$ en E

P.D. $P_{F_1}(x_n) = y$

$x_n = a_n + b_n \rightarrow a + b = x$ y $P_{F_1}(x_n) \rightarrow y$ en E
 $\Rightarrow a_n \rightarrow y$ en E . $(a_n)_n$ en F_1 y como F_1 es cerrado $y \in F_1$

Luego, $b_n = x_n - a_n$. Así $b_n \rightarrow \underbrace{x - y}_w$ en E $P_{F_1}(x) = a$

$(b_n)_n$ en F_2 y como F_2 es cerrado, $w \in F_2$. Así $x = y + w = a + b$

y como la representación es única $a = y$ y $b = w$.

De donde, P_{F_1} es cerrado y más aún acotado.

Capítulo 3: Cálculo diferencial en espacios normados

Sean E, F espacios normados, $\mathcal{U} \subseteq E$ abierto y $f: \mathcal{U} \rightarrow F$ función. Se dice que f es diferenciable en $x_0 \in \mathcal{U}$ si (Frechet diferenciable)

(Existe $T_{x_0} \in \mathcal{L}(E, F)$) $\frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}h\|}{\|h\|_E} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

$f'(x_0) = T_{x_0}$. la derivada de f en x_0 . (Derivada de Frechet en x_0)

$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - L \right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Lh\|}{\|h\|} = 0$

$$A(h) = f(x_0) + Lh$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Tx_0h}{\|h\|} = 0 \text{ en } F$$

Observación: 1) ¿ $x_0+h \in U$? $\forall h \in E$ $\begin{cases} \rightarrow x_0+h \in U \\ \rightarrow x_0+h \notin U \end{cases}$ U es abierto $\Rightarrow x_0+h \in U \quad \forall h \in E, \|h\| < \delta$

Se requiere esto para que el límite esté bien definido.

2) f es diferenciable en U si y solo si f es diferenciable en todo $x \in U$.

3) $f: A \subseteq E \rightarrow F$, A cualquiera.

f es diferenciable en A si existe $O \subseteq E$ abierto tal que $A \subseteq O$ y $\tilde{f}: O \rightarrow F$ diferenciable en O tal que $\tilde{f}|_A = f$.

Jueves, 10 de febrero de 2022

Proposición La derivada de Fréchet de una función en un punto E , si existe, es única.

Demostración

Sean $f: U \subseteq E \rightarrow F$ una función y $x_0 \in U$.

Supongamos que f es diferenciable en x_0 y existen T_{x_0} y $S_{x_0} \in \mathcal{L}(E, F)$ tales que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}h\|_F}{\|h\|_E} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - S_{x_0}h\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

$h \neq 0$

$$\text{Sea } h \in E, \text{ con } \|T_{x_0}h - S_{x_0}h\|_F = \|T_{x_0}h - f(x_0+h) + f(x_0+h) - f(x_0) - S_{x_0}h\|_F \\ \leq \|f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}h\|_F + \|f(x_0+h) - f(x_0) - S_{x_0}h\|_F$$

Dividiendo para $\|h\|$ y cuando $h \rightarrow 0$

$$[1] \quad \frac{\|T_{x_0}h - S_{x_0}h\|_F}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{El numerador tiende a cero más} \\ \text{rápido que el denominador} \end{array} \right.$$

P.D. $\forall w \in E, T_{x_0}w = S_{x_0}w$.

Sea $w \in E$, con $w \neq 0$. Consideremos $h_n = \alpha_n w$, donde $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha_n \rightarrow 0$.

Así $h_n \rightarrow 0$. De [1], $\frac{\|T_{x_0}h_n - S_{x_0}h_n\|_F}{\|h_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\frac{\|T_{x_0}(\alpha_n w) - S_{x_0}(\alpha_n w)\|_F}{\|\alpha_n w\|}$$

$$\frac{\|T_{x_0}w - S_{x_0}w\|_F}{\|w\|} = \frac{|\alpha_n| \|T_{x_0}(w) - S_{x_0}(w)\|_F}{|\alpha_n| \|w\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\therefore \frac{\|T_{x_0}w - S_{x_0}w\|_F}{\|w\|} = 0.$$

$$\therefore T_{x_0} = S_{x_0}.$$

Por lo tanto, la derivada de Fréchet es única.

La diferenciable depende de las normas de E y F .

Se mantiene la existencia si se reemplaza la norma por otra equivalente.

Propiedad. $f: U \subseteq E \rightarrow F$ es diferenciable en $x_0 \in U \Rightarrow f$ es localmente Lipschitz continua en $x_0 \in U$.

Definición f es localmente Lipschitz continua en $x_0 \in U$ si existen $\delta_{x_0} > 0$ y $L_{x_0} > 0$ tales que

$$\forall x \in B(x_0, \delta_{x_0}) : \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq L_{x_0} \|x - x_0\|$$

Definición f es Lipschitz continua en una vecindad de x_0 si existen $\delta_{x_0} > 0$ y $L_{x_0} > 0$ tales que

$$\forall x, y \in B(x_0, \delta_{x_0}) : \|f(x) - f(y)\|_F \leq L_{x_0} \|x - y\|_E$$

Demostración:

P.D. $(\exists \delta_{x_0} > 0) (\exists L_{x_0} > 0) (\forall x \in B(x_0, \delta_{x_0})) (\|f(x) - f(x_0)\| \leq L_{x_0} \|x - x_0\|)$

Si f es diferenciable en x_0 , entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\forall h \in E, \|h\| < \delta_1, \|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| < \|h\|$$

Considerando $x = x_0 + h$, se sigue que

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta & : \|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| \leq \|x - x_0\| \\ \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| & < \|f'(x_0)(x - x_0)\| + \|x - x_0\| \\ & \leq \|f'(x_0)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x - x_0\| + \|x - x_0\| \\ & = (\|f'(x_0)\| + 1) \|x - x_0\| \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando $\delta_{x_0} = \delta_1 > 0$ y $L_{x_0} = (\|f'(x_0)\| + 1)$, se sigue que $\forall x \in B(x_0, \delta_{x_0}) : \|f(x) - f(x_0)\| \leq L_{x_0} \|x - x_0\|$

Observación. Notar que toda función localmente Lipschitz continua en x_0 es continua en x_0 . Por lo tanto, si f es diferenciable en x_0 , entonces f es continua en x_0 .

Proposición Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. T es diferenciable en E y para todo $x \in E$, $T'(x) = T$

Demostración:

Sea $x_0 \in E$. P.D. T es diferenciable en x_0 .

P.D. Existe $S_{x_0} \in \mathcal{L}(E, F) : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|T(x_0+h) - Tx_0 - S_{x_0}h\|}{\|h\|} = 0$

→ Observación

$f: U \subseteq E \rightarrow F$ función. f es diferenciable en $x_0 \in U$

definamos $\Phi: E \rightarrow F$

$$h \mapsto \Phi(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{\|h\|} & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

Notar que si $\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(h) = 0 = \Phi(0)$. Por lo tanto, Φ es continua en cero.

Así,

$$f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)h}_{\text{aplicación afín}} + \underbrace{\|h\| \Phi(h)}_{\text{residuo}}$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = S_{x_0}h + r(h), \quad r(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad r(h) = \|h\| \Phi(h)$$

\hookrightarrow lineal

regresando a la demostración

$$\begin{aligned} T(x_0+h) - Tx_0 &= Tx_0 + Th - Tx_0 = Th + O_F \\ \Rightarrow S_{x_0} &= T \in \mathcal{L}(E, F), \quad r(h) = 0, \quad r(h) \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Norma infinita. $r = 0: E \rightarrow F, h \mapsto 0(h) = 0$

Ejercicio. Sean $p \in \mathcal{P}([0,1])$ y $T: C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto Tf = \int_0^1 p(t) f(t) dt$

$$T'(f)g = \int_0^1 p(t)g(t) dt$$

Notar que T está bien definido $E = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, $F = \mathbb{R}$ normado con 1.1.

$$\begin{aligned} \|Tf\|_\infty &= \left| \int_0^1 p(t)f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |p(t)f(t)| \\ &\leq \int_0^1 \|p\|_\infty \|f\|_\infty dt = \|p\|_\infty \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Claramente, T es lineal y acotado.

\therefore Por lo tanto, T es diferenciable en $C([0,1])$ y para todo $f \in C([0,1])$

$$T'(f) = T$$

$$T'(f): C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g \mapsto T'(f)g = Tg$$

$$T'(f)g = \int_0^1 p(t)g(t) dt$$

Notar que T' no representa la derivada de T , respecto a t .

$T'(f)$ variación de T respecto a una variación en T

Lunes 14 de febrero de 2022.

$$* f(x) = ax, \quad a \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = a \cdot 1$$

$$f(x) = a_1x + a_2x + \dots + a_nx, \quad \forall k=1, \dots, n \quad a_k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x \Rightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$* T(f) = \int_0^1 p(t)f(t) dt \Rightarrow T'(f) = \int_0^1 p(t)(\cdot) dt$$

$$T'(f): C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g \mapsto T'(f)g = \left(\int_0^1 p(t) \cdot dt \right) g$$

$$= \left(\int_0^1 p(t)g(t) dt \right)$$

$$* \left(T'(f) = \int_0^1 p(t) dt \right)$$

\hookrightarrow No es una aplicación lineal de $C([0,1])$ en \mathbb{R} .

Considerando T una función en la variable f , p como una constante respecto a f y \int como una sumatoria, se tiene lo de arriba.

En lugar de escribir \cdot , lo dejamos como un argumento a un elemento g

$$T'(f)g = \int_0^1 p(t)g(t) dt$$

Definición Sea $f: U \subseteq E \rightarrow F$ es continuamente diferenciable (en U) si f es diferenciable en U y

$$Df: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

$$x \mapsto Df(x) = f'(x)$$

es continua en U .

f es continuamente diferenciable si f es diferenciable en U con función derivada continua en U .

$C^1(U; F) := \{ f: U \subseteq E \rightarrow F : f \text{ es continuamente diferenciable (en } U) \}$

\hookrightarrow función de clase C^1

Observación:

f es diferenciable en $U \Leftrightarrow \forall x \in U, f$ es diferenciable en x

$$\Leftrightarrow (\forall x \in U) (\exists f'(x) \in \mathcal{L}(E, F) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0)$$

Se define entonces

$$g: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

$$x \mapsto g(x) = f'(x)$$

} conocida como función derivada de Fréchet de f .

- g no necesita ser lineal ni continua.
- Para poder definir la función derivada de $f: U \subseteq E \rightarrow F$, f debe ser diferenciable en U .

Ejercicio Sea $f: (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$
 $x \mapsto \text{sen}(x)$

Muestre que $f \in C^1(C([0,1]), C([0,1]))$

$$\forall t \in [0,1]: f(x)(t) = \text{sen}(x)(t) = \text{sen}(x(t))$$

$$f(x)(t) = (\text{sen} \circ x)(t)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f'(x)h = \cos(x) \cdot h = Th$$

funciones que dependen de t

Sean x, h , cualesquier funciones continuas $x, h \in C([0,1])$

$$f(x+h) - f(x) - Th = \text{sen}(x+h) - \text{sen}(x) - \cos(x) \cdot h \text{ en } C([0,1])$$

Sea $t \in [0,1]$.

$$|f(x+h)(t) - f(x)(t) - Th(t)| = |\text{sen}(x+h)(t) - \text{sen}(x)(t) - \cos(x)(t)h(t)|$$

$$= |\text{sen}(x(t)+h(t)) - \text{sen}(x(t)) - \cos(x(t))h(t)| \text{ en } \mathbb{R}$$

$$= |\text{sen}(x(t))\cos(h(t)) + \cos(x(t))\text{sen}(h(t)) - \text{sen}(x(t)) - \cos(x(t))h(t)|$$

$$\text{P.D. } \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|_\infty}{\|h\|_\infty} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \leq |\text{sen}(x(t))(\cos(h(t)) - 1)| + |\cos(x(t))(\text{sen}(h(t)) - h(t))|$$

$$\leq |\cos(h(t)) - 1| + |\text{sen}(h(t)) - h(t)|$$

$$\cos(h(t)) = 1 - \frac{h^2(t)}{2!} + \frac{h^4(t)}{4!} + \dots$$

$$\text{sen}(h(t)) = h(t) - \frac{h^3(t)}{3!} + \frac{h^5(t)}{5!} - \dots$$

Aplicando el teorema del residuo de Lagrange al coseno y seno, se tiene que existen $t_1, t_2 \in [0,1]$ tales que

$$\cos(h(t)) - 1 = -\frac{h^2(t_1)}{2}$$

$$\text{sen}(h(t)) - h(t) = -\frac{h^3(t_2)}{6}$$

$$\therefore |f(x+h)(t) - f(x)(t) - Th(t)| \leq \frac{|h(t)|^2}{2} + \frac{|h(t)|^3}{3!}$$

$$\leq \|h\|_\infty^2 + \frac{\|h\|_\infty^3}{6}$$

$$\|f(x+h) - f(x) - Th\|_\infty \leq \|h\|_\infty^2 + \frac{\|h\|_\infty^3}{6}$$

Luego, cuando $h \rightarrow 0$ $\frac{\|f(x+h) - f(x) - T_x h\|_\infty}{\|h\|_\infty} \rightarrow 0$ Notar que $f'(x)$ es lineal y acotado

$\therefore f$ es diferenciable en $C([0,1])$ con derivada $f'(x) = \cos(x)$ Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $h_1, h_2 \in C([0,1])$
 $f'(x)(\alpha h_1 + h_2) = \cos(x)(\alpha h_1 + h_2)$
 $= \alpha \cos(x)h_1 + \cos(x)h_2$
 $= \alpha f'(x)h_1 + f'(x)h_2$

Ahora, definimos

$Df: C([0,1]) \rightarrow \mathcal{L}(C([0,1]), C([0,1]))$ P.D. $(\exists c > 0)(\forall h \in C([0,1]))$
 $x \mapsto Df(x) \equiv f'(x)$ $\|f'(x)h\|_\infty \leq c \|h\|_\infty$

$\ll \forall t \in [0,1] \quad |\cos(x(t))h(t)| \leq |h(t)| \leq \|h\|_\infty \gg$

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en $C([0,1])$ tal que $x_n \rightarrow x$

P.D. $Df(x_n) \rightarrow Df(x)$ en $(\mathcal{L}(C([0,1]), C([0,1])), \|\cdot\|_\infty)$

$$\|Df(x_n) - Df(x)\|_{\mathcal{L}(C([0,1]), C([0,1]))} = \sup_{\|h\|_\infty=1} \|Df(x_n)h - Df(x)h\|_\infty$$

$$\|Df(x_n)h - Df(x)h\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |\cos(x_n(t))h(t) - \cos(x(t))h(t)|$$

$$= \max_{t \in [0,1]} |\cos(x_n(t)) - \cos(x(t))| |h(t)|$$

Por el teorema del valor medio, existe $\tilde{t} \in [0,1]$ tal que

$$|\cos(x_n(\tilde{t})) - \cos(x(\tilde{t}))| = |-\sin(x(\tilde{t}))| |x_n(\tilde{t}) - x(\tilde{t})| \leq |x_n(\tilde{t}) - x(\tilde{t})|$$

$$\therefore \|Df(x_n)h - Df(x)h\|_\infty \leq \|h\|_\infty \|x_n - x\|_\infty \quad \forall h \in C([0,1])$$

$$\Rightarrow \|Df(x_n)h - Df(x)h\|_{\mathcal{L}(C([0,1]), C([0,1]))} \leq \|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0$$

$\therefore Df(x_n) \rightarrow Df(x)$ en $\mathcal{L}(C([0,1]), C([0,1]))$

Así, la función derivada es continua. Y más aún $f \in C^1(C([0,1]), C([0,1]))$, con $f'(x) = \cos(x)$.

Definición

$$f'(x)h(t) := \underbrace{\cos(x(t))}_{\mathbb{R}} \cdot \underbrace{h(t)}_{\mathbb{R}}$$

$$= (\cos \circ x)(t) \cdot h(t)$$

\uparrow función real

$$= (\cos \circ x) \cdot h(t)$$

\uparrow producto de funciones

Martes 15 de febrero de 2022

Ejemplos.

1) $w_0 \in F$ fijo $f: \mathcal{U} \subseteq E \rightarrow F$, \mathcal{U} abierto de E
 $f \in C^1(\mathcal{U}, F)$ $x \mapsto f(x) = w_0$

$$\forall x \in \mathcal{U} \quad f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(E, F)$$

2) Sea $a \in \mathbb{R}^n$ fijo. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = a^T x = \langle a, x \rangle_{\mathbb{R}^n}$

$$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad f'(x) = \langle a, \cdot \rangle \quad f'(x)h = \langle a, h \rangle = a^T h$$

3) Sea $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ fija. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = x^T \Delta x$

$$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad f'(x)h = \langle h, \Delta x \rangle + \langle x, \Delta h \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$$f'(x)h = h^T \Delta x + x^T \Delta h$$

$$= (h^T \Delta x)^T + (x^T \Delta h) = x^T \Delta^T h + x^T \Delta h = x^T (\Delta^T + \Delta) \cdot h$$

$$f'(x) = x^T (\Delta^T + \Delta)$$

4) $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $T \in C^1(E, F)$ $T'(x) = T$

5) E, F, G sobre \mathbb{K} , espacios normados

$B: E \times F \rightarrow G$ bilineal y acotada.

$B \in C^1(E \times F, G)$

$$B'(x, y)(h, k) = \underbrace{B(x, k)}_{\in G} + \underbrace{B(h, y)}_{\in G}$$

$$B'(x, y) = B(x, \cdot) + B(\cdot, y) \quad \leftarrow \text{notación}$$

$$B'(x, y) = T_x + T_y$$

$$B'(x, y): E \times F \rightarrow G$$

$$T_y: E \times F \rightarrow G$$

$$T_x: E \times F \rightarrow G$$

$$(h, k) \mapsto T_y(h, k) = B(h, y)$$

$$(h, k) \mapsto T_x(h, k) = B(x, k)$$

$$T_x, T_y \in \mathcal{L}(E \times F, G)$$

6) Espacio prehilbertiano real

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \in C^1(E, \mathbb{R})$$

$$x \mapsto f(x) = \|x\|^2$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x)h = 2\langle x, h \rangle$$

7) $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

f es diferenciable en $E \setminus \{0\}$

$$x \mapsto f(x) = \|x\|$$

notación $\rightarrow f'(x) = \frac{x}{\|x\|}$

$$f'(x) \cdot h = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}$$

$$f'(x) = \frac{\langle x, \cdot \rangle}{\|x\|}$$

Teorema. Sean $f, g: \mathcal{U} \subseteq E \rightarrow F$

Si f, g son diferenciables en $x_0 \in \mathcal{U}$, entonces $\underbrace{\mathcal{L}(E, F)}_{\in \mathbb{K} \underbrace{\mathcal{L}(E, F)}} \underbrace{\mathcal{L}(E, F)}_{\in \mathbb{K} \underbrace{\mathcal{L}(E, F)}}$
 $(\forall \alpha \in \mathbb{K}) (\alpha f + g$ es diferenciable en $x_0 \in \mathcal{U})$ y $((\alpha f + g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + g'(x_0))$
 Más aún, si f y g son diferenciables en \mathcal{U} , entonces $\alpha f + g$ es diferenciable en \mathcal{U} y para todo $x \in \mathcal{U}$

$$(\alpha f + g)'(x) = \alpha f'(x) + g'(x)$$

Además, $C^1(\mathcal{U}, F)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

Teorema: $f, g: \mathcal{U} \subseteq E \rightarrow \mathbb{K}$ abierto \mathcal{U}

Si f, g son diferenciables en $x_0 \in \mathcal{U}$, entonces fg es diferenciable en x_0

$$(fg)'(x_0) = g(x_0)f'(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad (\text{definimos}) \quad \underbrace{\mathcal{L}(E, F)}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{\mathbb{K}}_{\in \mathbb{K}}$$

$$\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$$

Teorema. (Regla de la cadena) Sean \mathcal{U} un abierto en E y \mathcal{V} un abierto en F , entonces

$f: \mathcal{U} \subseteq E \rightarrow F$, $g: \mathcal{V} \subseteq F \rightarrow G$ tales que

$$f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V} \rightarrow (g \circ f)$$

Si f es diferenciable en $x_0 \in U$ y g es diferenciable en $f(x_0) \in V$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0)$

$$\underbrace{\in \mathcal{L}(E, G)}_{\in \mathcal{L}(F, G)} \circ \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathcal{L}(E, F)} \in \mathcal{L}(E, G)$$

Observación Los tres últimos teoremas tienen su utilidad en el abordaje de problemas de diferenciación de funciones

2) $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función derivable en $x_0 \in I$, con I un abierto (intervalo)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{|h|} = 0$$

$$f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

* Por otro lado, supongamos que f es Frechet diferenciable en $x_0 \in I$. Conocemos que existe $T_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}h|}{|h|} = 0$$

$$T_{x_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$h \mapsto T_{x_0}h := f'(x_0)h = hf'(x_0)$ T_{x_0} es lineal y acotado
valor fijo

Las nociones de derivabilidad y diferenciabilidad coinciden para funciones definidas en \mathbb{R} a valores en \mathbb{R}

Miércoles 16 de febrero de 2022

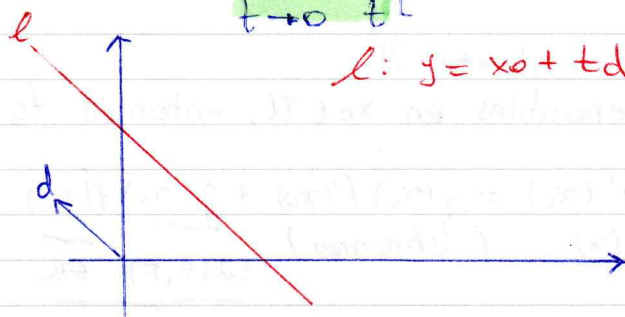
Definición Sea $f: U \subseteq E \rightarrow F$, U abierto en E .

Se dice que f posee una derivada direccional en $x_0 \in U$ y en la dirección $d \in E$, si existe

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x_0 + td) - f(x_0)] \text{ en } F$$

f posee derivada direccional en $x_0 \in U$ y en todas las direcciones si

$$\forall d \in E: \text{ existe } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x_0 + td) - f(x_0)] \text{ en } F$$



$$l: y = x_0 + td \quad t \in \mathbb{R}$$

$$G_{x_0}: E \rightarrow F$$

$$d \mapsto G_{x_0}(d) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x_0 + td) - f(x_0)]$$

G_{x_0} es una función que puede ser lineal o no lineal y continua o no

② Cuando G_{x_0} es lineal y acotada, entonces se dice que f es Gateaux diferenciable

en x_0 .
 Se denotará $f'_G(x_0)$ a la derivada de Gateaux de f en $x_0 \in U$ y en cualquier evaluada en d .

$$f'(x_0; d) = f'_G(x_0) d := G_{x_0}(d)$$

$$f'_G(x_0) = G_{x_0} \quad \text{derivada de Gateaux de } f \text{ en } x_0$$

Proposición Sea $f: U \subseteq E \rightarrow F$, U abierto en $x_0 \in U$.
 f F -diferenciable en $x_0 \Rightarrow f$ G -diferenciable en x_0 .

Demostración En este caso, la derivada de Gateaux coincide con la derivada de Fréchet.

P.D. $\exists G_{x_0} \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x_0 + td) - f(x_0)] = G_{x_0}(d)$$

Si f es Fréchet diferenciable en x_0 , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{\|h\|} = 0 \quad \text{en } F$$

Sea $d \in E$, cualquiera y consideramos los puntos $h = td$, con $t \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0) - f'(x_0)(td)}{\|td\|} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0) - t f'(x_0)(d)}{|t| \|d\|} = 0 \quad \text{en } F$$

En este paso estamos particularizando el camino que tomamos en la aproximación

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0) - t f'(x_0)(d)}{t} = 0 \quad \text{en } F$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x_0 + td) - f(x_0) - t f'(x_0)(d)}{t} \right\| = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{t} (f(x_0 + td) - f(x_0)) - f'(x_0)(d) \right\|_F = 0$$

$$\therefore \text{Existe } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + td) - f(x_0)) = f'(x_0)(d)$$

Tomando $G_{x_0} = f'(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$ se concluye que f es Gateaux diferenciable en $x_0 \in E$.

Observación: Si f es G -diferenciable, f no es necesariamente F -diferenciable.

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} x + y + x^3 y / (x^4 + x^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} x + y + x^3 y / (x^4 + x^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f es G -diferenciable en $(0, 0)$. Sea $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f((0, 0) + t(h, k)) - f(0, 0)]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [th + tk + \frac{t^3 h^3 k}{t^4 h^4 + t^2 k^2}] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{h + k + t^3 h^3 k}{t^2 [t^2 h^4 + k^2]} \right]$$

$$= h + k \quad \forall (h, k) \neq (0, 0)$$

Si $(h, k) = (0, 0)$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(0, 0) - f(0, 0)] = (0, 0)$$

$$G_{(0,0)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(h, k) \mapsto G(h, k) = h + k$$

Así, f posee derivadas direccionales en $(0, 0)$
 Todas las

Nos avn, notar que $G(0,0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Así, f es Gateaux diferenciable en $(0,0)$. Sin embargo, f no es F diferenciable en $(0,0)$.

Por contradicción, supongamos que f es Frechet diferenciable en $(0,0)$. Por lo tanto, considerando la derivada de Frechet como la derivada de Gateaux

$$f'(0,0) = f'_G(0,0),$$

se sigue que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(0,0) + (h,k) - f(0,0) - f'_G(0,0)(h,k)|}{\|(h,k)\|} = 0$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| h+k + \frac{h^3k}{h^4+k^2} - (h+k) \right|}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h^3k|}{(h^4+k^2) \|(h,k)\|}$$

$$(h,k) = (t, t^2) \quad t \rightarrow 0 \Rightarrow (h,k) \rightarrow (0,0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t^3 t^2|}{(t^4 + t^4) \sqrt{t^2 + t^4}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t^5|}{2|t| \sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \Leftarrow \text{contradicción}$$

- Observación 1** Si f es F diferenciable en x_0 , entonces f es G-diferenciable, más aún, f posee todas sus derivadas direccionales en x_0 .
- ② Si f es F-diferenciable en x_0 , entonces f es Lipschitz continua en x_0 y por ende, f es continua en x_0 .
- ③ f es G-diferenciable en x_0 y no es continua en x_0 .

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^6 + (y-x^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f es G-diferenciable en $(0,0)$ pero no es continua en $(0,0)$.

$$f'_G(0,0) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

f posee una discontinuidad esencial en $(0,0)$.

Sueves, 17 de febrero de 2022

Proposición Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow F$, I un intervalo abierto y F un espacio normado. f es G-diff en $x_0 \in I \Leftrightarrow f$ es F-dif en $x_0 \in I$.

Demostración

\Leftarrow Ya demostrado

hipótesis.

\Downarrow
 $\Rightarrow d f'_G(x_0)(t)$

$$\Rightarrow f \text{ G-diferenciable en } x_0 \in I \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x_0 + td) - f(x_0)] = f'_G(x_0)(d) \quad \forall d \in \mathbb{R}$$

P.D. Existe $T_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}h\|}{\|h\|} = 0$$

Considerando $T_{x_0} = f'_G(x_0)$, se sigue que

$$\frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'_G(x_0)(h)\|}{\|h\|} = \left\| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{f'_G(x_0)h}{h} \right\|$$

Gracias a la linealidad de la derivada de Gateaux

$$\begin{aligned}
 &= \left\| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h f'_G(x_0)}{h} \right\| \\
 f(x_0+h \cdot 1) &\leftarrow = \left\| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'_G(x_0)(1) \right\| \\
 &= \left\| \frac{f(x_0+h \cdot 1) - f(x_0)}{h} - f'_G(x_0)(1) \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

par G-dif de f en x_0

∴ f es Frechet

Observación: Notar que $f'(x_0) = f'_G(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$. Más aún, como $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \cong F$, entonces se identifica $f'(x_0)$ con su respectivo elemento en F y por lo tanto, se suele considerar $f'(x_0) \in F$. De esta manera,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)(1)\|}{|h|} = 0$$

$f'(x_0) \cdot (1) = f'(x_0) \times 1$
 $\in F = \Psi^{-1}(f'(x_0))$

Teorema fundamental del cálculo diferencial

Teorema del valor $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$ medio.

Existe $\xi \in (a, b)$ $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow |f(b) - f(a)| = |f'(\xi)| |b - a|$

¿Se cumple el TVH para funciones de un e.n. a valores en cualquier e.n.? **No**

Contraejemplo

$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (\sin(t), \cos(t))$

$\|f(0) - f(2\pi)\|_{\mathbb{R}^2} = \|(0, 1) - (0, 1)\| = 0$

$f'(t) = (\cos(t), -\sin(t))$

¿ $\exists \xi \in (0, 2\pi)$ tal que $f'(\xi) = (0, 0)$?

$\cos(\xi) = 0 \wedge -\sin(\xi) = 0$
 \Rightarrow No existe $\xi \in (0, 2\pi)$ tal que

$f(\xi) = (0, 0)$.

$f: \overline{B}(0, 2\pi) \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto e^z - 1$

$[0, 2\pi] \subseteq \overline{B}(0, 2\pi)$

$|f(0) - f(2\pi)| = 0$

¿ $\exists \xi \in (0, 2\pi)$ tal que $f'(\xi) = 0$?

$f'(z) = e^z$

¡ No es posible!

$\|f(0) - f(2\pi)\| \leq \|f'(\xi)\| 2\pi$

$|f(0) - f(2\pi)| \leq |f'(z)| 2\pi$

* $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto

¿ Se verifica la igualdad o desigualdad? **Igualdad**

Teorema (TVH) $f: U \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}$, U un abierto, E un e.n. normado
 f diferenciable en u $\Rightarrow (\forall u, v, \text{ con } [u, v] \subseteq U) (\exists \omega \in U)$

$$(f(u) - f(v) = f'(w)(u - v))$$

$$[u, v] = \{(1-\lambda)u + \lambda v : \lambda \in [0, 1]\}$$

Demostración

Hacer uso del TVM para funciones de variable real



$$z = (1-\lambda)u + \lambda v, \lambda \in [0, 1]$$

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda \mapsto g(\lambda) = f((1-\lambda)u + \lambda v)$$

• g está bien definido

• g es diferenciable en $[0, 1]$

y diferenciable en $]0, 1[$ $g = f \circ \varphi$, donde $\varphi: [0, 1] \rightarrow E$

$$\lambda \mapsto (1-\lambda)u + \lambda v$$

φ es continua en $[0, 1]$ y f es continua en U , en particular f es continua en $[u, v]$ y además $\varphi([0, 1]) \subseteq U$

Por el teorema del valor medio, existe $\lambda_0 \in (0, 1)$ tal que

$$g'(2_0) = \frac{g(0) - g(1)}{0 - 1}$$

$$\Rightarrow g(0) - g(1) = g'(2_0)$$

$$\Rightarrow f'(w) \cdot (v - u)$$

$$\Rightarrow f(v) - f(u) = f'(\varphi(2_0)) \circ \varphi'(2_0) = f'(w) \circ \varphi'(2_0)$$

$\varphi(2_0) \in [u, v]$, tomando $w = \varphi(2_0) \in (u, v) \subseteq U$

$$(u, v) = \{(1-\lambda)u + \lambda v : \lambda \in (0, 1)\}$$

$$\rightarrow f'(\varphi(2_0)) \circ \varphi'(2_0) = f'(w) \circ (v - u)$$

$$f: U \subseteq E \rightarrow F, \quad g: V \subseteq F \rightarrow G, \quad f(u) \in V$$

$$g \circ f: U \subseteq E \rightarrow G$$

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0) \text{ en } \mathcal{L}(E, G)$$

$$\in \mathcal{L}(E, G) \quad \in \mathcal{L}(F, G) \quad \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$E = F = G = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0) \text{ en } \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Sea $h \in \mathbb{R}$: $(g \circ f)'(x_0) h \in \mathbb{R}$

$$(g'(f(x_0)) \circ f'(x_0))(h) = g'(f(x_0))(f'(x_0)h)$$

$$f'(x_0)(h \cdot 1) = h f'(x_0)(1)$$

$$= g'(f(x_0))(h f'(x_0)(1)) = h g'(f(x_0))(f'(x_0)(1))$$

$$\therefore (g \circ f)'(x_0) h = h g'(f(x_0))(f'(x_0)(1))$$

$$\Rightarrow h (g \circ f)'(x_0) = h g'(f(x_0))(f'(x_0)(1))$$

$$\equiv (g \circ f)'(x_0) \equiv g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$\therefore (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Teorema: $f: [a, b] \xrightarrow{\in \mathbb{R}} F$, F espacio normado. Si f es continua y diferenciable en $[a, b]$ y $]a, b[$, respectivamente; entonces

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \sup_{\xi \in]a, b[} \|f'(\xi)\| |a - b|$$

$$\Downarrow$$

$$\left\| \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right\| \leq \sup_{\xi \in]a, b[} \|f'(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \cong F}$$

a través de la identificación $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ con F , tenemos que $f'(\xi) \in F$
 si tomamos $b = a + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ finito \leftarrow variación de f a través de un incremento finito.

$$\left\| \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right\| \leq \sup_{\xi \in]a, a+\varepsilon[} \|f'(\xi)\|$$

y si notamos $\Delta a = \varepsilon$, se tiene la forma estándar de incremento

(Notemos que $a < b$)

Demostración:

P.D. $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{\xi \in]a, b[} \|f'(\xi)\| (b-a)$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \|f(b) - f(a)\| - \sup_{\xi \in]a, b[} \|f'(\xi)\| (b-a) < \varepsilon$$

No obstante, para cada ξ , $f'(\xi)$ es un operador, por lo tanto, tenemos la familia $\{f'(\xi) \mid \xi \in]a, b[\}$.

• Así, si $\sup_{\xi \in]a, b[} \|f'(\xi)\| = +\infty$, se cumple trivialmente.

• si $\sup_{\xi \in]a, b[} \|f'(\xi)\| < +\infty$, definamos $M = \sup_{\xi \in]a, b[} \|f'(\xi)\|$

Basta mostrar que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|f(b) - f(a)\| - M(b-a) < \varepsilon.$$

Se define, para cualquier $\varepsilon > 0$, la función

$$g(x) = \|f(x) - f(a)\| - M(x-a)$$

con $x \in [a, b]$.

P.D. $g(b) < \varepsilon$

Definamos

$$A_\varepsilon = \{x \in [a, b] : g(x) \leq \varepsilon\} \subseteq [a, b]$$

P.D. $b \in A_\varepsilon$

Lunes, 21 de febrero de 2022

• $A_\varepsilon \neq \emptyset$, pues $a \in A_\varepsilon$.

P.D. A_ε está acotado superiormente

A_ε está acotado pues es subconjunto de $[a, b]$ y así está acotado superiormente

Por el axioma del supremo, existe $\alpha = \sup A_\varepsilon \in \mathbb{R}$.

P.D. $\alpha \in A_\varepsilon$

P.D. $\alpha \in [a, b]$ y $g(\alpha) \leq \varepsilon$

Por caracterización de supremo, existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sucesión en A_ε tal que

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$$

Idea si g es continua: $g(x_n) \rightarrow g(\alpha)$ $g(x_n) \leq \varepsilon \Rightarrow g(\alpha) \leq \varepsilon$

Notar que $g = \varphi \circ \psi \circ f - Mh$ en $[a, b]$, donde

$h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x-a$	$\psi: F \rightarrow F$ $y \mapsto y-f(a)$	$\varphi: F \rightarrow \mathbb{R}$ $y \mapsto \ y\ $
continua en $[a, b]$	continua en F	continua en \mathbb{R} .

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$
 por ser composición de funciones continuas.

* Como $(x_n)_n$ es una sucesión en A_ε , entonces $(x_n)_n$ es una sucesión en $[a,b]$ y como $[a,b]$ es cerrado, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a,b] \Rightarrow a \in [a,b]$.

* Por caracterización de continuidad $g(x_n) \rightarrow g(a)$ y dado que $g(x_n) \leq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por preservación de la desigualdad por paso al límite, $g(a) \leq \varepsilon$.

P.D $a = b$

Notar que $a \leq b$, supongamos que $a < b$.

Como $a \in A_\varepsilon$, entonces

$$\|f(a) - f(a)\| = H(a-a) \leq \varepsilon \quad [*]$$

Con el objetivo de usar la diferenciabilidad de f en a , probemos que $a \in (a,b)$. En efecto, como g es continua en a , existe $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (0 < x - a < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) (a < x < a + \delta \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon) \Rightarrow g(x) \leq |g(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) (a < x < a + \delta \Rightarrow g(x) < \varepsilon)$$

$$\therefore a \geq a + \delta/2 > a \quad \therefore a \in (a,b)$$

Como f es diferenciable en (a,b) , en particular, lo es en a y por tanto, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\forall x, |x - a| < \delta_1 \Leftrightarrow (a - \delta_1 < x < a + \delta_1)$

$$\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\| < \varepsilon |x-a| \quad [**]$$

Así, considerando $a < x < a + \delta_1$, se sigue que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\| + \|f'(a)(x-a)\| \\ &\leq \varepsilon |x-a| + H(a-a) + \varepsilon \\ &\leq H(x-a) + H(a-a) + \varepsilon \\ &= H(x-a) + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(a)\| - H(x-a) \leq \varepsilon \quad \forall x \in (a, a + \delta_1) \Rightarrow \Leftrightarrow$$

$$\therefore a = b$$

Teorema. - Incrementos finitos generalizado-

Sea $f: U \subseteq E \rightarrow F$, U abierto, diferenciable; entonces

$$(\forall u, v \in U \text{ con } [u, v] \subseteq U) (\|f(u) - f(v)\| \leq \sup_{\xi \in [u, v]} \|f'(\xi)\| \|u - v\|)$$

Demostración

- Caso $\sup_{\xi \in [a, b]} \|f'(\xi)\| = +\infty$: trivialmente cierto
- Caso $\sup_{\xi \in [a, b]} \|f'(\xi)\| < +\infty$:

Definamos $g: [0,1] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow F$
 $t \mapsto g(t) = f((1-t)u + tv)$

* g es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$ pues $g = f \circ h$, donde h es la función $h: [0,1] \rightarrow U \subseteq E$.
 $t \mapsto (1-t)u + tv$

la cual es continua en $[0,1]$ y f es continua en U por hipótesis.
 (diferenciable en $[0,1]$) (diferenciable en U)

* Por lo tanto, por el TIF versión 1.
 $\|g(1) - g(0)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|g'(t)\|$

Por lo tanto

$$\|f(v) - f(u)\|_F \leq \sup_{t \in (0,1)} \|g'(t)\|$$

con $g'(t) = f'((1-t)u + tv)(v-u)$

$$\|f(v) - f(u)\|_F \leq \sup_{t \in [0,1]} \|f'((1-t)u + tv)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|v-u\|_E$$

$$= \sup_{\xi \in [u,v]} \|f'(\xi)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|v-u\|_E$$

$$= \sup_{\xi \in [u,v]} \|f'(\xi)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|v-u\|_E$$

Martes, 22 de febrero de 2022

Teorema. Sea $f: U \subseteq E \rightarrow F$, con U abierto y conexo

Si f es diferenciable en U tal que $f'(x) = 0, \forall x \in U$, entonces f es constante en U . operador lineal y acotado nulo.

Demostración:

Si f es diferenciable en U , entonces f es diferenciable en todo $x \in U$.

Sean $x, y \in U$ tal que $[x, y] \subseteq U$.

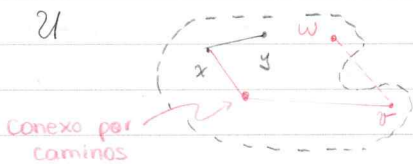
Por el teorema de incrementos finitos generalizado

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \sup_{z \in [x,y]} \|f'(z)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x-y\|_E$$

$$\therefore \|f(x) - f(y)\| \leq 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$$

Así, para cualesquier par de puntos $x, y \in U$ tales que $[x, y] \subseteq U$, se ha probado que

$$f(x) = f(y)$$

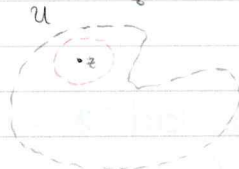


$$\text{Definamos } S = \{y \in U : f(x) = f(y)\}$$

- Si U es convexo, se sigue el resultado
- Conexidad y conexidad por caminos es equivalente y se pueden definir caminos
- U es conexo \Leftrightarrow Los únicos subconjuntos de U abiertos y cerrados simultaneamente son \emptyset y U

Veamos que S es un abierto en U : Sea $z \in S$. P.D. Existe $r > 0$ tal que $B(z, r) \subseteq S$

$$z \in S \subseteq U \text{ y } U \text{ es abierto, entonces } (\exists r > 0) (B_r(z) \subseteq U)$$



Tomando $R = r_z$, se tiene que si $w \in B(z, R)$, entonces como la $B_R(z)$ es convexa, se sigue que $[w, z] \subseteq B(z, R)$ y

$$f(w) = f(z)$$

Pero $z \in S$, con lo cual $f(z) = f(x)$.

$$\therefore f(w) = f(x) \Rightarrow w \in S.$$

Vamos que S es cerrado en U :

Notar que

$$S = f^{-1}(\{x\}) \cap U$$

\uparrow cerrado
 como f es diferenciable, es continua
 cerrado en U

Como U es conexo, entonces $S \neq \emptyset$ o $S = U$, pero $x \in S$, y por lo tanto $S = U$. Así, $f(y) = f(x) \quad \forall y \in U$.

Teorema. $f: U \subseteq E \rightarrow F$, U abierto, $x_0 \in U$.
 Si f es G -diferenciable y f'_G es continua en x_0 , entonces f es F -diferenciable en x_0 y $f'(x_0) = f'_G(x_0)$

Demostración

Sea $\epsilon > 0$. P.D. $(\exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0) (\forall h \in E)$
 $(\|h\| < \delta \Rightarrow \|f(x_0+h) - f(x_0) - f'_G(x_0)h\|_F < \epsilon \|h\|_E)$

y considerando que $f'_G: V_{x_0} \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$,

Como f'_G es continua en x_0 , entonces existen $\delta_1 = \delta_1(x_0, \epsilon) > 0$ tal que

$$\forall x \in V_{x_0}: \|x - x_0\| \leq \delta_1 \Rightarrow \|f'_G(x) - f'_G(x_0)\| < \epsilon \quad [**]$$

idea $\left\{ \begin{aligned} \|f(x_0+h) - f(x_0) - f'_G(x_0)h\|_F &\leq \|f'_G(z) - f'_G(x_0)\| \|h\|_F & z = (1-\lambda)(x_0+h) + \lambda x_0 = x_0 - \lambda h + h \\ &\leq \|f'_G(z) - f'_G(x_0)\| \|h\|_F & = x_0 + (1-\lambda)h \quad \therefore z - x_0 = (1-\lambda)h \quad \therefore \|z - x_0\| \leq \delta_1 \end{aligned} \right.$

$$\therefore \|f(x_0+h) - f(x_0) - f'_G(x_0)h\|_F < \epsilon \|h\|_E$$

Tomando $\delta = \delta_1 > 0$, se sigue lo requerido.

Así, basta mostrar $[**]$, es decir, para todo $\lambda \in [0, 1]$

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'_G(x_0)h\|_F \leq \|f'_G((1-\lambda)(x_0+h) + \lambda x_0) - f'_G(x_0)\| \|h\|_F$$

$$\leq \sup_{\lambda \in [0, 1]} \|f'_G((1-\lambda)(x_0+h) + \lambda x_0) - f'_G(x_0)\| \|h\|_F$$

Prueba como ejercicio.

Sugerencia: Considera la función
 $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $\lambda \mapsto F(\lambda)$

$$F(\lambda) = \varphi(f((1-\lambda)(x_0+h) + \lambda x_0) - f'_G(x_0)((1-\lambda)(x_0+h) - \lambda x_0))$$

donde $\varphi \in F^*$ tal que $\|\varphi\|_{F^*} = 1$ y

$$\varphi(f(x_0+h) - f(x_0) - f'_G(x_0)h) = \|f(x_0+h) - f(x_0) - f'_G(x_0)h\|_F$$

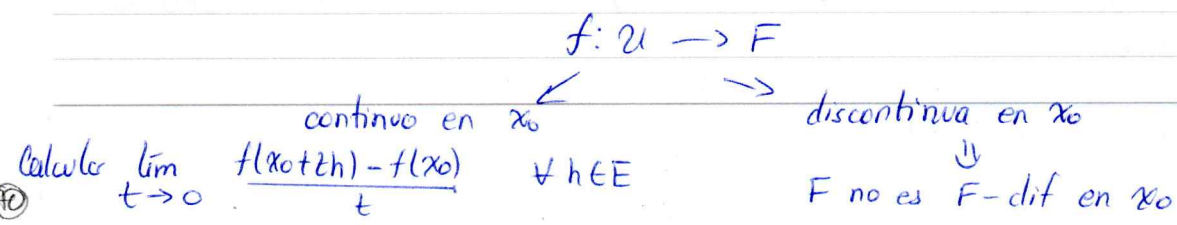
\uparrow la existencia del funcional se obtiene este funcional

y usando el teorema del valor medio.

Miércoles, 23 de febrero de 2022

Observación (Análisis de la Fréchet diferenciable de una función)

Sean $f: U \subseteq E \rightarrow F$, U un abierto y $x_0 \in U$.



Existe $f'(x_0; h) \forall h \in E$ \rightarrow no existe \lim
 $\therefore f$ no es F-dif en x_0

lineal y continua en h \rightarrow no lineal o no continua en h

$f'(x_0; h)$ es el $\therefore F$ no es F-dif en x_0
 único candidato a ser derivada de Fréchet

Calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0; h)}{\|h\|}$
 no es cero $\Rightarrow F$ no es F-dif en x_0 .
 es cero $\Rightarrow f$ es F-dif en x_0

Funciones a valores en un espacio producto.

$f: U \subseteq E \rightarrow \prod_{i=1}^m F_i$, U abierto

$\prod_{i=1}^m F_i$ espacio normado con la norma
 $\|(y_1, \dots, y_m)\| = \max\{\|y_1\|_{F_1}, \dots, \|y_m\|_{F_m}\}$
 o cualquiera equivalente

$f(x) = (y_1, \dots, y_m)$

$(\forall x \in U) (\exists! (y_1(x), \dots, y_m(x) \in \prod_{i=1}^m F_i) f(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x))$

Definamos para cada $i \in \{1, \dots, m\}$,

$f_i: U \rightarrow F_i$
 $x \mapsto f_i(x) = y_i$

* f_i se denomina la i -ésima función componente de f .

Proposición. f es diferenciable en $x_0 \in U \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, m\}) f_i$ es diferenciable en $x_0 \in U$.

En este caso,

$\forall h \in E: f'(x_0)h = (f'_1(x_0)h, \dots, f'_m(x_0)h) \in \prod_{i=1}^m F_i$

con lo cual es posible definir

$f'(x_0) = (f'_1(x_0), \dots, f'_m(x_0)) \in \prod_{i=1}^m \mathcal{L}(E, F_i)$
 $\in \mathcal{L}(E, \prod_{j=1}^m F_j)$

Has aún

$f \in C^1 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}, f_i$ es C^1

Demostación

Notar que

$\forall j \in \{1, \dots, m\}: f_j = \pi_j \circ f$

$f = \sum_{j=1}^m y_j \circ f_j$

$= (f_1(x), 0, \dots, 0) + (0, f_2(x), \dots, 0) + (0, \dots, 0, f_m(x))$

$f_j(x) = (\pi_j \circ f)(x)$

$= \pi_j(f(x))$

$= \pi_j(y_1(x), \dots, y_m(x))$

donde $\pi_j: \prod_{i=1}^m F_i \rightarrow F_j$ (Proyección función sobreyectiva canónica)

$(y_1, \dots, y_m) \mapsto y_j$

$u_j: F_j \rightarrow \prod_{i=1}^m F_i$ (Inyección canónica) función inyectiva
 $y \mapsto (0, \dots, 0, y, \dots, 0)$
 \uparrow j-ésima posición

Supongamos que en x_0 , entonces $\Rightarrow f_i = \pi_j \circ f$ es diferenciable

Supongamos que $\forall j \in \{1, \dots, m\}$ f_j es diferenciable en x_0 , entonces

$$f = \sum_{j=1}^m u_j \circ f_j \text{ es diferenciable en } x_0$$

$$f \text{ es diferenciable en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \in \mathcal{L}(E, \prod_{i=1}^m F_i)$$

$$f_j \text{ es diferenciable en } x_0 \Rightarrow f'_j(x_0) \in \mathcal{L}(E, F_j)$$

$$f'(x_0) = \sum_{j=1}^m (u_j \circ f_j)'(x_0) = \sum_{j=1}^m \underbrace{u'_j(f_j(x_0))}_{\in \mathcal{L}(F_j, \prod_{i=1}^m F_i)} \circ f'_j(x_0) = \sum_{j=1}^m \underbrace{u_j \circ f'_j(x_0)}_{\in \mathcal{L}(E, \prod_{i=1}^m F_i)} \in \mathcal{L}(E, \prod_{i=1}^m F_i)$$

$$\forall h \in E: f'(x_0)h \in \prod_{j=1}^m F_j$$

$$f'(x_0)h = \sum_{j=1}^m (u_j \circ f'_j(x_0))h = \sum_{j=1}^m u_j(f'_j(x_0)h)$$

$$= (f'_1(x_0)h, 0, \dots, 0) + (0, f'_2(x_0)h, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, f'_m(x_0)h)$$

$$= (f'_1(x_0)h, \dots, f'_m(x_0)h) \in \prod_{j=1}^m F_j$$

Podemos definir $\Psi: E \rightarrow \prod_{i=1}^m F_i$

$$h \mapsto \Psi(h) = (f'_1(x_0)h, \dots, f'_m(x_0)h)$$

$$f'(x_0) = \Psi$$

$$u_j: \mathcal{L}(E, F_j) \rightarrow \prod_{i=1}^m \mathcal{L}(E, F_i)$$

$$T \mapsto (0, \dots, 0, T, 0, \dots, 0)$$

$$\sum_{j=1}^m u_j(f'_j(x_0)) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_m(x_0)) := f'(x_0)$$

Notación

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \prod_{i=1}^m F_i \leftarrow \text{espacio producto de las funciones}$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$$

$$f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \text{ es } C^1 \Leftrightarrow f: U \subseteq E \rightarrow \prod_{i=1}^m F_i \text{ es diferenciable en } U$$

$$Df: U \rightarrow \mathcal{L}(E, \prod_{i=1}^m F_i) \text{ continua en } U.$$

$$f_j \text{ es } C^1 \Leftrightarrow f_j: U \subseteq E \rightarrow F_j \text{ es diferenciable en } U$$

$$Df_j: U \in \mathcal{L}(E, F_j)$$

Basta probar que si $f: U \subseteq E \rightarrow F$, $g: V \subseteq F \rightarrow G$, $f(U) \subseteq V$. U un abierto en E y V un abierto en F .

Si f y g son C^1 , entonces $g \circ f$ es C^1

Observación $f \in C^1 \Leftrightarrow f \in C^1(U, F)$ $g \in C^1 \Leftrightarrow g \in C^1(V, G)$
 $g \circ f \in C^1(U, G)$

Funciones definidas de un abierto de un espacio producto. (E_1, \dots, E_m, F) e.n.

$$f: U \subseteq \prod_{i=1}^m E_i \rightarrow F, \quad U \text{ es un abierto.}$$

Sea $a \in U$, $a = (a_1, \dots, a_m)$ (m -upla del producto cartesiano)

Se define la i -ésima aplicación parcial de f en a

$$\begin{aligned} \psi_i: U_i &\rightarrow F \\ x &\mapsto \psi_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_m) \end{aligned}$$

donde U_i es un abierto en E_i , definida por

$$U_i = \{x \in E_i : (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_m) \in U\} \leftarrow \text{probar que es abierto}$$

Notar que $a_i \in U_i$

Si ψ_i es diferenciable en a_i , entonces se dice que f posee derivada parcial con respecto a la i -ésima variable en $a = (a_1, \dots, a_m)$

Notación

Cuando no se ha especificado (la notación para el argumento de F)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad f'_{x_i}(a), \quad D_i f(a), \quad d_i f(a)$$

En el caso de que $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ con $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m E_i$

Notar que si existe la derivada parcial de f respecto a la i -ésima variable en a , entonces $D_i f(a) \in \mathcal{L}(E_i, F)$
 $D_i f(a) = \psi_i'(a_i) \in \mathcal{L}(E_i, F)$

Teorema. Sea $f: U \subseteq \prod_{i=1}^m E_i \rightarrow F$, U abierto

f diff en $a \in U$, entonces $\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}$, existe $D_i f(a)$ y $\forall h = (h_1, \dots, h_m) \in \prod_{i=1}^m E_i$

$$f'(a)h = \sum_{i=1}^m \underbrace{D_i f(a)}_{\in \mathcal{L}(E_i, F)}(h_i) \in F$$

$$* f'(a) \in \mathcal{L}\left(\prod_{i=1}^m E_i, F\right)$$

Miércoles, 2 de marzo de 2022.

Demostración: consideremos para cada i

$$\begin{aligned} \Psi_i: E_i &\rightarrow \prod_{i=1}^m E_i \\ x &\mapsto \Psi_i(x) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_m) \end{aligned}$$

Notar que $\psi_i = (f \circ \Psi_i)(x)$
 $d \Psi_i$ es lineal? **No**

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) &= (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_m) \\ &= (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + x - a_i, a_{i+1}, \dots, a_m) \\ &= a + (0, \dots, 0, x - a_i, 0, \dots, 0) \\ &= a + u_i(x - a_i) = a + u_i(x) - u_i(a_i) = \underbrace{a - u_i(a)}_{\text{constante}} + \underbrace{u_i(x)}_{\text{aplicación lineal}} \end{aligned}$$

\leftarrow es diferenciable por ser la suma de aplicaciones diferenciables:
> constante
> lineal.

Aplicando la regla de la cadena, se tiene que ψ_i es diferenciable en a_i y

$$\psi_i'(a_i) = f'(\psi_i(a_i)) \circ \psi_i'(a_i)$$

$$\therefore D_i f(a) = f'(a) \circ \psi_i'$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\forall h = (h_1, \dots, h_m) \in \prod_{i=1}^m E_i : \sum_{k=1}^m D_k f(a) h_k = \sum_{k=1}^m f'(a)(\psi_k(h_k))$$

$$= f'(a) \left(\sum_{k=1}^m \psi_k(h_k) \right)$$

$$= f'(a)(h) = f'(a)h$$

Observación: Es posible usar esta notación

$$f'(a)h = \underbrace{(D_1 f(a) \quad D_2 f(a) \quad \dots \quad D_m f(a))}_{\mathcal{L}(E_1, F)} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

No se está multiplicando sino evaluando en el vector fila, los elementos del vector columna.

$$= D_1 f(a)h_1 + D_2 f(a)h_2 + \dots + D_m f(a)h_m.$$

Observación: La existencia de todas las derivadas parciales de una función en un punto no implica que la función sea diferenciable en dicho punto (derivadas parciales es un concepto más débil o equivalentemente)

Ejemplo

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Notar que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Análogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

No obstante, f no es continua en $(0, 0)$, pues no existe el límite.

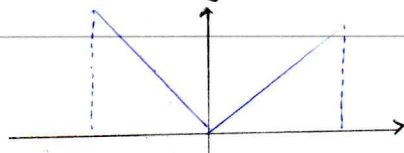
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

$$y = 0 : \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$$

$$y = x : \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Más aún, de esto se sigue que f no es Fréchet diferenciable

$f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$ y sin embargo, f tiene mínimo en $x = 0$.



Observación. $f: \mathcal{U} \subseteq \prod_{i=1}^m E_i \rightarrow F$, \mathcal{U} un abierto y $x_0 \in \mathcal{U}$
 Si para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $D_i f(x_0)$, se define el gradiente de f en x_0 , $\nabla f(x_0)$
 por

$$\nabla f(x_0) = (D_1 f(x_0), \dots, D_m f(x_0)) \in \prod_{k=1}^m \mathcal{L}(E_k, F)$$

f es diferenciable en $x_0 \in \mathcal{U}$, entonces

$$\forall h \in \prod_{i=1}^m E_i : f'(x_0)h = \nabla f(x_0)^T(h)$$

$$f'(x_0)h = (D_1 f(x_0), \dots, D_m f(x_0)) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

↳ operación de evaluación (no producto).

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f'(x_0)h = \nabla f(x_0) \cdot h = \nabla f(x_0)^t h$$

producto interno
↑
producto matricial

Teorema. - Condiciones suficientes de F-diff-

Sean $f: \mathcal{U} \subseteq \prod_{i=1}^m E_i \rightarrow F$, \mathcal{U} un abierto y $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{U}$.

Si para cualesquiera $m-1$ derivadas parciales $D_k f$ existen en $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ y son continuas en a , y la restante derivada parcial existe en a , entonces f es F-diff en a .

Demostración

P.D.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^m D_k f(a)h_k\|}{\|h\|} = 0$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $D_1 f$ existe en a y $D_2 f, \dots, D_m f$ existen en \mathcal{V} y son continuas en a . Sea $h = (h_1, \dots, h_m) \in \prod_{i=1}^m E_i$

$$\forall i \quad D_i f(a) \text{ existe} : \frac{f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)}{\varphi_i(a_i + h_i) - \varphi_i(a_i)} = D_i f(a)h_i + \|h_i\| e(a_i, h_i) \xrightarrow{h_i \rightarrow 0} 0$$

$f(a+h) - f(a) = f(a_1 + h_1, \dots, a_m + h_m) - f(a_1, \dots, a_m)$. Notar que

$$a+h = a + \sum_{k=1}^m \mathcal{U}_k(h_k), \text{ con } \mathcal{U}_k \text{ la } k\text{-ésima inyección canónica con la cual}$$

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^m [f(a + \mathcal{U}_k(h_k)) - f(a + \mathcal{U}_{k-1}(h_{k-1}))]$$

donde $w_0 = 0 \in \prod_{i=1}^m E_i$

$$w_k = w_{k-1} + \mathcal{U}_k(h_k) \quad k=1, \dots, m$$

Notar que para $k=1$,

$$f(a+w_1) - f(a+w_0) = f(a + \mathcal{U}_1(h_1)) - f(a) = f(a_1 + h_1, a_2, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)$$

$$= D_1 f(a)h_1 + \|h_1\| e(a_1, h_1) \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0} 0$$

Para $k \geq 2$, $f(a+w_k) - f(a+w_{k-1}) = f(a + w_{k-1} + \mathcal{U}_k(h_k)) - f(a+w_{k-1})$

Notar que $a+w_{k-1}$ y $a+w_{k-1} + \mathcal{U}_k(h_k)$ difieren en la componente k y dado que f es derivable parcialmente en \mathcal{V} $k \geq 2$, se sigue que:

$$\|f(a+w_{k-1} + \mathcal{U}_k(h_k)) - f(a+w_{k-1}) - D_k f(a)(h_k)\| \leq \sup_{\xi \in [b_k, b_k + \mathcal{U}_k(h_k)]} \|D_k f(\xi) - D_k f(a)\| \|h_k\|$$

$$b_k = a + w_{k-1}$$

Como $w_k = w_{k-1} + \mathcal{U}_k(h_k)$ y \mathcal{U}_k es continua en E_k , entonces

$$\begin{aligned}
 h_k \rightarrow 0 &\Rightarrow w_k \rightarrow w_{k-1} \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \\
 &\Rightarrow w_k \rightarrow 0 \\
 &\Rightarrow b_k \rightarrow a \\
 &\Rightarrow \xi \rightarrow a
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $D_x f$ es continua en a , entonces

$$\|D_x f(\xi) - D_x f(a)\| \rightarrow 0 \quad \xi \rightarrow a$$

Finalmente, haciendo $h \rightarrow 0$, se sigue que $h_i \rightarrow 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$ y por lo tanto

$$\|f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^m D_x f(a) h_k\| \leq \|h\| \|e(a, h)\| + \sum_{k=2}^m \sup_{\xi \in [b_k, b_k + u_k(h_k)]} \|D_x f(\xi) - D_x f(a)\| \|h_k\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^m D_x f(a) h_k\|}{\|h\|} \leq \underbrace{\|e(a, h)\|}_{\rightarrow 0 \text{ } h \rightarrow 0} + \sum_{k=2}^m \sup_{\xi \in [b_k, b_k + u_k(h_k)]} \|D_x f(\xi) - D_x f(a)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Observación: La continuidad de las derivadas parciales, aunque es una condición suficiente, no es una condición necesaria para la diferenciable de una función.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Teorema $f: U \subseteq \prod_{i=1}^m E_i \rightarrow F$, U un abierto
 f es C^1 en $U \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}$. $D_i f$ existe y es continua en U .

Teorema. $f: U \subseteq \prod_{i=1}^m E_i \rightarrow \prod_{j=1}^n F_j$, U abierto, una función tal que $f = (f_1, \dots, f_n)$
 Si f es diferenciable en $a \in U$, entonces $\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ $D_i f_j(a)$ existen y

$$f'(a)h = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_m f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_n(a) & \dots & D_m f_n(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

Además,
 f es C^1 en $U \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ $D_i f_j$ existe y es continua en U .

Lunes, 6 de agosto de 2022.

$$f'(a)(h_1, \dots, h_m) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) h_i, \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) h_i \right)$$

Demostración

Combinación directa de los resultados establecidos para funciones a valores en un espacio producto y para funciones definidas en un espacio producto.

Capítulo I: Familias ortonormales y bases hilbertianas.

$\forall x, y, z \in E$
 $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

- Control 1 20%
- Control 2 30%
- Actividades Grupales 20%
- Exposiciones 20%
- 100%

- $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in E$
- $\langle x + \alpha y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \alpha \langle y, z \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

$\mathbb{P}^n \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot)$

$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$

$\ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow (\ell^2(\mathbb{C}), \mathbb{C}, +, \cdot)$

espacios vectoriales $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$

complejos $(*) \langle u, v \rangle = \int_a^b u(x) \overline{v(x)} dx, \|u\| = \left[\int_a^b |u(x)|^2 dx \right]^{1/2}$

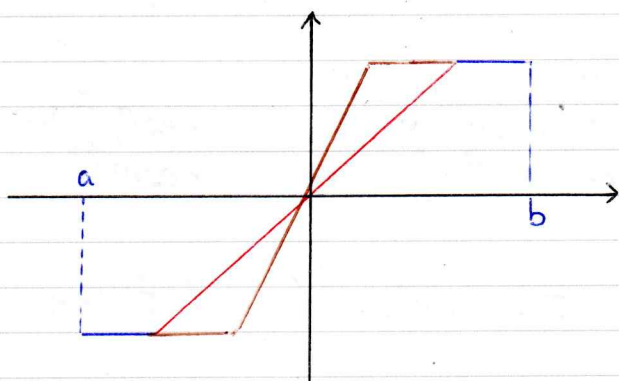
$C^0([a, b]) \rightarrow (C^0([a, b]), \mathbb{C}, +, \cdot)$

Un espacio métrico no requiere estructura algebraica.

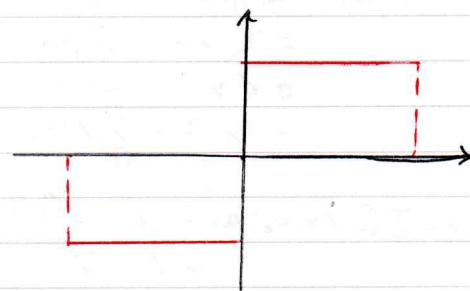
Los ejemplos anteriores son espacios pre-hilbertianos o espacios con producto interno.

\mathbb{C}^n y $\ell^2(\mathbb{C})$ son espacios de Hilbert.

$C^0([a, b])$ no es un espacio de Hilbert. \leftarrow Si no es de Hilbert, la sucesión puede converger pero fuera del espacio $C^0([a, b])$



si $n \rightarrow +\infty$
entonces



$C^0([a, b])$ con $\|u\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |u(x)|$ es un espacio de Banach. (No es prehilbertiano, se puede comprobar esto con la identidad del paralelogramo)

Una primera idea nos lleva a pensar que el completado

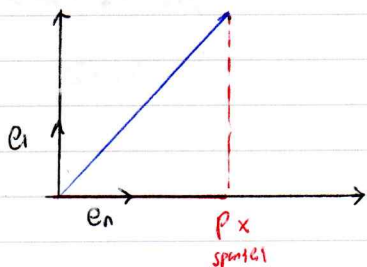
del espacio $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_{\infty})$ son las funciones Riemann Integrables. $(\mathcal{R}([a, b]))$

¿Es $\mathcal{R}([a, b])$ es completado? ¡No!

El espacio $L^2(a, b)$ es el completado de $C^0([a, b])$ con la norma dada por $\|u\|^2 = \int_a^b |u(x)|^2 dx$ donde \rightarrow es un espacio de Hilbert

la medida de Lebesgue

Proposición Sean E un espacio prehilbertiano y $\{e_n\}_n$ una familia ortonormal $\forall x \in E \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \right)$



$P_{\text{span}\{e_1\}} x = \langle x, e_1 \rangle e_1$

$y = P_{\text{span}\{e_1\}} x = \alpha \cdot e_1$

$\langle x - y, z \rangle = 0 \quad \forall z \in \text{span}\{e_1\}$

$\hookrightarrow \langle x - \alpha e_1, z \rangle = 0 \quad \forall z \in \text{span}\{e_1\}$

$\rightarrow \langle x, z \rangle - \alpha \langle e_1, z \rangle = 0 \quad \forall z \in \text{span}\{e_1\}$

En particular, con $z = e_1$,

$\langle x, e_1 \rangle = \alpha$

si e_1 no fuera normal

$\Rightarrow \alpha = \frac{\langle x, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2}$

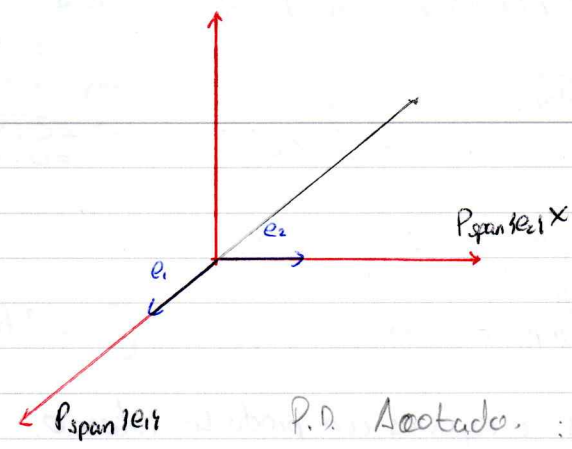
Luego,

$P_{\text{span}\{e_2\}} x = \langle x, e_2 \rangle e_2$

$\| \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 \|^2 = \langle x, e_1 \rangle^2 + \langle x, e_2 \rangle^2 = \|x\|^2$

Ahora, como $\{e_1, e_2\}$ es una base en \mathbb{R}^2 , entonces se tiene la igualdad, en general, se tiene solo la desigualdad.

Si $\{e_k\}$ es una base ortonormal, entonces la desigualdad de Bessel se cumple con igualdad. (Identidad de Parseval)



P.D. $\forall x \in E \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Sea $x \in E$, cualquiera. Notemos.

$S_n = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$
(sucesión de sumas parciales)

P.D. $(S_n)_n$ es convergente. (Idea convergencia monótona)

P.D. Monótona y acotada.
 $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} |\langle x, e_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 = |\langle x, e_{n+1} \rangle|^2 \geq 0$
monótona.

P.D. Acotado: $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leq U$, con $U = \|x\|^2$

$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 = |\langle x, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle x, e_n \rangle|^2$

$\|x - S_n\|^2 = \|x - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2\|^2$
 $= \langle x - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2, x - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \rangle$
 $= \langle x, x \rangle - \langle \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2, x \rangle - \langle x, \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \rangle + \langle \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2, \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \rangle$
 $= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \langle |\langle x, e_k \rangle|^2, x \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, |\langle x, e_k \rangle|^2 \rangle + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle |\langle x, e_k \rangle|^2, |\langle x, e_j \rangle|^2 \rangle$

$\|x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 = \langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \rangle$
 $= \langle x, x \rangle - \langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, x \rangle - \langle x, \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \rangle + \langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \rangle$
 $= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \langle \langle x, e_k \rangle e_k, x \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, \langle x, e_k \rangle e_k \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \langle x, e_k \rangle e_k, \langle x, e_k \rangle e_k \rangle$
 $= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} + \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle e_k, e_k \rangle$
 $= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$
 $= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$
 $\Rightarrow 0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Así, se sigue que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Por lo tanto, $(S_n)_n$ es monótona y acotada; así, $(S_n)_n$ es convergente; por lo tanto, la serie

$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ es convergente y como es acotada por $\|x\|^2$, se sigue el resultado. En efecto

$S_n \leq \|x\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \|x\|^2$
 $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Miércoles 18 de mayo de 2022.

ctp.

Ejercicio: Sean $L_f = \{ \varphi \in L^2(-a, a) : \varphi(x) = -\varphi(-x) \}$ $a \in \mathbb{R}$
 $L_p = \{ \varphi \in L^2(-a, a) : \varphi(x) = \varphi(-x) \}$

Mostré que L_f y L_p son ortogonales

1) Muestre que L_p es el complemento ortogonal de L_I

2) Halle la proyección de $u \in L^2(-a, a)$ sobre L_p

$$L^2(-a, a) = \overline{C^0([-a, a])}^{\|\cdot\|_2}, \text{ donde } \|u\|_2 = (\langle u, u \rangle_2)^{1/2} \text{ y } \langle u, v \rangle = \int_{-a}^a u(x)v(x) dx$$

1) P.D. L_I y L_p son ortogonales.

P.D. $\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in L_I \text{ y } \forall v \in L_p.$

$$A \oplus B = E$$

Sean $\varphi \in L_I$ y $\psi \in L_p$, cualesquiera, notemos que.

$$\langle \varphi, \psi \rangle_2 = \int_{-a}^a \varphi(x)\psi(x) dx.$$

Tomar en cuenta las notaciones de medida

Luego, definiendo $h(x) = \varphi\psi(x)$

$$h(-x) = (\varphi\psi)(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = -\psi(x)\varphi(x) = -h(x)$$

2) P.D. $L_I^\perp = L_p$

P.D. $L_I^\perp \subseteq L_p$ y $L_p \subseteq L_I^\perp$

P.D. $L_p \subseteq L_I^\perp$

Sea $\varphi \in L_p$ P.D. $\psi \in L_I$, $\langle \varphi, \psi \rangle_2 = 0$ Probadado en (1)

P.D. $L_I^\perp \subseteq L_p$

Sea $\varphi \in L_I^\perp$ P.D. $\psi \in L_p$ P.D. $\varphi(x) = \varphi(-x)$

$\forall \psi \in L_I \quad \langle \varphi, \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-a}^a \varphi(x)\psi(x) dx = 0$

$$\Leftrightarrow \int_{-a}^0 \varphi(x)\psi(x) dx + \int_0^a \varphi(x)\psi(x) dx$$

$x = -t \quad - \int_a^0 \varphi(-t)\psi(-t) dt + \int_0^a \varphi(x)\psi(x) dx = 0$

$$\int_0^a \varphi(-t)\psi(-t) dt + \int_0^a \varphi(x)\psi(x) dx = 0$$

$$- \int_0^a \varphi(-t)\psi(t) dt + \int_0^a \varphi(x)\psi(x) dx = 0$$

$$\int_0^a \psi(x) (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx = 0$$

Definimos
 $f_1(x) = \varphi(x) - \varphi(-x)$
 $f_1(-x) = \varphi(-x) - \varphi(-(-x))$
 $= -(\varphi(x) - \varphi(-x))$
 $= -f_1(x)$

Tomando $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(-x)$, entonces $\int_0^a (\varphi(x) - \varphi(-x))^2 dx = 0$ a.a.

$$\|\varphi - \varphi^{-}\|_{L^2(0, a)} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \varphi^{-} \text{ c.t.p.}$$

Por otro lado sabiendo que

$$\int_{-a}^0 \varphi(x)\psi(x) dx + \int_0^a \varphi(x)\psi(x) dx$$

cambiando $x = -t \rightarrow \int_{-a}^0 (\varphi(x) - \varphi(-x))^2 dx = 0 \Leftrightarrow \|\varphi - \varphi^{-}\| = 0$
(2490)

$$\Rightarrow \varphi = \varphi^{-} \text{ c.t.p. } (-a, 0)$$

Por [1] y [2],

$\varphi(x) = \varphi(-x)$ c.t.p.

(literal c)

$L^2(-a, a)$ es un espacio de Hilbert

$$L^2(-a, a) = L_p \oplus L_p^\perp$$

Gracias al teorema de la proyección, tomando $u \in L^2(-a, a)$, cualquiera.

$$u = u_1 + u - u_1$$

con $u_1 = P_{L_p} u \in L_p$

$$\in \widetilde{L_p} \quad \in \widetilde{L_p^\perp}$$

De forma análoga a lo demostrado en 2), se prueba que $L_p^\perp = L_I$ y por lo tanto

$$L^2(-a, a) = L_p \oplus L_I$$

Para cualquier $u \in L^2(-a, a)$, se tiene que $u = u_1 + u_2$, con $u_1 \in L_p$ y $u_2 \in L_p^\perp$. [*]

Dado que L_p es s.e.v. cerrado, gracias al T. Proyección y por [*] $P_{L_p} u = u_1$. Notar que $u_2 = u - u_1$ y como $u_1 \in L_p$, entonces $u_1(x) = u_1(-x)$; así

$$u(x) - u_2(x) = u(-x) - u_2(-x)$$

$$= u(-x) + u_2(x) \quad u_2 = \frac{u(x) - u(-x)}{2}$$

Así,

$$u_1(x) = \frac{u(x) + u(-x)}{2}$$

Viernes, 13 de mayo de 2022.

E un e. prehilbetiano.

• $\{e_i\}_{i \in I}$ familia ortonormal $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

• $\{e_i\}_{i \in I}$ familia ortonormal maximal

$$\langle x, e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I \Rightarrow x = 0$$

• $\{e_i\}_{i \in I}$ es un conjunto total si $\text{span} \{e_i\}_{i \in I} = E$ } Todo vector en E se puede aproximar a través de una combinación lineal de elementos de la familia.

$$\text{span} \{e_i\}_{i \in I} = \left\{ \sum_{j \in J} \alpha_j e_j : \alpha_j \in \mathbb{K} \quad t_j \in J, \# J \subseteq I \text{ finito} \right\}$$

Ejemplos: básicos sobre familias ortonormales.

① $C^0([-1, 1], \mathbb{C})$ $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$
 $f_n = x^n, n \in \mathbb{N}_0$ familia L.I. } Aplicando G.S. se obtiene los polinomios de Legendre como

$$e_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Más aún, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una familia ortonormal en $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$

② $C_{\text{per}}^0([-L, L], \mathbb{R})$ con $L > 0$ $\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x) g(x) dx$

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n \in \mathbb{N} \right\}$ es una familia ortonormal en $C_{\text{per}}^0([-L, L], \mathbb{R})$.

Más aún, dicha familia es ortonormal en $L^2([-L, L], \mathbb{R})$.

$C_{\text{per}}^0([-L, L], \mathbb{C})$ $\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x) \overline{g(x)} dx$ } $\frac{1}{\sqrt{2L}} e^{\frac{i k \pi x}{L}} : k \in \mathbb{Z}$ } una familia ortonormal.

en $C_{\text{per}}^0([-L, L], \mathbb{C})$ y más aún en $L^2([-L, L], \mathbb{C})$

③ $L^2(0, +\infty)$ $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x) g(x) dx$

Consideramos la familia L.I. $f_n(x) = e^{-x/2} x^n, n \in \mathbb{N}_0$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ familia L.I. Aplicando G-S, se obtienen las funciones de Leguerre, definidas por

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^{x/2} \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}] \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$(L_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una familia ortogonal $L^2(0, +\infty)$

④ $L^2(\mathbb{R})$ $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx$

$f_n(x) = e^{-x^2/2} x^n, n \in \mathbb{N}_0$. $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad f_n \in L^2(\mathbb{R})$. Y, aplicando G-S, se obtienen las funciones de Hermite definidas por

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! \sqrt{2\pi}} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}], \quad n \in \mathbb{N}_0$$

(An)_{n \in \mathbb{N}} es una familia ortonormal en L^2(\mathbb{K})
Proposición: Sea E un espacio prehilbertiano y \{e_i\}_{i \in I} una familia ortonormal en E
\{e_i\}_{i \in I} gto total \Rightarrow \{e_i\}_{i \in I} maximal.

Observación: Todas las familias de los ejemplos anteriores son maximales en sus respectivos espacios, cuya demostración está basada en la proposición anterior.

Demostración

P.D. \langle x, e_i \rangle = 0 \forall i \in I \Rightarrow x = 0

Supongamos que \langle x, e_i \rangle = 0 \forall i \in I P.D. x = 0

$$\langle x, e_i \rangle = 0 \forall i \in I \Leftrightarrow x \in (\text{span}\{e_i\}_{i \in I})^\perp = (\text{span}\{e_i\}_{i \in I})^\perp$$

$$x \in (\text{span}\{e_i\}_{i \in I})^\perp = E^\perp = \{0\}$$

$$\therefore x = 0$$

Obs: El recíproco de la proposición anterior es cierto si E es un e. Hilbert.

$$E = (\text{span}\{e_i\}_{i \in I}) \oplus (\text{span}\{e_i\}_{i \in I})^\perp$$

← por definición de familia maximal.

$$(\text{span}\{e_i\}_{i \in I})^\perp = (\text{span}\{e_i\}_{i \in I})^\perp = \{e_i\}_{i \in I}^\perp = \{0\}$$

Teorema. (Sea E un e. prehilbertiano) Todo espacio prehilbertiano posee al menos una familia ortonormal maximal.

Sea E un espacio prehilbertiano ← **exposición**

① E es separable. A través del proceso de ortogonalización de G-S y aplicando revisión se prueba la maximalidad de dicha familia. En dimensión finita una familia ortonormal maximal es una base de Hilbert

② Si E no es separable, usar lema de Zorn. ? ortonormal maximal es una base de Hilbert

Supongamos que E es de dimensión infinita.

Definamos

$$\mathcal{F} = \{ \underbrace{(f_i)_{i \in I}}_{\substack{\text{flia ortonormal} \\ \{e_1, e_2\} \in \mathcal{F}}} \mid \text{flia ortonormal } (f_i)_{i \in I} \text{ contiene a } \{e_1, e_2\} \text{ donde } e_1 \perp e_2, \|e_1\| = \|e_2\| = 1 \}$$

→ Definimos la relación de orden parcial sobre \mathcal{F} por la contención.

$$F_i \leq F_j \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} F_i \subseteq F_j \quad \text{def de teoría de conjuntos.}$$

Sea A \in \mathcal{F} total ordenado, con $\{A_i\}_{i \in I} \in \mathcal{F}$ tal que $A_i \subseteq A_{i+1}$

P.D. (\exists B \in \mathcal{F}) (\forall F \in A) (F \subseteq B)

Definamos

$$B = \bigcup_{A \in A} A \quad \text{P.D. } B \in \mathcal{F}$$

Para ver que B es ortonormal, se debe probar que si f_i, f_j \in B \langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}

$$\left. \begin{array}{l} f_i \in B \Rightarrow \exists A_i \in A \text{ tq } f_i \in A_i \\ f_j \in B \Rightarrow \exists A_j \in A \text{ tq } f_j \in A_j \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Como } A \text{ es totalmente ordenado} \\ A_i \leq A_j \text{ o } A_j \leq A_i \end{array}$$

① A_i \leq A_j \langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \text{ pues } A_j \text{ es una familia ortonormal } f_i, f_j \in A_j

Lunes, 16 de mayo de 2022.

P.D. A es una familia ortonormal maximal.

A es una familia ortonormal pues A \in \mathcal{F}

Denotemos A = \{e_i\}_{i \in I}. P.D. \langle x, f_i \rangle = 0 \forall i \in I \Rightarrow x = 0

Supongamos por contradicción que x \neq 0. Definamos

$$B = A \cup \{x/\|x\|\}$$

Así, B es una familia ortonormal que contiene a \{e_i, e_1\}; Así, B pertenece a \mathcal{F}, i.e.,

$$B \in \mathcal{F}$$

Notar que A \subsetneq B y por definición de elemento maximal, B = A \Rightarrow \Leftarrow

Teorema (Existencia de bases hilbertianas en espacios de Hilbert separable)

① Sea H un espacio de Hilbert separable

Si $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia ortonormal maximal, entonces $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base

hilbertiana de H , es decir,

$$(\forall x \in H) (\exists! (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ familia en } \mathbb{K}) \text{ tal que } x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n$$

Has aún, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \langle x, e_n \rangle$ (coeficientes de Fourier). Además, $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2$

Demostración

↳ Etapa 1. Probar que si $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base Hilbertiana, entonces $d_n = \langle x, e_n \rangle$

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \langle x, e_n \rangle$$

$$x \in H \Rightarrow \text{span} \{e_1, e_2, \dots\}$$

Demostración en las notas anteriores

Teorema. Sea H un espacio pre-Hilbertiano.

- 1) Si H es separable, entonces toda familia ortonormal es contable
- 2) Supongamos que H es un espacio de Hilbert; contable. si existe una familia ortonormal maximal, entonces H es separable.

Demostración

Supongamos que H es separable.

P.D. \exists familia ortonormal es contable.

P.D. I es un conjunto contable

P.D. Existe una función inyectiva de I a \mathbb{N} , digamos $\varphi: I \rightarrow \mathbb{N}$.

Como H es separable, existe D un subconjunto denso y numerable, es decir, existe $D = \{d_1, \dots\}$ tal que $\overline{D} = H$. Como D es numerable, existe

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow D$$

$$i \mapsto \varphi(i) = d_i$$

Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una familia ortonormal.

Demostración en los apuntes

P.D. $(\exists D \subseteq H \text{ contable}) (\overline{D} = H)$

Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base de Hilbert de H ; así

$$(\forall x \in H) (x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n)$$

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Definamos

$$D = \left\{ \sum_{j \in S} d_j e_j : d_j \in \mathbb{Q} \forall j \in S, \#S \subseteq \mathbb{N} \text{ finito} \right\}$$

$$= \bigcup_{\substack{S \subseteq \mathbb{N} \\ \#S \text{ finito}}} \left\{ \sum_{j \in S} d_j e_j : d_j \in \mathbb{Q} \forall j \in S \right\}$$

$$D = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \quad |S| = 1 \quad d_1 e_1$$

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \quad |S| = 2 \quad d_1 e_1 + d_2 e_2$$

Notas, 17 de mayo de 2022.

P.D. Existe $C \subseteq H$ contable tal que $\overline{C} = H$

Definamos

$$C = \left\{ \sum_{j \in S} d_j e_j : d_j \in \mathbb{Q} \forall j \in S, \#S \subseteq \mathbb{N} \text{ finito} \right\}$$

Notar que

$$C = \left\{ \sum_{r=1}^m d_r e_r : d_r \in \mathbb{Q} \forall r \in \{1, \dots, m\}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Así, notemos que

$$C = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_m, \quad C_m = \left\{ \sum_{r=1}^m d_r e_r : d_r \in \mathbb{Q}, \forall r \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

Como la union contable de conjuntos contables es contable. Basta probar que C_m es contable para cada $m \in \mathbb{N}$.

Definamos

$$\Psi: C_m \rightarrow \mathbb{Q}^m \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

$$\mathbb{Q}^m = \prod_{j=1}^m \mathbb{Q}$$

Producto cartesiano finito de conjuntos contables, es contable.

Ψ es inyectiva, pues $x, y \in C_m$ tales que

$$\Psi(x) = \Psi(y)$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = (\beta_1, \dots, \beta_m) \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \\ \Rightarrow x = y$$

Así, C_m es contable.

Sea $x \in H$ y $\varepsilon > 0$. P.D. $(\exists c \in C) \|x - c\| < \varepsilon$

Como $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base hilbertiana, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| x - \sum_{j=1}^M \langle x, e_j \rangle e_j \right\| < \varepsilon/2$$

Para cada $\langle x, e_j \rangle \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, M\}$ y gracias a que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ existe q_j tal que $|\langle x, e_j \rangle - q_j| < \varepsilon/(2M)$

Así, definimos

$$c = \sum_{j=1}^M q_j e_j \in C_M \subseteq C$$

[*]

con lo cual

$$\begin{aligned} \|x - c\| &\leq \left\| x - \sum_{j=1}^M \langle x, e_j \rangle e_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^M \langle x, e_j \rangle e_j - \sum_{j=1}^M q_j e_j \right\| \\ &< \varepsilon/2 + \sum_{j=1}^M |\langle x, e_j \rangle - q_j| \|e_j\| \\ &< \varepsilon/2 + \sum_{j=1}^M \varepsilon/2M = \varepsilon \end{aligned}$$

Ejercicio. Haciendo uso de la teoría de bases hilbertianas, muestre que $L^2(-1,1, \mathbb{C})$ es separable.

Miércoles 18 de mayo de 2022

Demostración

Notemos que $f \in L^2(-1,1, \mathbb{C})$ se puede escribir como

$$f = u + iv$$

donde $u \in L^2(-1,1)$ y $v \in L^2(-1,1)$. Conociendo que $L^2(-1,1)$ es un espacio de Hilbert, mostremos que este posee una base hilbertiana separable.

Recordemos que los polinomios de Legendre ^{entieros} forman una familia ortonormal en $C^0([-1,1])$. Esto debido a la aplicación del proceso de ortonormalización de Gram-Schmit a la familia

$$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$$

Basta ver que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es maximal.

P.D. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es total (Recordemos que total implica maximal)

P.D. $\text{span}\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}^{\|\cdot\|_{L^2}} = L^2(-1,1)$

Sea $u \in L^2(-1,1)$ y $\varepsilon > 0$. Recordando que $C^0([-1,1])^{\|\cdot\|_{L^2}} = L^2(-1,1)$, se tiene que existe $g \in C^0([-1,1])$ tal que $\|u - g\| < \varepsilon/2$.

Por otro lado, por el Teorema ^{L^2} de Weierstrass, sabemos que toda función continua es aproximable a través de polinomios definidas en $[-1,1]$ con la norma uniforme.

Así, para $g \in C^0([-1,1])$, existe $p \in \mathcal{P}([-1,1])$ (espacio de polinomios) tal que

$$\|g - p\|_\infty < \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}$$

Luego

$$\|u - p\|_{L^2} \leq \|u - g\|_{L^2} + \|g - p\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{2} + \left(\int_{-1}^1 |g(x) - p(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

funciones continuas
 $\leq \max_{x \in [-1,1]} |g(x) - p(x)| = \|g - p\|_\infty$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \sqrt{2} \|g - p\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} + \sqrt{2} \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}} = \epsilon$$

Hemos probado que

$$\text{span} \{1, x, x^2, \dots\} = L^2(-1,1)$$

con lo cual, tenemos que

$$\text{span} \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} = L^2(-1,1)$$

y dado que $\text{span} \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \text{span} \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, se concluye que

$$\text{span} \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = L^2(-1,1)$$

Así, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es total.

$\therefore \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una base hilbertiana para $L^2(-1,1)$

$\therefore L^2(-1,1)$ es separable.

Ahora, dado que $L^2(-1,1; \mathbb{C}) \rightarrow L^2(-1,1) \times L^2(-1,1)$

$$u + iv \mapsto (u, v)$$

entonces u y v se pueden aproximar por polinomios en $\text{span} \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y a fortiori, $f = u + iv$ se aproxima por la familia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$

Teorema. Sea H un espacio de Hilbert separable y $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia ortonormal. $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base hilbertiana de H si y solo si

$$(\forall x \in H) (\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2)$$

Demostración

$$\forall x \in H \quad \|x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$$

(\Rightarrow)

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \Rightarrow \|x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 \rightarrow 0$$

$$(\Leftarrow) \quad \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \text{en } \mathbb{R}$$

Ejemplo: Muestre que la familia $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ es una base hilbertiana en $\ell^2(\mathbb{C})$

\uparrow n-ésimo término

hilbertiana en $\ell^2(\mathbb{C})$

Sea $x \in \ell^2(\mathbb{C})$

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $|\langle x, e_n \rangle|^2 = |x_n|^2$

Capítulo 2: Teoremas fundamentales del análisis funcional

Sea E un e.v. sobre \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C})

\hookrightarrow el estudio de espacios duales

$E' = \{f: E \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ lineal}\}$, $E' \neq \emptyset$ pues $0 \in E'$

\exists existen $f \neq 0$ elementos de E' ?

Considerando la existencia de s.e.v. de dimensión finita de E

Supongamos que F es un s.e.v. de dimensión finita de E

Es posible definir $\varphi: F \rightarrow \mathbb{K}$ lineal no nulo: φ

→ Como F posee una base de cardinalidad finita que nos permite construir el funcional lineal

Supongamos que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base de F .

Para cualquier $k \in \mathbb{K}$

$$\varphi_k(v_j) = \delta_{kj}, \quad j \in \{1, \dots, m\}$$

Mediante extensión lineal se define para cualquier $k \in \mathbb{K}$, fijo:

$$\varphi: F \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \mapsto \varphi(x) = \sum_{j=1}^m d_j \varphi_k(v_j)$$

técnica de extensión lineal.

donde $x = \sum_{j=1}^m d_j v_j$. Así, φ es funcional lineal en F y no nulo, con $(d_j)_{j=1}^m$ escalares únicos.

Para la existencia de funcionales lineales no nulos sobre todo el espacio E , podemos considerar

$$f: E \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \mapsto$$

Si H an-Banach es posible encontrar una extensión lineal no nula.

Axioma de elección

↳ paradigma de Banach-Tarski

Proposición. Sea $f \in E'$ no nulo

① $\text{codim}(\ker f) = 1$ [$\text{codim}(V) = \dim(E/V)$ con V un s.e.v.]

② Sea $g \in E'$ no nulo tal que $\ker g = \ker f$. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $g = \alpha f$

③ Si V es un s.e.v. de E tal que $\text{codim}(V) = 1$. Entonces, existe $f \in E'$ no nulo tal que $\ker f = V$

① P.D. Existe B base de $E/\ker f$ de cardinalidad 1.

$$E/\ker f = \{[x] : x \in E\} \Rightarrow [x] = \{y \in E : x - y \in \ker f\} = x + \ker f$$

Para el efecto, basta hallar $x_0 \in E$ tal que

$$(\forall x \in E) (\exists \alpha \in \mathbb{K}) ([x] = \alpha [x_0]) \Leftrightarrow E \text{ e.v. sobre } \mathbb{K} \quad E = V \oplus W \quad \text{codim}(V) = 1 \Leftrightarrow \dim(W) = 1$$

Demostración

[*]

Como $f \neq 0$, existe $x_0 \in E$, con $x_0 \neq 0$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Definamos $y := x_0 / f(x_0)$, $f(y) = 1$

Para cualquier $x \in E$; definamos $u = x - x_0 \cdot f(x) / f(x_0)$. Notar que $u \in \ker f$. Así,

$$x = u + \frac{x_0 f(x)}{f(x_0)} \rightarrow \alpha \in \mathbb{K} \text{ (depende de } x)$$

P.D. $(\forall x \in E) (\exists \alpha \in \mathbb{K}) (\alpha = f(x) / f(x_0))$

Por absurdo, supongamos que existe otra descomposición; es decir que

$$x = u + x_0 \frac{f(x)}{f(x_0)} \quad \text{y} \quad x = w + x_0 \hat{\alpha} \quad \text{con } w \in \ker f$$

Así

$$u + x_0 \frac{f(x)}{f(x_0)} = w + x_0 \hat{\alpha} \Rightarrow \frac{u-w}{\ker f} = x_0 \hat{\alpha} - x_0 \frac{f(x)}{f(x_0)} \Rightarrow f(u-w) = f(x_0 \hat{\alpha} - x_0 \frac{f(x)}{f(x_0)}) = 0$$

$$\Rightarrow 2 f(x_0) - \frac{f(x)}{f(x_0)} f(x_0) = 0 \Rightarrow \hat{\alpha} f(x_0) = f(x) \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{f(x)}{f(x_0)}$$

Luego, si $\hat{\alpha} = f(x) / f(x_0)$

$$u + x_0 \frac{f(x)}{f(x_0)} = w + x_0 \hat{\alpha} \Rightarrow u = w$$

$$E/\ker f = \text{span} \{[y]\} = \{ \alpha y + \ker f : \alpha \in \mathbb{K} \}$$

[*] $[x] = \alpha [x_0]$

$$\Rightarrow [x] = [\alpha x_0]$$

$$\Rightarrow [x - \alpha x_0] = [0] \Rightarrow x - \alpha x_0 \in \ker f$$

Demostración

① Sea $x \in E$, cualquiera. P.D. $\exists \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $g = \alpha f$
 $x = y + f(x)x_0$ $y \in f$
 $\Rightarrow g(x) = g(y + f(x)x_0) = g(y) + f(x)g(x_0) = f(x)g(x_0)$

Tomando $\alpha = g(x_0)$, se tiene el resultado.

③ $\text{codim}(V) = 1 \Leftrightarrow \dim(E/V) = 1$
 $E/V = \text{span} \{[x_0]\}$, $x_0 \in E$
 $E/V = \text{span} \{x_0 + V\}$

Además, sabemos que si $\text{codim}(V) = 1$, entonces
 $E = V \oplus Z$, con $\dim(Z) = 1$.

Por lo tanto, para cualquier $x \in E$, entonces

$$x = v + \lambda z_0 \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{K}, v \in V \text{ y } z_0 \in Z.$$

Se define $f \in E'$ tal que $f(x) = \lambda$, luego
 $f(V) = \{0\} \Rightarrow \ker(f) = V$

Teorema de Hahn-Banach:

↳ espacios duales

↳ Respuesta a un problema de extensión

$f: X \rightarrow Y$ función, $X \subsetneq \tilde{X}$ tal que cumple una cierta propiedad P.

¿Existe $g: \tilde{X} \rightarrow Y$ tal que g es una extensión que verifica la propiedad P?

Análisis Complejo: $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ Prolongación analítica, existe $g: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}$ extensión de f y es analítica o $g: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}$ con $S \subsetneq \tilde{S}$.

Análisis en espacios métricos: $T: A \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, X, Y espacios métricos

(extensión de funciones continuas) y acotado

Condiciones suficientes, existe $\tilde{T}: X \rightarrow Y$ y acotado es extensión de T .

T.H-B. (forma analítica) (C)

Sean E un e.v. sobre \mathbb{R} y F s.e.v. de E . Si $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que

$$\text{Re}(f) \leq p \quad \text{en } F.$$

entonces existe $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, extensión de f y $\text{Re}(g) \leq p$ [Implica la continuidad o acotamiento].

Independientemente del campo, el funcional sublineal siempre está a valores reales.

$E' = \{f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineal}\}$

¿Existen funcionales lineales y acotados? Sí, el funcional nulo.

¿Existen funcionales lineales y acotados no nulos? teorema de Hahn-Banach.

¿Existen operadores lineales y acotados no nulos definidos sobre un subespacio vectorial propio de E ?
 de dimensión finita.

Dado un espacio normado E , siempre podemos obtener un subespacio vectorial propio de E de dimensión finita F .

$$f: F \rightarrow \mathbb{K} \text{ lineal y acotado.}$$

T.H-B (forma analítica-topológica)

Sean E un e.n. sobre \mathbb{K} y F un subespacio vectorial de E . Si $f: F \rightarrow \mathbb{K}$ lineal y acotado

entonces existe $g: E \rightarrow \mathbb{K}$ lineal y acotado y

$$\|g\| = \|f\|$$

Dado E un espacio normado infinito dimensional, ¿siempre es posible encontrar un funcional lineal sobre F que no sea acotado? Sí.

Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una base de Hamel de E , definamos $e_i = \frac{f_i}{\|f_i\|}$

Corolario. E separa los puntos de E .
 $(\forall x, y \in E, x \neq y) (\exists f \in E^*) (f(x) \neq f(y))$

Demostración.
 Sean $x, y \in E$, con $x \neq y$ arbitrarios, definamos $z = x - y \in E, z \neq 0$.
 Existe un funcional lineal y acotado $f \in E^*$ no nulo tal que

$$f(z) = \|z\|^2 \neq 0$$

$$f(z) = f(x - y) = f(x) - f(y) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Corolario. Sea $x \in E$ \ll maximalidad $\Leftrightarrow e_i$ es maximal
 $(\forall f \in E^*) (f(x) = 0) \Rightarrow x = 0$ $\langle x, e_i \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
 $\|x\| = \max_{f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = 0 \Rightarrow x = 0$ $\forall i(x), e_i \in H^* \leftarrow$ teorema de representación de Riesz

Ejercicio. Sean E un espacio normado y V s.e.u. de E , denotando $d = \text{dist}(x, V)$, muestre que si V es cerrado y $x \notin V$, entonces existe $f \in E^*$ tal que $(f \in S_{E^*}$ y $f(x) > 0$)

- 1) $f \in S_{E^*} = \|f\|_{E^*} = 1$.
- 2) $f(V) = 0$
- 3) $f(x) \geq d > 0$

Demostración

Martes, 7 de junio de 2022.

Teorema Hahn-Banach forma geométrica.

Supongamos que consideramos el problema de optimización lineal: dados $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$(P) := \begin{cases} \max \langle c, x \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ \text{s.a. } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe un criterio de decidibilidad sobre la existencia de al menos una} \\ \text{solución para (P)?} \\ x \in S \text{ (conjunto de restricciones)} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} \max \langle c, x \rangle \\ \text{s.a. } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min \langle y, b \rangle_{\mathbb{R}^m} \\ \text{s.a. } y^T A \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

aplicar $F := \{ \langle c, x \rangle_{\mathbb{R}^n} : x \in S \}$ Es acotado superiormente?
 Para el axioma del supremo, F debe ser no vacío y acotado superiormente.
 Para que $F \neq \emptyset$ basta que exista $x \in S$.
 Así, estamos interesados en conocer si $S \neq \emptyset$

Lema de Farkas. Es un criterio de decidibilidad.

Queremos, en primera instancia, hallar el problema dual de (P)
 Empecemos buscando una cota superior para $c^T x = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

$$Ax \leq b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad [*]$$

Multiplicamos cada desigualdad de [*] por $y_i \geq 0$ y sumamos sobre i

$$\sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \right) x_j \leq \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

Supongamos que $\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq c_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ [*]

Entonces

$$\left(\sum_{i=1}^m y_i a_{ij}\right) x_j \geq c_j x_j$$

y sumando sobre j

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m y_i a_{ij}\right) x_j \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Por lo tanto, $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ está acotada superiormente por

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m y_i a_{ij}\right) x_j$$

Notemos que, en forma matricial, $[**]$, se escribe $y^T A \geq c$

Por otro lado, notemos que

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m y_i b_i \quad \forall x \in S$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{y^T b}$

Estamos interesadas en hallar $y \in \mathbb{R}^m$ tal que

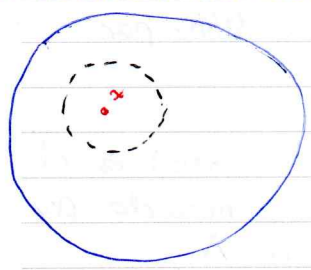
$$(D) := \begin{cases} \min y^T b \\ \text{s.t. } y^T A \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

\uparrow variable dual

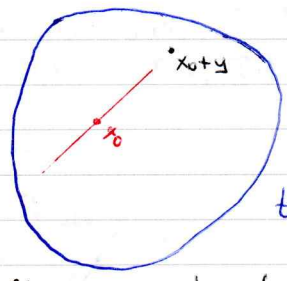
(P-D) se le conoce como el par primal-dual

Miércoles, 8 de junio de 2022.

Sea E un e.v. normado $A \in E$



x es un punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$



traslaciones
 \uparrow
 $(E, +, \cdot; \mathbb{R})$
 \uparrow
dilataciones

Los elementos del segmento tienen la forma $x_0 + ty \quad |t| \leq \epsilon$

x_0 es un punto interno en E si para todo $y \in E$ existe $\epsilon_y > 0$ tal que $\forall |t| \leq \epsilon \quad x_0 + ty \in E$

Sea K un convexo en E , vamos a definir $p: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto p_K(x) = \inf \left\{ a > 0 : x + \frac{1}{a} y \in K \right\}$$

Definición de una idea de espesor de un conjunto está basada en el valor más grande de ϵ tal que $x_0 + ty \in A$ con $|t| \leq \epsilon$, «espesor en la dirección y »

Viernes, 10 de junio de 2022.

Sea E un e.v. real, $K \subseteq E$ no vacío y convexo

$x_0 \in K$ es un punto interno si

$$(\forall y \in E) (\exists \epsilon = \epsilon(y) > 0) (\forall t, |t| < \epsilon) (x_0 + ty \in K)$$

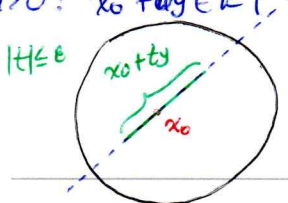
$$p = p_{K=x_0}: E \rightarrow \mathbb{R}$$
$$y \mapsto \inf \left\{ a > 0 : x_0 + \frac{1}{a} y \in K \right\}$$

Como $y \in E$ es arbitrario y E es un e.v. normado, $-y \in E$

$$a > 0, \quad x_0 + \frac{1}{a} (-y) \in K$$

tomando $b = -a < 0$, $x_0 + \frac{1}{b} y \in K$

$\{b > 0: x_0 + by \in K\} \Rightarrow \sup \{b > 0: x_0 + by \in K\} \in \mathbb{R} \leftarrow$ No necesariamente está acotado inferiormente.
 Para salvar (evitar) el inconveniente de la ~~acotación~~, definimos el conjunto como el ínfimo. Así, solo debemos preocuparnos de si está acotado.



Algunas propiedades del funcional.

* $(\forall y \in E) (P(y) < +\infty)$
 Sea $y \in E$, definimos $A(y) = \{a > 0: x_0 + ay \in K\}$. Como x_0 es un punto interno, existe $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tal que $x_0 + ty \in K$, en particular, tomando $t = \varepsilon$, $x_0 + \varepsilon y \in K$ y por tanto $\forall \varepsilon \in A(y)$; así $A(\varepsilon) \neq \emptyset$. Además, 0 es una cota inferior de $A(\varepsilon)$. Por el teorema del ínfimo existe $\inf A(\varepsilon) = p(y) < +\infty$.
 Ver las propiedades en la primera parte de los apuntes.

Proposición

- a) Si $x_0 + y \in K$, entonces $p(y) \leq 1$
- b) Si $x_0 + y$ es un punto interno de $K \Leftrightarrow p(y) < 1$.

Lunes 13 de junio de 2022.

Proposición Sea $p: E \rightarrow [0, +\infty[$ un funcional sublineal.

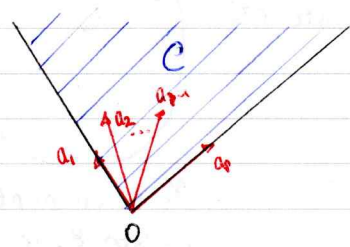
- a) $A := \{x \in E: p(x) \leq 1\}$ es convexo
- b) $B := \{x \in E: p(x) < 1\}$ es convexo y \emptyset es un punto interno.

Martes 15 de junio de 2022.

Interpretación geométrica del Lema de Farkas

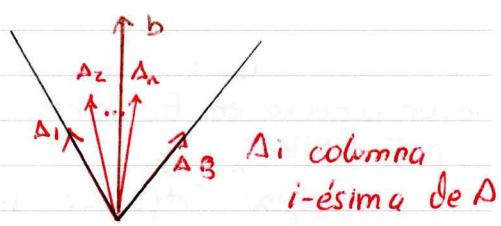
Definición: Sean $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^m$. El cono convexo generado por $\{a_1, \dots, a_p\}$ se define por $C := \{\sum_{j=1}^p x_j a_j: x_j \geq 0 \forall j \in \{1, \dots, p\}\}$.

Notar que en efecto el conjunto es convexo.

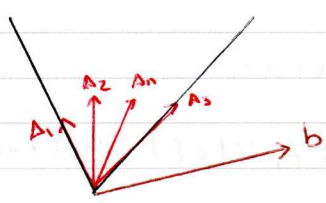


Notar que $\{Ax: x \geq 0\}$ es el cono convexo generado por las columnas de A .

* Si existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$, $x \geq 0$, entonces b está en el cono convexo generado por las columnas de A .

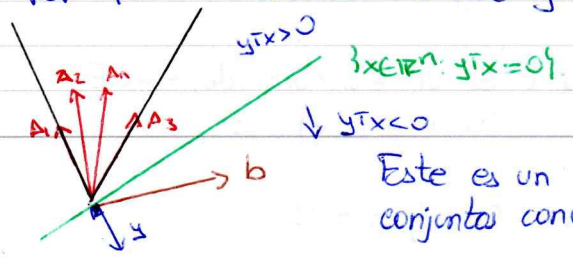


Si existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^T A \geq 0$, $y^T b < 0$, entonces b no está en el cono convexo.



$\{b\}$ es convexo pues $(1-\lambda)b + \lambda b = b \in \{b\}$

Si la 2da opción ocurre, entonces será posible encontrar un hiperplano que pasa por 0 y separa a b del cono convexo. Este hiperplano está representado por $\{x \in \mathbb{R}^n: y^T x = 0\}$ donde y es un vector ortogonal al hiperplano.



En dimensión finita se pueden realizar procesos constructivos de la separación.

Este es un lema de separación de conjuntos convexos.

Teorema de Banach-Steinhaus

Motivación: El estudio de los espacios funcionales (en particular, el espacio de las funciones continuas), y más aún, del estudio de espacios topológicos llevó a preguntarse sobre el tamaño de los subconjuntos de este:

¿Qué conceptos topológicos nos dan una noción de tamaño?

Viernes, 17 de junio de 2022.

Interior y clausura de un conjunto.

↳ permite definir la idea de densidad de un conjunto.

(La idea de densidad nace en \mathbb{R} , se extiende a \mathbb{R}^n y luego a espacios métricos completos)

Baire

Banach

Sea $A \subseteq X$, X un espacio topológico.

1) A es denso en ninguna parte en X si $\overset{\circ}{A} = \emptyset$

↳ A es topológicamente muy pequeño

Ej: Todo subconjunto finito de un espacio normado es denso en ninguna parte

Proposición Sea $A \subseteq X$, con X es un e.t.

A es denso en ninguna parte $\Leftrightarrow (\exists F \subseteq X$ cerrado, $A \subseteq F$ $\overset{\circ}{F} = \emptyset$)

$\Rightarrow \overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ Tomando $F = \bar{A}$ se tiene lo requerido.

\Leftarrow Existe $F \subseteq X$ cerrado, $A \subseteq F$ y $\overset{\circ}{F} = \emptyset$, luego $\bar{A} \subseteq F \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{F} = \emptyset \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \emptyset$
lo que concluye la demostración.

2) A es de primera categoría en X si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, donde para todo $n \in \mathbb{N}$, B_n es denso en ninguna parte en X .

$\Leftrightarrow A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, F_n es cerrado y $\overset{\circ}{F}_n = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$

↳ A es topológicamente pequeño.

3) A es de segunda categoría en X si A no es de primera categoría en X

↳ A es topológicamente grande

Proposición a) Todo subconjunto de un conjunto de primera categoría en X es de primera categoría en X

b) $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, A_n 1^{ra} categoría en $X \Rightarrow B$ es de 1^{ra} categoría en X .

Observación: Estos conceptos son dependientes de la topología.

Ej: (X, τ_{dis}) vs $(X, \mathcal{P}(X))$

¿ $A \subseteq X$ qué tipo de conjunto es A en X ?

• $A = \emptyset$ A es denso en ninguna parte

• $A \neq \emptyset$ A es de segunda categoría.

2) Estos conceptos son relativos al espacio ambiente X

Ej. Sean X un e.t. $A \subseteq X$ finito y $B \subseteq A$ no vacío.

¿Qué tipo de conjunto es B en X ? B es denso en ninguna parte en X

¿Qué tipo de conjunto es B en A ? B es de 2^{da} categoría en A pues la

3) Sean (X, τ) un e.t. e $Y \subseteq X$ subespacio topología inducida por X sobre A es la topología topológico con la topología inducida por τ discreta.

X .

A es denso en ninguna parte en $Y \Rightarrow A \subseteq X$ es denso en ninguna parte en X .

Teorema Si X es un espacio métrico completo, entonces
- Teorema de la categoría de Baire $\forall A \subseteq X$ abierto no vacío, A es de segunda categoría en X
Demostración
 P.D. $\forall A \subseteq X$ abierto no vacío, A es de segunda categoría en X

\Leftrightarrow P.D. $\forall B \subseteq X$ de primera categoría en X , $\overset{\circ}{B} = \emptyset$
 \Rightarrow Sea B de primera categoría en X y $\sup B \neq \emptyset$ $\overset{\circ}{B}$ es abierto y no vacío
 $\Rightarrow \overset{\circ}{B}$ es de segunda categoría y como $\overset{\circ}{B} \subseteq B$ entonces $\overset{\circ}{B}$ es de primera categoría en $X \Rightarrow \emptyset$
 \Leftarrow Sea $A \subseteq X$ abierto no vacío y por contradicción supongamos que A es de primera categoría.
 Por hipótesis interinas que $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ (por hipótesis) $\Downarrow \Updownarrow$ pues $A = \overset{\circ}{A} = \emptyset$

Sea $B \subseteq X$ de 1ª categoría en X . Se tiene que

$$B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n, \quad F_n \text{ es cerrado y } F_n = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Basta probar que $\overline{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right)} = \emptyset$

Notar que
 $\forall n \in \mathbb{N}: F_n \text{ cerrado y } F_n = \emptyset \Rightarrow \overline{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right)} = \emptyset$
 $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: G_n \text{ abierto y } \overline{G_n} = X \Rightarrow \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n} = X$

Supongamos que $\forall n \in \mathbb{N}: G_n$ es abierto y $\overline{G_n} = X$. P.D. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = X$

P.D. $\forall \emptyset \subseteq X$ abierto no vacío. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \neq \emptyset$

Sea $\emptyset \subseteq X$ abierto no vacío.

Como \emptyset es abierto y no vacío, entonces existen $x_0 \in \emptyset$ y $r_0 > 0$ tales que $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq \emptyset$
 $\overline{B(x_0, r_0/2)} \subseteq B(x_0, r_0) \subseteq \emptyset$

La demostración completa se encuentra en la primera sección al igual que su corolario.

Martes, 21 de junio de 2022.

✦ Para Nacional.

\rightarrow Viernes, 26 de junio de 2022

$T: E \rightarrow F$ lineal

* T es acotado $\Leftrightarrow (\exists M(T) > 0) (\forall x \in E) (\|Tx\| \leq M(T) \|x\|)$

T es acotado $\Leftrightarrow T$ es una función acotada

$\Leftrightarrow (\exists C > 0) (\forall x \in E) \|Tx\|_F \leq \|x\|_E \leq C$ $\Leftrightarrow \text{Im}(T)$ es acotada en F

$\Leftrightarrow T$ acotado, envía conjuntos acotados en E en conjuntos acotados en F . $\Leftrightarrow (\exists C > 0) (\forall x \in E) (\|Tx\|_F \leq C)$

$\therefore \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C \quad \leftarrow / \rightarrow \quad \therefore \|Tx\|_F \leq C$

Observación T lineal tal que $\text{Im}(T)$ es acotada $\Leftrightarrow T \equiv 0$

$\{T_i\}_{i \in I}$ familia en $\mathcal{L}(E,F)$

$T_i \in \mathcal{L}(E,F) \Leftrightarrow T_i$ lineal y $(\exists C_i > 0) (\forall x \in E) (\|T_i x\| \leq C_i \|x\|_E)$

* $\{T_i\}_{i \in I}$ es acotada en $x_0 \in E \Leftrightarrow (\exists M_{x_0} > 0) (\forall i \in I) (\|T_i x_0\| \leq M_{x_0})$

* $\{T_i\}_{i \in I}$ es acotada puntualmente en $E \Leftrightarrow (\forall x \in E) (\{T_i\}_{i \in I}$ es acotada en x)
 $\Leftrightarrow (\forall x \in E) (\exists M_x > 0) (\forall i \in I) (\|T_i x\|_F \leq M_x)$

* $\{T_i\}_{i \in I}$ es acotada uniformemente $\Leftrightarrow \{T_i\}_{i \in I}$ es acotada en $\mathcal{L}(E,F)$ $\Leftrightarrow C \|x\|$

$\Leftrightarrow (\exists C > 0) (\forall i \in I) (\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C)$

Recordemos que $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq C$

$\Leftrightarrow (\exists C > 0)(\forall i \in I)(\forall x \in E) (\|T_i x\| \leq C \|x\|)$

Lunes, 4 de julio de 2022.

Corolario: Sea $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}(E, F)$, donde E es un espacio de Banach y F un espacio normado

Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente, entonces

a) $\exists T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T_n \rightarrow T$ fuertemente

b) $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\|$

Demostración

Parte a) Apuntes

Parte b) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in E) \|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\|$

$(\|T_n x\|)_n$ es acotada, $(\|T_n\| \|x\|)_n$ es acotada

\therefore existen $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x\|$ y $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\| \|x\|$

$\therefore \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\| \|x\|$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x\| = \|Tx\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\| \|x\|$

$\therefore \|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\|$

Observación: El corolario anterior no dice nada sobre la convergencia uniforme de operadores $T_n \rightarrow T$ fuertemente pero $T_n \rightarrow T$ en $\mathcal{L}(E, F)$ no es cierto necesariamente

Martes 5 de julio de 2022.

$T_n = P_{V_n} \in \mathcal{L}(H, H) \quad V_n = \text{span}\{e_k\}_{k=1}^n$

$T_n \rightarrow T$ fuertemente pero $T_n \not\rightarrow T$ uniformemente

P.D. $\forall x \in H \quad T_n x \rightarrow T x$ en H

Sea $x \in H$, T_n

$T_n x = P_{V_n} x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x = \text{id}(x) = T x$ en H (demostración completa en los apuntes).

Teorema de la aplicación abierta.

Motivación

Sean E, F espacios normados, $U \subseteq E$ no vacío, $f: U \rightarrow F$. Supongamos que f es biyectiva, entonces existe f^{-1}

$f: f(U) \rightarrow U$

¿Si f posee una propiedad sobre E , entonces f^{-1} posee la misma propiedad?

► Si f es una función acotada y biyectiva. ¿ f^{-1} es una función acotada? **No.**

$f: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$x \mapsto f(x) = \arctan(x)$

$f^{-1}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f^{-1}(x) = \tan(x)$

► Si f es una función continua y biyectiva, ¿ f^{-1} es continua? **No**

$f: [0, 2\pi) \rightarrow S^1$

$\theta \mapsto f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$

$f^{-1}: S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$

Ahora, si f^{-1} fuera continua, entonces $f^{-1}(S^1)$ sería compacto, es decir

$f^{-1}(S^1) = [0, 2\pi)$ es compacto $\Rightarrow \neq$

Ahora, supongamos que $U=E$ y $f=T$ un operador lineal.

Si $T: E \rightarrow F$ es biyectiva y lineal

¿ T^{-1} es lineal? **SI**

Sean $y_1, y_2 \in F$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

$$P.D. T^{-1}(\alpha y_1 + y_2) = \alpha T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2)$$

Si $y_1 \in F$, entonces existe $x_1 \in E$ tal que $y_1 = Tx_1$, análogamente, existe x_2 tal que $y_2 = Tx_2$, luego

$$T^{-1}(\alpha y_1 + y_2) = T^{-1}(T(\alpha x_1 + x_2)) = \alpha x_1 + x_2 = \alpha T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2)$$

Si $T: E \rightarrow F$ es lineal y acotado además biyectivo ¿ T^{-1} es lineal y acotado? **No**

Ejemplo:

$$T: C_{\infty} \rightarrow C_{\infty}$$

$$x \mapsto Tx = T(x_n) = \left(\frac{x_n}{n} \right)$$

donde C_{∞} es s.e.v. de \mathcal{L}^p , con $p \in [1, +\infty]$

$$C_{\infty} = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^p : \text{card} \{ k \in \mathbb{N} : x_k \neq 0 \} < +\infty \right\}$$

$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists y_m \in C_{\infty})(\|Ty_m\|_{C_{\infty}} > m \|y_m\|_{C_{\infty}})$ Para probar que el operador no está acotado

$$y^{(m)} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

↑
m-ésima posición

$$\|y^{(m)}\|_{C_{\infty}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n^{(m)}| = 1$$

$$\|Ty^{(m)}\|_{C_{\infty}} = \|(n \cdot y_n^{(m)})\|_{C_{\infty}} = \|(0, \dots, 0, n, 0, \dots)\|_{C_{\infty}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |(n \cdot y_n^{(m)})| = |n| = n$$

$$\therefore \|T^{-1}y^{(m)}\|_{C_{\infty}} \geq n$$

$n > m$

$$y^{(m)} = (0, 0, \dots, 0, \frac{m}{n}, 0, \dots)$$

↑
n-ésima

$$\|y^{(m)}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{m}{n} \right| = \frac{m}{n}$$

$$\|T^{-1}y^{(m)}\| = \|n \cdot y^{(m)}\| = m \geq \frac{m^2}{2}$$

Miércoles 6 de julio de 2022.

$$P.D. F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(B_E(0, n))$$

Claramente $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(B_E(0, n)) \subseteq F$. Así, P.D. $F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(B_E(0, n))$

Sea $y \in F$, cualquiera. Así, como T es sobreyectiva, existe $x \in E$, tal que $Tx = y$.

Luego, si tomamos $s = \|x\|$, tenemos que por la propiedad arquimediana existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > s$ y

$$x \in B(0, m)$$

¿ $y=0$? Por absurdo, supongamos que para todo $t > 0$

$$B(0, t) \not\subseteq T(B_E(0, n_0))$$

Existe $z \in B(0, t)$ tal que $z \notin T(B_E(0, n_0))$, como $z \in B(0, t)$, entonces $\|z\| < t$, en particu-

lar para $t < n_0$

$$\|z\| \leq n_0 \quad Tz \in T^{-1}(B_F(0, n_0))$$

Viernes, 8 de julio de 2022.

Proposición Sean E, F espacios normados, $T: E \rightarrow F$ lineal
T aplicación abierta \Rightarrow T sobreyectiva

Demostración

Sea $y \in F$. P.D. $\exists x \in E$ tal que $Tx = y$

Como $B_E(0,1)$ es abierta, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_F(0, \delta) \subseteq T(B_E(0,1)).$$

Si $y \neq 0$, definamos $z = \frac{y}{\|y\|} \cdot \frac{\delta}{2} \in B_F(0, \delta) \Rightarrow \exists u \in B_E(0,1)$, tal que

$$z = Tu.$$

$$\Rightarrow y = T\left(\frac{2\|y\|}{\delta} u\right)$$

Tomando, $x = (2\|y\|/\delta)u$, se sigue que $y = Tx$. Por otro lado, si $y = 0$, tomando $x = 0$ se sigue el resultado.

Teorema (Isomorfismos de Banach) Sean E, F espacios de Banach, si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ biyectiva entonces $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Ejercicio. Sea E un espacio de Banach, con las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, si existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq c \|x\|_1,$$

entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

P.D. $d \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c \|x\|_1 \quad \forall x \in E$ con $d > 0, c > 0$.

P.D. $\|x\|_2 \leq 1/d \|x\|_1 \quad \forall x \in E$.

Definamos $\text{Id}: (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$.

$$x \mapsto x$$

Así, $\text{Id} \in \mathcal{L}(E, E)$, pues en efecto es lineal y por hipótesis existe $c > 0$ tal que

$$\|\text{Id} x\|_2 = \|x\|_2 \leq c \|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Así, como Id es biyectiva, entonces existe $\text{Id}^{-1}: (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ y más aún

existe $h > 0$ tal que $\|\text{Id}^{-1} x\|_1 = \|x\|_1 \leq h \|x\|_2 \quad \forall x \in E$,

de donde

$$1/h \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c \|x\|_1, \quad \forall x \in E,$$

notando $d = 1/h > 0$, se sigue que

$$d \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c \|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

Teorema del Grato Cerrado.

Ej: $T: \mathcal{P}([0,1]) \subseteq \mathcal{C}([0,1]) \rightarrow \mathcal{P}([0,1])$

$S: \mathcal{P}([0,1]) \subseteq \mathcal{C}([0,1]) \rightarrow \mathcal{C}([0,1])$

$$p \mapsto T_p = \frac{dp}{dx}$$

$$p \mapsto S_p = \frac{dp}{dx}$$

$$p_n(x) = \frac{x^n}{n} \quad p(x) = 0 \quad \|p_n - p\|_\infty \rightarrow 0 \quad \|p_n\| = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \max |x^n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$T_{p_n}(x) = x^{n-1}, \quad n \geq 1 \quad \|T_{p_n} - T_p\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |x^{n-1}| = 1$$

$$T_p(x) = 0$$

$T_{p_n} \not\rightarrow T_p$ en $\|\cdot\|_\infty$.

Convergencia fuerte

$$T_{p_n} x \rightarrow T_p x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1 cumple la siguiente proposición.

Si $\forall (p_n)_n$ en $\mathcal{P}([0,1])$ tal que $p_n \rightarrow p$ en $\mathcal{P}([0,1])$ y

entonces $Tp_n \rightarrow q$ en $\mathcal{P}([0,1])$,

$$p \in \mathcal{P}([0,1]) \sim q = Tp.$$

Operador lineal, cerrado.

Sea $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera en $\mathcal{P}([0,1])$ tal que $p_n \rightarrow p$ en $\mathcal{C}([0,1])$ y $Tp_n \rightarrow q$ en $\mathcal{P}([0,1])$

$$p_n \rightarrow p \text{ en } \mathcal{C}([0,1]), \quad \frac{dp_n}{dx} \rightarrow q \text{ en } \mathcal{P}([0,1])$$

$$\text{2do TFC} \int_0^x \frac{dp_n}{dt}(t) dt = p_n(x) - p_n(0) \quad p_n \rightarrow p \text{ uniformemente} \Rightarrow \forall x \in [0,1], p_n(x) \rightarrow p(x)$$

$$\frac{dp_n}{dx} \rightarrow q \text{ uniformemente} \Rightarrow \int \frac{dp_n}{dt} dt \rightarrow \int q dt \quad [*]$$

Haciendo $n \rightarrow +\infty$ en $[*]$, se tiene que

$$p(x) = p(0) + \int_0^x q(t) dt \Rightarrow p \in \mathcal{P}([0,1]) \quad [**]$$

Por el 1er T-FC, derivando $[**]$, se tiene que:

$$\frac{dp}{dx}(x) = q(x) \Rightarrow Tp = q \quad \forall x \in [0,1]$$

Así, T es cerrado, pero \mathcal{S} no es cerrado. En efecto, el argumento falla en $[**]$ pues p es únicamente una función continua y no podemos garantizar que esté en el dominio

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad p_n(x) \rightarrow e^x \text{ en } \mathcal{C}([0,1])$$

$$Tp_n \rightarrow e^x \in \mathcal{C}([0,1]), \text{ pero } e^x \notin \mathcal{S}$$

espacio vectorial

Martes, 12 de julio de 2022.

Sean E, F espacios normados y $T: \text{Dom}(T) \subseteq E \rightarrow F$ lineal. El grafo de T , denotado Γ_T , se define por

$$\Gamma_T = \{(x, Tx) : x \in \text{Dom}(T)\} \subseteq E \times F$$

con $E \times F$ un espacio normado con la norma

$$\|(x, y)\|_{E \times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$$

así, Γ_T es un s.e.v. de $E \times F$.

Definición Sean E, F espacios normados, $T: \text{Dom}(T) \subseteq E \rightarrow F$ un operador. T es un operador lineal cerrado si T es lineal, y Γ_T es cerrado en $E \times F$.

$$\Gamma_T \text{ es cerrado en } E \times F \Leftrightarrow (\forall (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sucesión en } \Gamma_T) (z_n \rightarrow z \text{ en } E \times F \Rightarrow z \in \Gamma_T)$$

$$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sucesión en } \Gamma_T \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, z_n = (x_n, Tx_n), x_n \in \text{Dom}(T) \quad z = (x, y)$$

$$\Leftrightarrow (\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sucesión en } \text{Dom}(T)) [(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y) \text{ en } E \times F]$$

$$\Leftrightarrow (\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sucesión en } \text{Dom}(T)) \left[\begin{array}{l} \Rightarrow x \in \text{Dom}(T), y = Tx \\ x_n \rightarrow x \text{ en } E, Tx_n \rightarrow y \text{ en } F \\ \Rightarrow x \in \text{Dom}(T) \quad y = Tx \end{array} \right]$$

En general no existe relación entre T acotado y T cerrado.

Proposición Sean E, F espacios normados y $T: \text{Dom}(T) \subseteq E \rightarrow F$ lineal y acotado.
 Si $\text{Dom}(T)$ es cerrado en E , entonces T es un operador lineal y cerrado.
 (Equivalentemente, se dice que T es Γ cerrado)

Demostración

P.D. $(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en $\text{Dom}(T)$) $(x_n \rightarrow x \text{ en } E, Tx_n \rightarrow y \text{ en } F \Rightarrow x \in \text{Dom}(T), y = Tx)$
 Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en $\text{Dom}(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $Tx_n \rightarrow y$ en E y F respectivamente, como $\text{Dom}(T)$ es cerrado, entonces $x \in \text{Dom}(T)$. Como T es continuo, entonces $Tx_n \rightarrow Tx$ y por unicidad del límite

$$Tx = y.$$

Teorema (Grato cerrado) Sean E, F espacios de Banach y $T: \text{Dom}(T) \subseteq E \rightarrow F$ lineal y cerrado.
 Si $\text{Dom}(T)$ es cerrado en E , entonces T es acotado.

Demostración

- * Γ es un espacio de Banach pues $E \times F$ es un espacio de Banach y Γ es cerrado.
- * $\text{Dom}(T)$ es un e. Banach por ser cerrado y subconjunto de un espacio de Banach

* S es lineal pues T es lineal

$$\alpha \in \mathbb{K}, (x_1, Tx_1), (x_2, Tx_2) \in \Gamma$$

$$S(\alpha(x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2)) = S(\alpha x_1 + x_2, T(\alpha x_1 + x_2)) = \alpha x_1 + x_2 = \alpha S(x_1, Tx_1) + S(x_2, Tx_2)$$

* S es acotado.

$$\|S(x, Tx)\|_E = \|x\|_E \leq \|x\|_E + \|Tx\|_F = \|(x, Tx)\|_{E \times F}$$

* S es inyectivo

$$\ker S = \{(x, Tx) \in \Gamma : S(x, Tx) = 0 \in E\}.$$

$$\text{Sea } (x, Tx) \in S \Rightarrow x = S(x, Tx) = 0 \in E \Rightarrow x = 0$$

$$(0, T0) = (0, 0) \in \ker(S) \Rightarrow \ker S = \{(0, 0)\}$$

* S es sobreyectivo. Sea $x \in \text{Dom}(T)$. P.D. Existe $(z, Tz) \in \Gamma$ tal que

$$S(z, Tz) = x.$$

$$\text{Tomando } (x, Tx) \in \Gamma \Rightarrow S(x, Tx) = x.$$

Por el teorema de isomorfismos de Banach, $S^{-1}: \text{Dom}(T) \rightarrow \Gamma$ es acotada.

$$(\exists c > 0) (\forall x \in \text{Dom}(T)) \|S^{-1}x\|_{E \times F} \leq (c \|x\|_E)$$

$$\|Tx\|_F \leq \|x\|_E = \|Tx\|_F = \|(x, Tx)\|_{E \times F}$$

Ejercicio. Supongamos que T es grato cerrado es verdadero. P.D. Teorema aplicación abierta es verdadera.

Demostración

Sean E, F espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Supongamos que T es sobreyectiva. P.D. T es una aplicación abierta.

P.D. $\forall U \subseteq E$ abierto, $T(U)$ es abierto en F

Por linealidad de T , basta probar que existe $\delta > 0$

$$B_F(0, \delta) \subseteq T(B_E(0, 1))$$

$$x_1 R x_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x_1) = f(x_2) \quad \text{la cual es una relación de equivalencia.}$$

T aplicación abierta $\Leftrightarrow T^{-1}$ continua. (si T es biyectiva)

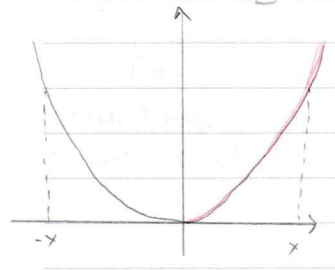
Como en este caso, T no es biyectiva la idea es definir un operador T que sea biyectivo

Demostración (Continuación - Grato cerrado)

Basta probar que existe $S > 0$ tal que

$$B_F(0, S) \subseteq T(B_E(0, 1))$$

Como T es sobreyectiva, entonces para todo $y \in F$, $\exists x \in E$, $Tx = y$



Notemos que $\ker(T) \neq \{0\}$

Definamos

$$\Psi: F \rightarrow E/\ker(T)$$

$$y \mapsto [x] = x + \ker(T) \quad \text{con } y = Tx$$

El $\ker(T)$ es cerrado pues T es continua. Luego, $E/\ker(T)$ es un espacio normado con

$$\|[x]\|_{E/\ker(T)} = \inf_{z \in \ker(T)} \|x - z\|_E$$

más aún $E/\ker(T)$ es un espacio de Banach con la norma antes definida

$$\Pi: E \rightarrow E/\ker(T)$$

Π aplicación cociente

$$x \mapsto [x]$$

Π es sobreyectiva, continua

Mostremos que Ψ está bien definido

Sean $[x_1]$ y $[x_2]$ en $E/\ker(T)$ tales que

$$\Psi(y) = [x_1] \quad \text{y} \quad \Psi(y) = [x_2]$$

P.D. $[x_1] = [x_2]$. Por hipótesis, sabemos que

$$y = Tx_1 \quad \text{y} \quad y = Tx_2 \Rightarrow Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker(T)$$

$$\Rightarrow x_1 \in [x_2]$$

$$\therefore [x_1] = [x_2]$$

Así, Ψ está bien definido

Ψ es lineal

Sean $y_1, y_2 \in F$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, P.D. $\Psi(\alpha y_1 + y_2) = \alpha \Psi(y_1) + \Psi(y_2)$. Por definición, tenemos que como T es sobreyectiva, existen x_1 y x_2 en E , tales que

$$y_1 = Tx_1 \quad \text{y} \quad y_2 = Tx_2$$

$$\Rightarrow \Psi(y_1) = [x_1] \quad \wedge \quad \Psi(y_2) = [x_2]$$

Además,

$$\alpha \Psi(y_1) = \alpha [x_1] = [\alpha x_1]$$

Así, por un lado

$$\alpha \Psi(y_1) + \Psi(y_2) = [\alpha x_1] + [x_2] = [\alpha x_1 + x_2] = \Psi(\alpha y_1 + y_2)$$

Por lo tanto, Ψ es lineal.

*** Ψ es un operador \mathbb{K} cerrado**

P.D. $(\Psi(y_n))_n \text{ en } F / (y_n \rightarrow y \text{ en } F \wedge \Psi(y_n) \rightarrow [x] \text{ en } E/\ker(T)) \Rightarrow \Psi(y) = [x]$

Sea $(y_n)_n$ en F , así, notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in E$ tal que

$$Tx_n = y_n$$

más aún, como $y_n \rightarrow y$ en F , entonces $Tx_n \rightarrow y$ en F . Así, por otro lado.

$$\Psi(y_n) = \Psi(Tx_n) = [x_n] \rightarrow [x]$$

\rightarrow Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en F tal que $y_n \rightarrow y$ en F , $\Psi(y_n) \rightarrow [x]$ en $E/\ker(T)$

P.D. $[x] = \Psi(y)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \in F \Rightarrow \exists x_n \in E$ tal que $y_n = Tx_n$

$$Tx_n \rightarrow y \text{ en } F \quad [x_n] \rightarrow [x] \text{ en } E/\ker(T)$$

P.D. $Tx = y$.

$$Tx_n \rightarrow y, \quad x_n \rightarrow x \Rightarrow y = Tx \quad \text{y} \quad T \text{ es } \Gamma \text{ cerrado}$$

$$T: E \rightarrow F \wedge T \text{ acotado} \Rightarrow T \text{ es } \Gamma \text{ cerrado}$$

$$[x_n] \rightarrow [x] \text{ en } E/\ker(T) \Leftrightarrow \|[x] - [x_n]\|_{E/\ker(T)} \rightarrow 0$$

$$= \|[x - x_n]\|_{E/\ker(T)} \rightarrow 0$$

$$x_n \rightarrow x$$

$$x_n + z_n \rightarrow x, (z_n)_n \in \ker(T) \Rightarrow \inf_{z \in \ker(T)} \|x_n - x - z\|_E \rightarrow 0$$

$$\left(\inf_{z \in \ker(T)} \|x_n - x - z\| \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$n=1$ $\inf_{z \in \ker(T)} \|x_1 - x - z\|$ Por caracterización del ínfimo existe $z_m^{(1)} \in \ker(T)$

$$\text{tal que } \|x_1 - x - z_m^{(1)}\| < \inf_{z \in \ker(T)} \|x_1 - x - z\| + \frac{1}{m}$$

$n=2$ $\inf_{z \in \ker(T)} \|x_2 - x - z\|$, $\exists z_m^{(2)} \in \ker(T)$ tal que

$$\|x_2 - x - z_m^{(2)}\| < \inf_{z \in \ker(T)} \|x_2 - x - z\| + \frac{1}{m}$$

Inductivamente, existe $z_m^{(n)} \in \ker(T)$ tal que

$$\|x_n - x - z_m^{(n)}\| \leq \inf_{z \in \ker(T)} \|x_n - x - z\| + \frac{1}{m} \quad [*]$$

Por otro lado

$$s_n = \inf_{z \in \ker(T)} \|x_n - x - z\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cualquier subsucesión de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero. Por $[\ast]$, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_n - x - z_m^{(n)}\| \xrightarrow{E} \inf_{z \in \ker(T)} \|x_n - x - z\|$$

Seleccionamos una subsucesión tanto de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como de $(z_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\|x_{n_k} - x - z_{m_k}^{(n)}\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

De donde se sigue que

$$x_{n_k} - z_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x \text{ en } E$$

T es continua, por lo tanto $T(x_{n_k} - z_{m_k}) \rightarrow T(x)$ en F , más aún por linealidad

$$T(x_{n_k}) - T(z_{m_k}) \xrightarrow{z_{m_k} \in \ker(T)} T(x)$$

$$\therefore T(x_{n_k}) \rightarrow T(x) \text{ en } F$$

Pero $s_n = T x_n \rightarrow y$, entonces por unicidad del límite $T x = y$, con lo que se concluye que Ψ es Γ_{Ψ} cerrado. Luego, por el teorema del grafo cerrado, como $F, E/\ker(T)$ son e. de Banach y Ψ , lineal. Así, Ψ es acotada, i.e.,

$$(\exists c > 0) (\forall y \in F) (\| \Psi(y) \|_{E/\ker(T)} \leq c \| y \|_F)$$

Si $y \in B_F(0, 1/c)$, entonces

$$\Psi(y) \in B_{E/\ker(T)}([0, 1]) \quad [**]$$

Tomando $\delta = 1/c > 0$ se tiene que si $y \in B_F(0, \delta)$, por $[**]$, $\Psi(y) \in B_{E/\ker(T)}([0, 1])$ tal que

$$\Rightarrow \text{Existe } [x] \in B_{E/\ker(T)}([0, 1]) \text{ tq } \Psi(y) = [x] \Rightarrow y = T x$$

$$\text{P.D. } y \in T(B_F(0, 1))$$

Como $[x] \in B_{E/V_0(T)}([0], 1)$, entonces $\|[x]\| < 1$

$$\Leftrightarrow \inf_{z \in \ker(T)} \|x - z\| < 1$$

$$\Rightarrow \exists z_0 \in \ker(T) \quad \|x - z_0\| < 1.$$

Finalmente, notemos que $y = T(x - z_0) \in T(B_E(0, 1))$.

Miércoles, 20 de julio de 2022.

Capítulo 3: Cálculo diferencial en espacios normados

Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervalo

f es diferenciable en $x_0 \in \text{Int}(I)$ si existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = L \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{Lh}{h} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - Lh|}{|h|} = 0$$

Definamos $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $h \mapsto \varphi(h) = Lh$. Notemos que φ está bien definida, φ es lineal, φ es acotada ($\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)

Así, f es derivable en $x_0 \in \text{Int}(I)$ si existe $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - \varphi(h)|}{|h|} = 0$$

Relación

$$\varphi = \mathcal{O}(g) \text{ si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\varphi(x)} = 0$$

Por lo tanto, tenemos que

$$f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0) + \varphi(h)}_{A(h)} + \mathcal{O}(h) \leftarrow \text{La función } f \text{ se aproxima localmente a una función afín.}$$

$$\Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) - \varphi(h) = \mathcal{O}(h) \quad h \rightarrow 0$$

Consideremos E y F espacios normados cualesquiera, $U \subseteq E$ abierto y $f: U \rightarrow F$. Se dice que f es diferenciable (Frechet) en $x_0 \in U$ si existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

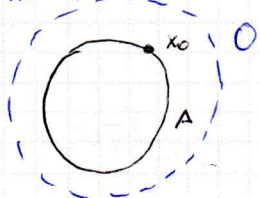
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Th\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

Notar que T depende de x_0

Notación $T = f'(x_0)$. A $T = f'(x_0)$ se lo conocerá como la derivada de Frechet de x_0

Notar que para que el cociente esté bien definido $x_0+h \in U$.

Supongamos que $f: A \subseteq E \rightarrow F$, A cualquier conjunto, f es diferenciable en x_0 si existe $O \subseteq E$ abierto y $\tilde{f}: O \rightarrow F$ función tal que $A \subseteq O$ y $\tilde{f}|_A = f$.



$f: \bar{B}_E(0, 1) \subseteq E \rightarrow F$ f es diferenciable en $x_0 \in \bar{B}_E(0, 1)$

$$\frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Th\|}{\|h\|}$$

Existe $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en E tal que $x_0+h_n \in \bar{B}_E(0, 1)$ $h_n \rightarrow 0$
 $f(x_0+h)$ no existe.

f es diferenciable en U si y solo si f es diferenciable en todo $x_0 \in U$.

La demostración se encuentra en el bloque anterior.

Observación: Notar que la diferenciable en un punto no se ve afectada si se utilizan normas equivalentes en E y F .

Proposición: Sea $f: U \subseteq E \rightarrow F$, si f es diferenciable en $x_0 \in U$, entonces f es Lipschitz continua en $x_0 \in U$.

Definición - Lipschitz continua en un punto-

Sea $f: U \rightarrow F$, f es Lipschitz continua en un punto $x_0 \in U$ si existen $\delta_{x_0} > 0$ y $L_{x_0} > 0$ tales que

$$(\forall x \in U) (\|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq L_{x_0} \|x - x_0\|_E)$$

f Lipschitz continua en x_0 , implica que f continua en x_0 .

Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $(\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0) (\forall x \in U) (\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon)$

Como f es Lipschitz continua en x_0 , entonces existen $r = r_{x_0} > 0$ y $L = L_{x_0} > 0$ tales que

$(\forall u \in U) (\|x - x_0\| < r \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq L \|x - x_0\|$, tomando $\delta = \min\{r, \varepsilon/L\}$, se sigue que
 $(\forall x \in U) (\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < L \|x - x_0\| < L \left(\frac{\varepsilon}{L}\right) = \varepsilon)$.

La demostración de la proposición se encuentra en el bloque anterior.

Viernes, 22 de julio de 2022

Sean E, F espacios normados, $U \subseteq E$ abierto. $f: U \rightarrow F$ función diferenciable en $x_0 \in U$ si existe $T_{x_0} \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}h}{\|h\|_E} = 0 \text{ en } F$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - T_{x_0}h\|_F}{\|h\|_E} = 0 \text{ en } \mathbb{R}$$

$$T_{x_0} = f'(x_0)$$

$$f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot h}_{\text{función afín}} + o(\|h\|), \quad h \rightarrow 0$$

función afín

$$\Leftrightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \|h\|v(h)$$

$v: E \rightarrow F$ tal que $v(h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$

\hookrightarrow definiendo de forma que sea continua en cero.

* Dada $f: U \rightarrow F$, $x_0 \in U$, para hallar (si existe) $T_{x_0} \in \mathcal{L}(E, F)$, se empieza considerando $h \in E$,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = H(h) = \underbrace{F(h)}_{\substack{F \text{ lineal} \\ \text{y acotado}}} + \underbrace{G(h)}_{\substack{= r(h) \|h\| \\ \approx r(h) \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \quad \rightarrow \quad \therefore f \text{ es diferenciable en } x_0 \text{ y } f'(x_0) = F$$

Sabemos que si f es diferenciable en U , entonces f es diferenciable en todo punto de U , lo que permite definir una función

$$Df: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x \mapsto Df(x) = f'(x_0)$$

Df es conocida como la función derivada de f .

Df posee sus propias propiedades, es decir, Df puede o no ser continua. Además, Df en general

no es lineal

Definición - función continuamente diferenciable-

Se dice que $f: U \subseteq E \rightarrow F$, U un abierto de E y E, F espacios normados es continuamente diferenciable en U si f es diferenciable en U y Df es continua en U .

$$C^1(U, F) = \left\{ f: U \rightarrow F \mid f \text{ es continuamente diferenciable en } U \right\}$$

A los elementos de $C^1(U, F)$ se los suele denominar como funciones de clase C^1 .

Ejemplo 1: Ver la proposición de la página 57. $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es de clase C^1

Definamos

$$DT: E \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x \mapsto DT(x) = T$$

Notemos que

- DT es una función constante
- ↳ DT es continua.

Fácilmente se puede probar que DT es continua.

Ejemplo 2: Ver el ejercicio de la página 57.

Lunes, 25 de julio de 2022.

Ver ejemplos, clase martes 15 de febrero de 2022

Una aplicación bilineal es la generalización del producto escalar en \mathbb{R} o \mathbb{R}^n

$$(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$$

$$B(f, g) = f \cdot g$$

$$F(h, k) = B(h, y) + B(h, k)$$

$$F(\alpha(x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = F(\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2) = B(\alpha x_1 + y_1, y) + B(\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2)$$

$$= \alpha B(x_1, y) + B(y_1, y) + \alpha B(x_1, \alpha x_2 + y_2) + B(y_1, \alpha x_2 + y_2)$$

¡No es lineal!

$$= \alpha B(x_1, y) + B(y_1, y) + \alpha^2 B(x_1, x_2) + \alpha B(x_1, y_2) + \alpha B(y_1, x_2) + \dots$$

$$B(x+h, y+k) - B(x, y) - B'(x, y)(h, k) = [B(h, y) + B(h, k)] \frac{\|(h, k)\|}{\|(h, k)\|}$$

$$= \|(h, k)\| \left(\frac{B(h, y) + B(h, k)}{\|(h, k)\|} \right)$$

P.D. DB es continua en $E \times F$

$$DB: E \times F \rightarrow \mathcal{L}(E \times F, G)$$

Sea $(x, y) \in E \times F$. P.D. DB es continua en (x, y) . Sea $(x_n, y_n) \in E \times F$ tal que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$

Convergencia de la norma uniforme.

$$\Leftrightarrow \sup_{\|(h, k)\|=1} \|DB(x_n, y_n)(h, k) - DB(x, y)(h, k)\| \rightarrow 0$$

$$\|DB(x_n, y_n)(h, k) - DB(x, y)(h, k)\|_G = \|B(x_n, k) + B(h, y_n) - B(x, k) - B(h, y)\|_G$$

$$= \|B(x_n - x, k) + B(h, y_n - y)\|_G$$

$$\leq \|B(x_n - x, k)\|_G + \|B(h, y_n - y)\|_G$$

$$\leq \|B\|_{\mathcal{L}(E \times F, G)} \left(\|x_n - x\|_E \|k\|_F + \|y_n - y\|_F \|h\|_E \right)$$

$$\leq \|B\| \left(\|x_n - x\| \|h, k\| + \|y_n - y\| \|(h, k)\| \right)$$

$$= \|B\| \|(h, k)\| \left(\|x_n - x\|_E + \|y_n - y\|_F \right)$$

$$= \|B\| \|(h, k)\| \|(x_n - x, y_n - y)\|_G$$

$$\sup_{\|(h,k)\|=1} \|DB(x_n, y_n)(h, k) - DB(x, y)(h, k)\| \leq \frac{\|B\|}{\leftarrow +\infty} \frac{\|(x_n - x, y_n - y)\|}{\rightarrow 0}$$

$$\therefore DB(x_n, y_n)(h, k) \rightarrow DB(x, y)(h, k)$$

Así, DB es continua en $E \times F$.

Martes, 26 de julio de 2022

Ver ejemplo 6 - Clase Martes 15 de febrero.

Sean $x \in E$ y $h \in E \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \|x+h\|^2 - \|x\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2 - \|x\|^2 \\ &= 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2, \quad \text{con } r(h) = \|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

f es diferenciable en E y $DF: E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$
 $x \mapsto f'(x) = 2\langle x, \cdot \rangle$

¿ $f \in C^1(E; \mathbb{R})$?

Sea $x \in E$ y (x_n) en sucesión en E tal que $x_n \rightarrow x$ en E

P.D. $Df(x_n) \rightarrow Df(x)$ en E^*

Sea $h \in E$, con $\|h\| = 1$.

$$\begin{aligned} |Df(x_n)h - Df(x)h| &= |2\langle x_n, h \rangle - 2\langle x, h \rangle| = 2|\langle x_n - x, h \rangle| \leq 2\|x_n - x\| \|h\| \leq 2\|x_n - x\| \\ 0 &\leq \|Df(x_n)h - Df(x)h\|_{E^*} \leq 2\|x_n - x\|_E \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Observación: Si E es un espacio vectorial complejo, f no es diferenciable en E .

Ejemplo: Sea E un espacio normado, $\|\cdot\|_E$ no es diferenciable en $x=0$.

$f(x) = |x|$, f no es diferenciable en cero.

Supongamos que $\|\cdot\|_E$ es diferenciable en $x=0$. Sea $h \in E$

$$\|0+h\|_E = \|0\|_E + T_0h + \|h\|r(h) \quad \text{con } r(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow \|h\| = T_0h + \|h\|r(h) \quad [1]$$

Para $-h \in E$, se tiene que

$$\|h\| = \|-h\| = T_0(-h) + \|-h\|r(-h) \quad [2]$$

Sumando [1] y [2]

$$2\|h\| = \|h\|[r(h) + r(-h)]$$

$$\Rightarrow 2 = r(h) + r(-h)$$

Cuando $h \rightarrow 0$, $2 = 0 \Rightarrow \Leftarrow$

Teorema (Propiedades algebraicas de la diferenciación)

③ $F = \mathbb{R}(K)$, $g(x_0) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en x_0 y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \text{en } \mathcal{L}(E, K)$$

Observación: Del teorema anterior, se desprende que $C^1(U; F)$ es e.v. Además, el teorema es usado frecuentemente para mostrar la diferenciación de funciones a partir de funciones más simples.

Sea $f: K \rightarrow F$ una función diferenciable $x_0 \in K$

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+d) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot d\|_F}{\|d\|} = 0 \Rightarrow \lim_{d \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x_0+d) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot d}{d} \right\|_F$$

$$\Rightarrow \lim_{d \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x_0+d) - f(x_0)}{d} - \frac{f'(x_0)d}{d} \right\|_F$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x_0+d) - f(x_0) - f'(x_0)(d)}{d} \right\|_F = 0 \Leftrightarrow \lim_{d \rightarrow 0} \frac{f(x_0+d) - f(x_0)}{d} = f'(x_0)(1) \text{ en } F$$

Notemos que $\mathcal{L}(\mathbb{K}, F) \cong F$. Basta considerar

$$\Psi: F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}, F)$$

$$v \mapsto \Psi_v$$

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}, F) \cong F$$

con $\Psi_v(t) = tv$. Ψ es una isometría biyectiva local

Gracias al isomorfismo isométrico podemos identificar la derivada de Fréchet en x_0 con un vector en F .

$$\underbrace{df'(x_0)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{K}, F)} \neq \underbrace{f'(x_0)(d)}_{\in F} = dL, \text{ con } L \in F \text{ y } d \in \mathbb{K} \text{ tal que satisface las hipótesis}$$

Ejemplo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \vec{v} \quad f = (f_1, \dots, f_n), \quad f' = (f'_1, \dots, f'_n)$$

Funciones a valores en un espacio producto (Miércoles 23 de febrero de 2022)

En el espacio producto, consideramos la norma

$$\|(v_1, \dots, v_n)\| = \sum_{j=1}^n \|v_j\|_{F_j}$$

Consideremos

$$\Pi_i = \prod_{j=1}^n F_j \rightarrow F_i \quad \text{proyección canónica}$$

$$(v_1, \dots, v_m) \mapsto v_i$$

$$\Pi_i \in \mathcal{L}\left(\prod_{j=1}^n F_j, F_i\right) \text{ sobreyectiva.}$$

$$C_i: F_i \rightarrow \prod_{j=1}^n F_j$$

$$u \mapsto c_i(u) = (0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0)$$

$$C_i \in \mathcal{L}(F_i, \prod_{j=1}^n F_j) \text{ inyectiva.}$$

Aplicaciones componentes

$f_i = \Pi_i \circ f$ i -ésima componente de f

$$x \in \mathcal{U}, \quad f_i(x) = \Pi_i(f(x)) \in F_i \quad f = \sum_{j=1}^m g_j \circ f_j$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^m g_j \circ f_j(x) = \sum_{j=1}^m g_j(f_j(x)) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

Teorema - Caracterización de funciones diferenciables a valores en un espacio producto-

E, F_1, \dots, F_n espacios normados, $\mathcal{U} \subseteq E$ abierto y $f: \mathcal{U} \rightarrow \prod_{j=1}^m F_j$ función

f es diferenciable en $x_0 \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}$ f_i es diferenciable en $x_0 \in \mathcal{U}$.

Demostración

(\Rightarrow) Sea $i \in \{1, \dots, m\}$

$$f_i = \Pi_i \circ f, \quad \Pi_i \in C^1\left(\prod_{j=1}^m F_j, F_i\right)$$

f es diferenciable en x_0 y Π_i es diferenciable en $f(x_0)$

$\Rightarrow f_i$ es diferenciable en x_0

Demostración completa en los apuntes

$$f \in C^1(\mathcal{U}, \prod_{j=1}^m F_j) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad f_i \in C^1(\mathcal{U}, F_i)$$

(\Rightarrow) P.D. $f_i(x_0)$ es continua en \mathcal{U} . Como f es $C^1(\mathcal{U}, \prod_{j=1}^m F_j)$, entonces existe

$$Df: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(E, \prod_{j=1}^m F_j)$$

$$x_0 \mapsto Df(x_0) = f'(x_0), \text{ luego } f'(x_0) \in \mathcal{L}(E, \prod_{j=1}^m F_j)$$

Así para $i \in \{1, \dots, m\}$

$$f'_i(x_0) \quad Df_i(x) = D\Pi_i(f(x)) \circ Df(x)$$

(10) $x \in \mathcal{U}, (x_n)_n \in \mathcal{U}, x_n \rightarrow x$ P.D. $Df_i(x_n) \rightarrow Df_i(x)$ en $\mathcal{L}(E, F_i)$.

Sea $h \in E$, cualquiera con $\|h\|=1$, notemos que

$$\begin{aligned}
 \|Df_i(x_n) \cdot h - Df_i(x) \cdot h\|_{F_i} &= \|(\pi_i \circ Df(x_n))h - (\pi_i \circ Df(x))h\|_{F_i} \\
 &= \|[(\pi_i \circ Df(x_n)) - (\pi_i \circ Df(x))]h\|_{F_i} \\
 &\leq \|(\pi_i \circ Df(x_n)) - (\pi_i \circ Df(x))\|_{\mathcal{L}(E, F_i)} \|h\|_E \\
 &\leq \|\pi_i \circ Df(x_n)\|_{\mathcal{L}(E, F_i)} + \|\pi_i \circ Df(x)\|_{\mathcal{L}(E, F_i)} \\
 &\leq \|\pi_i\|_{\mathcal{L}(\prod_{j=1}^m F_j, F_i)} \|Df(x_n)\|_{\mathcal{L}(E, \prod_{j=1}^m F_j)} + \|\pi_i\|_{\mathcal{L}(\prod_{j=1}^m F_j, F_i)} \|Df(x)\|_{\mathcal{L}(E, \prod_{j=1}^m F_j)} \\
 &= \|\pi_i\| (\|Df(x_n)\| + \|Df(x)\|) \\
 &\leq \|\pi_i\| (\|Df\| \|x_n\| + \|Df\| \|x\|) \\
 &= \|\pi_i\| \|Df\| (\|x_n\| + \|x\|)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 \leq \|Df_i(x)h - Df_i(x_n)h\|_{F_i} &= \|(\pi_i \circ Df(x_n))h - (\pi_i \circ Df(x))h\|_{F_i} \\
 &= \|\pi_i(Df(x_n)h) - \pi_i(Df(x)h)\|_{F_i} \\
 &= \|\pi_i(Df(x_n)h - Df(x)h)\|_{F_i} \\
 &\leq \|\pi_i\| \|Df(x_n)h - Df(x)h\|_{\prod_{j=1}^m F_j} \\
 &= \|\pi_i\| \|[(Df(x_n) - Df(x))h]\|_{\prod_{j=1}^m F_j} \\
 &\leq \|\pi_i\| \|Df(x_n) - Df(x)\|_{\mathcal{L}(\prod_{j=1}^m F_j, F_i)} \|h\|_E \\
 &\leq \|\pi_i\| \|Df(x_n) - Df(x)\|_{\mathcal{L}(\prod_{j=1}^m F_j, F_i)} \\
 &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\substack{\xrightarrow{>0} \\ \mathcal{L}(\prod_{j=1}^m F_j, F_i)}} > 0 \quad \text{Por la continuidad de } Df \text{ y } x_n \rightarrow x
 \end{aligned}$$

Miércoles, 27 de julio de 2022

$$f \in C^1(U, \prod_{j=1}^m F_j) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad f_i \in C^1(U, F_i)$$

(\Rightarrow) Supongamos que Df es continua en U .

Sea $i \in \{1, \dots, m\}$. P.D. Df_i es continua en U .

Sea $x \in U$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en U tal que $x_n \rightarrow x$ en E

P.D. $Df_i(x_n) \rightarrow Df_i(x)$ en $\mathcal{L}(E, F_i)$

Sea $h \in E$, tal que $\|h\|=1$

$$\begin{aligned}
 \|Df_i(x_n)h - Df_i(x)h\|_{F_i} &= \|\pi_i(Df(x_n)h) - \pi_i(Df(x)h)\|_{F_i} \\
 &= \|\pi_i(Df(x_n)h - Df(x)h)\|_{F_i} \\
 &\leq \|\pi_i\| \|Df(x_n)h - Df(x)h\|_{\prod_{j=1}^m F_j} \\
 &= \|\pi_i\| \|[Df(x_n) - Df(x)]h\|_{\prod_{j=1}^m F_j} \\
 &\leq \|\pi_i\| \|Df(x_n) - Df(x)\|_{\mathcal{L}(E, \prod_{j=1}^m F_j)}
 \end{aligned}$$

$$\sup_{\|h\|=1} \|Df_i(x_n)h - Df_i(x)h\|_{F_i} \leq \|\pi_i\| \|Df(x_n) - Df(x)\|_{\mathcal{L}(E, \prod_{j=1}^m F_j)}$$

(\Leftarrow) Supongamos que para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ Df_i es continua en U .

Sea $x \in U$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en U tal que $x_n \rightarrow x$ en E .

P.D. Df es continua en x

P.D. $Df(x_n) \rightarrow Df(x)$ en $\mathcal{L}(E, \prod_{j=1}^m F_j)$

Sea $h \in E$ tal que $\|h\|=1$,

$$\|Df(x_n)h - Df(x)h\|_{\prod_{j=1}^m F_j} = \left\| \sum_{i=1}^m c_i(Df_i(x_n)h) - \sum_{i=1}^m c_i(Df_i(x)h) \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{i=1}^m [C_i(Df_i(x_n)h) - C_i(Df_i(x)h)] \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^m \|C_i(Df_i(x_n)h - Df_i(x)h)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^m \|C_i\| \| [Df_i(x_n) - Df_i(x)]h \| \\
&\leq \sum_{i=1}^m \|C_i\| \|Df_i(x_n) - Df_i(x)\| \|h\| \xrightarrow{!} 0
\end{aligned}$$

Como Df_i es continua en x , entonces $Df_i(x_n) \rightarrow Df_i(x)$ en $\mathcal{L}(E, F_i)$

$$\sup_{\|h\|=1} \|Df(x_n) - Df(x)\|_{\mathcal{L}(E, \prod_{i=1}^m F_i)} \rightarrow 0$$

Observación Si $f: \mathcal{U} \subseteq E \rightarrow \prod_{j=1}^m F_j$ es diferenciable en $x_0 \in \mathcal{U}$, entonces para todo $h \in E$
 $\forall h \in E$

$$\begin{aligned}
f'(x_0)h &= \sum_{j=1}^m G_j(f'_j(x_0)h) \\
&= (f'_1(x_0) \cdot h, f'_2(x_0) \cdot h, \dots, f'_m(x_0) \cdot h)
\end{aligned}$$

En el caso $f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \prod_{j=1}^m F_j$

$$f'(x_0)h \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, \prod_{j=1}^m F_j) \cong \prod_{j=1}^m F_j$$

Abusando la notación

$$v = f'(x_0)$$

$$v_i = f'_i(x_0)$$

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$ $f'_i(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, F_i) \cong F_i$

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$: $f'_i(x_0) \equiv v_i \in F_i$

Igualdad en el espacio producto. $f'(x_0) = (f'_1(x_0), \dots, f'_m(x_0))$

$h \in \mathbb{K}$ $f'(x_0) \cdot h \equiv (h v_1, h v_2, \dots, h v_m)$

$$= h(v_1, \dots, v_m)$$

$$f'(x_0) \equiv \vec{v} \in \prod_{j=1}^m F_j$$

$$\begin{cases}
\downarrow \\
h v = h(v_1, \dots, v_m) \\
v = (v_1, \dots, v_m)
\end{cases}$$

Subsección: Funciones definidas en un abierto de un espacio producto.

Sean E_1, \dots, E_n, F espacios normados, $\mathcal{U} \subseteq \prod_{i=1}^n E_i$ abierto y

$$f: \mathcal{U} \subseteq \prod_{i=1}^n E_i \rightarrow F$$

Sea $a \in \mathcal{U}$, la aplicación parcial i -ésima de f en el punto a , se define por

$$\begin{aligned}
\varphi_i: \mathcal{U}_i \subseteq E_i &\rightarrow F \\
x &\mapsto \varphi_i(x) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)
\end{aligned}$$

Donde $\mathcal{U}_i = \{x \in E_i : (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathcal{U}\}$

Sea $x \in \mathcal{U}_i$: P.D. $(\exists r > 0) (B_{E_i}(x, r) \subseteq \mathcal{U}_i)$

$$x \in \mathcal{U}_i \Leftrightarrow (a_1, \dots, x, \dots, a_n) \in \mathcal{U} \Rightarrow (\exists R > 0) B_{\prod_{i=1}^n E_i}((a_1, \dots, x, \dots, a_n), R) \subseteq \mathcal{U}$$

Sea $y \in B_{E_i}(x, r)$ P.D. $y \in \mathcal{U}_i$

$$\|y - x\|_{E_i} = \|(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n) - (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)\| < r$$

$$(a_1, \dots, y, \dots, a_n) \in B_{\prod_{i=1}^n E_i}((a_1, \dots, x, \dots, a_n), r) \subseteq \mathcal{U}$$

$\mathcal{U}_i \neq \emptyset$ pues $a_i \in \mathcal{U}_i$

Si φ_i es diferenciable en a_i , entonces se dirá que f posee derivada parcial i -ésima en el punto a

$$\varphi_i: \mathcal{U}_i \rightarrow F, \quad f: \mathcal{U} \rightarrow F$$

$$\varphi_i'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \text{Dif}(a) \in \mathcal{L}(E_i, F)$$

Si φ_i es diferenciable en \mathcal{U}_i , entonces f posee derivada parcial i -ésima en \mathcal{U} , y se define la función derivada parcial de f como

$$\text{Dif}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(E_i, F) \quad D\varphi_i: \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{L}(E_i, F)$$

Teorema. Sea $f: \mathcal{U} \subseteq \prod_{i=1}^m E_i \rightarrow F$. Si f es diferenciable en $a \in \mathcal{U}$, entonces para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ existe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Además,

$$h = (h_1, \dots, h_m) \quad f'(a) \cdot h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) h_m$$

Lunes, 1 de agosto de 2022.

Observación: La existencia de todas las derivadas parciales en un punto a , no implica que f sea diferenciable en a .

Sección - Teorema de los incrementos finitos.

Notemos que el TVM no se cumple, en general, para funciones diferenciables en cualquier espacio normado a valores en cualquier espacio normado.

Por ejemplo: Sea $f: [-\pi, \pi] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto e^z$.

f es continua en $[-\pi, \pi]$ y diferenciable en $(-\pi, \pi)$, supongamos que f cumple con el TVM, entonces existe $\xi \in (-\pi, \pi)$ tal que

$$f(\pi) - f(-\pi) = f'(\xi)(\pi - (-\pi)) \Rightarrow -1 - (-1) = 2\pi i (f'(\xi))$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = 0 \Rightarrow e^\xi = 0 \Rightarrow \Leftarrow$$

pues $e^\xi \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$

Viernes 5 de agosto de 2022

Teorema. Sean E, F e.n. $\mathcal{U} \subseteq E$ un abierto y $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $f: \mathcal{U} \rightarrow F$ es diferenciable en u , entonces para cualquier $h \in E$, tal que $\exists u, u+th \subseteq \mathcal{U}$

$$\|f(u+th) - f(u) - T(h)\|_F \leq \sup_{\xi \in]u, u+th[} \|f'(\xi) - T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|h\|_E$$

Demostración

Sea $h \in E$ tal que $\exists u, u+th \subseteq \mathcal{U}$. Se define

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow F$$

$$t \mapsto \varphi(t) = f(u+th) - tTh.$$

φ es continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$. En efecto, escribiendo $\varphi = f \circ \Psi - \Phi$, donde

$$\Psi: [0, 1] \rightarrow \mathcal{U} \subseteq E$$

$$t \mapsto u+th$$

$$\Phi: [0, 1] \rightarrow F$$

$$t \mapsto tTh$$

Ψ es continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$. $(f \circ \Psi)$ es continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$, Φ es continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$.

Además, para todo $t \in]0, 1[$

$$\varphi'(t) = f'(t)$$

Por el teorema de incrementos finitos aplicado a φ , se sigue

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\|_F \leq \sup_{t \in (0, 1)} \|\varphi'(t)\|_F$$

y por lo tanto

$$\|f(u+h) - f(u) - Th\|_F \leq \sup_{t \in (0,1)} \|f'(u+th)h - Th\|_F$$

$$\leq \sup_{t \in (0,1)} \|f'(u+th) - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|h\|_E$$

y definiendo $\xi = u+th$ con $t \in (0,1)$, entonces, entonces

$$\|f(u+h) - f(u) - Th\|_F \leq \sup_{\xi \in I[u, u+h]} \|f' - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|h\|_E$$

Teorema - Condiciones suficientes para la F-diferenciabilidad - [Ver los apuntes anteriores]

Lunes, 8 de agosto de 2022.

Teorema de la función Inversa.

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I es un intervalo

① $y = f(x)$ ¿Es posible escribir $x = g(y)$?

¿Existe g tal que $f \circ g = g \circ f = \text{id}$?

¿Bajo que condiciones una función f definida en I posee una función inversa?

Conjuntamente, la condición necesaria y suficiente es la biyectividad.

② En muchas ocasiones estamos interesados en conocer si una función es invertible localmente, es decir, que podemos restringir la función a un subconjunto de su dominio de forma que la función sea invertible. Más aún queremos saber si dado $a \in I$, existe I_a una vecindad abierta tal que

$$f|_{I_a}: I_a \rightarrow J_{f(a)} = f(I_a)$$

sea invertible.

Ejemplo: La función $f(x) = x^2$, con $x \in \mathbb{R}$, jamás tendrá una inversa local en el punto $x=0$

③ ¿Existen condiciones suficientes que permitan conocer si la función es invertible localmente en un punto dado?

Si la función es diferenciable en su dominio, entonces podríamos recurrir a la derivada de la función en dicho punto

Ejemplo: $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$

$$f'(x) < 0 \quad \text{si } x < 0 \quad \wedge \quad f'(x) > 0 \quad \text{si } x > 0$$

$\Rightarrow f$ es diferenciable en $]-\infty, 0[$ y creciente en $]0, +\infty[$

④ ¿Esto quiere decir que si una función es diferenciable en I y $f'(x_0) \neq 0$, con $x_0 \in I$, entonces f es invertible localmente?

No, pues $f(x) = x^3$ verifica que $f'(0) = 0$ y f es invertible en \mathbb{R}

Teorema: - Teorema de la función inversa local -

Sean E, F espacios de Banach y $f \in C^1(U, F)$. Si existe $a \in U$ tal que $f'(a)$ es un isomorfismo (homeomorfismo lineal), entonces existe \mathcal{U}_a abierto de E que contiene a a tal que $\mathcal{V}_{f(a)} = f(\mathcal{U}_a)$ es un abierto de F que contiene a $f(a)$ y

$$f|_{\mathcal{U}_a}: \mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{V}_{f(a)}$$

es un difeomorfismo de clase C^1 en \mathcal{U}_a

f es diferenciable en \mathcal{U}_a f y f^{-1} sean de clase C^1

f^{-1} es diferenciable en $\mathcal{V}_{f(a)}$

Demostración (Por etapas)

1ª Etapa

Si se logra demostrar el teorema para $E=F$, $f(0)=0$, $f'(0)=\text{id}_E$, entonces se tiene el teorema con las hipótesis originales. En efecto, supongamos que existen $W \subseteq E$ y $g \in C^1(W; E)$ tales que $g(0)=0$ y $g'(0)=\text{id}_E$, con $0 \in W$. Entonces existe W_0 abierto de E tal que $Y_0 = g(W_0)$ es un abierto de E que contiene a $g(0)=0$ tal que

$$g|_{W_0} : W_0 \rightarrow Y_0$$

es un difeomorfismo de clase C^1 sobre W_0 .

Sea $f: U \subseteq E \rightarrow F$ con $U \subseteq E$ abierto, tal que $f \in C^1(U; F)$. Supongamos que existe $a \in U$ tal que $f'(a)$ es un isomorfismo

P.D. $(\exists U_a$ abierto de E) $(\forall f(a) = f(U_a)$ abierto que contiene a $f(a)$) y

$$f|_{U_a} : U_a \rightarrow V_{f(a)}$$

es un difeomorfismo de clase C^1 en U_a .

Definamos

$$g: W \subseteq E \rightarrow E \\ x \mapsto g(x) = (f'(a))^{-1} (f(a+x) - f(a))$$

donde $W = \{x \in E : a+x \in U\}$

Notar que $0 \in W$, W es abierto de E , $g(0)=0$, $g \in C^1(W; E)$ y $g'(0)=\text{id}_E$. Por lo tanto, existe W_0 abierto de E tal que $Y_0 = g(W_0)$ abierto de E y

$$g|_{W_0} : W_0 \rightarrow Y_0$$

es un difeomorfismo de clase C^1 sobre W_0 . Finalmente, de la definición de g , para todo $z \in U$

$$f(z) = f(a) + f'(a) (g(z-a)) \quad [\text{Notar que } z-a \in W]$$

Por lo tanto, f es un difeomorfismo de clase C^1 de $U_a = W_0 + \{a\}$ sobre $V_{f(a)} = f(U_a)$. En efecto, para todo $z \in U_a$

$$f|_{U_a}(z) = f(a) + f'(a) \underbrace{(g(z-a))}_{\in W_0} \\ = f(a) + f'(a) \underbrace{(g|_{W_0}(z-a))}_{\in Y_0} \in \{f(a)\} + \underbrace{f'(a)(Y_0)}_{\substack{\text{abierto en } F \text{ que} \\ \text{contiene a } 0}} = V_{f(a)}$$

Res $f'(a)$ es un isomorfismo.

$f|_{U_a}$ es biyectiva pues $g|_{W_0}$ es biyectiva. \circ

$$f'(a)^{-1} (f|_{U_a}(z) - f(a)) = g|_{W_0}(z-a)$$

$$\therefore a + g|_{W_0}^{-1} (f'(a)^{-1} (f|_{U_a}(z) - f(a))) = z = f|_{U_a}^{-1}(z)$$

$$f|_{U_a}^{-1} \in C^1(V_{f(a)}; U_a) \text{ pues } g|_{W_0}^{-1} \in C^1(Y_0; W_0)$$

Etapa 2: Existencia de una inversa local en el problema reducido

Sea $f: U \subseteq E \rightarrow E$, con U un abierto de E y $0 \in U$, $f \in C^1(U; E)$, $f(0)=0$ y $f'(0)=\text{id}_E$

P.D. $(\exists U_0$ abierto de E) $f|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0 = f(U_0)$ es biyectiva

$$\Leftrightarrow (\exists U_0 \text{ abierto de } E) (\forall y \in V_0) (\exists! x \in U_0) (y = f(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists U_0 \text{ abierto de } E) (\forall y \in V_0) (\exists! x \in U_0) (x \text{ es punto fijo de } h_y \text{ con } h_y(x) = y - f(x) + x)$$

Para usar el teorema del punto fijo de Barach sobre h_y se debe definir X un e.m. completo tal que $h_y: X \rightarrow X$ es una contracción

Notar que $h_y(x) = g(x) + y$, donde

$$g: U \subseteq E \rightarrow E \\ x \mapsto g(x) = x - f(x)$$

Notar que $g \in C^1(U; E)$ pues es la suma algebraica de funciones de clase C^1 sobre U , $g(0) = 0$ y $g'(0) = 0 \in \mathcal{L}(E, E)$. Mostremos que existe $r > 0$ tal que $\forall y \in B_E(0, r/2)$, $h_y|_{B_E(0, r)} : B_E(0, r) \rightarrow B_E(0, r)$ i.e. su imagen es el mismo objeto

Como D_g es continua en U , existe $B_E(0, 2\delta)$ tal que

$$B_E(0, 2\delta) \subseteq \bar{B}_E(0, 2\delta) \not\subseteq U \quad \text{y}$$

$$\forall x \in B_E(0, 2\delta), \quad g'(x) \in \mathcal{B}_{\mathcal{L}(E, E)}(0; 1/2)$$

Esto es la definición $\epsilon = \delta$ de continuidad de g'

[*]

Tomando $r = 2\delta$, mostremos que

$$\forall y \in B_E(0, \delta), \quad h_y(B_E(0, 2\delta)) \subseteq B_E(0, 2\delta)$$

Sean $y \in B_E(0, \delta)$ y $x \in B_E(0, 2\delta)$ P.D. $h_y(x) \in B_E(0, 2\delta)$

$$\|h_y(x)\|_E \leq \|g(x)\|_E + \|y\|_E < \|g(x)\|_E + \delta \quad [**]$$

Por otro lado, aplicando el TIFG a g , se tiene que

$\forall x \in B_E(0, 2\delta)$, $\exists 0, x] \subseteq B_E(0, 2\delta)$ [Pues $B_E(0, 2\delta)$ es convexo] y

$$\|g(x) - g(0)\|_E \leq \sup_{\xi \in]0, x]} \|g'(\xi)\|_{\mathcal{L}(E, E)} \|x - 0\|_E$$

$$\leq \sup_{\xi \in B_E(0, 2\delta)} \|g'(\xi)\|_{\mathcal{L}(E, E)} \|x\|_E$$

$$\therefore \|g(x)\|_E \leq \frac{1}{2} \|x\|_E$$

[*]

Así, continuando en [**]

$$\|h_y(x)\|_E < \frac{1}{2} \|x\|_E + \delta < \frac{1}{2} (2\delta) + \delta = 2\delta$$

$$\therefore h_y \in B_E(0, 2\delta)$$

[Exposición] Más aún, notar que $\forall y \in B_E(0, \delta)$, $h_y|_{\bar{B}_E(0, 2\delta)} : \bar{B}_E(0, 2\delta) \rightarrow \bar{B}_E(0, 2\delta)$

P.D. h_y es una contracción en $\bar{B}_E(0, 2\delta)$.

Sean $x_1, x_2 \in \bar{B}_E(0, 2\delta)$, $y \in B_E(0, \delta)$

$$\begin{aligned} \|h_y(x_1) - h_y(x_2)\| &= \|g(x_1) + y - g(x_2) - y\| \\ &= \|g(x_1) - g(x_2)\| \end{aligned}$$

$$\text{TIFG} \rightarrow \leq \sup_{\xi \in B_E(0, 2\delta)} \|g'(\xi)\| \|x_1 - x_2\|$$

$$\text{Por [*]} \rightarrow \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$$

$\therefore h_y$ es una contracción en la bola $B_E(0, 2\delta)$

[Exposición] $\therefore h_y$ es una contracción en la bola cerrada $\bar{B}_E(0, 2\delta)$

Por el teorema del punto fijo de Banach

$$\forall y \in B_E(0, \delta) \quad \exists! x \in \bar{B}_E(0, 2\delta) : h_y(x) = x$$

Notar que $x \in B(0, 2\delta)$ pues $\|x\| = \|h_y(x)\| \leq \|g(x)\| + \|y\|$

$$\leq \frac{1}{2} \|x\| + \|y\| < \delta + \delta = 2\delta$$

Así, tomando $U_0 = B_E(0, 2\delta) \cap f^{-1}(B_E(0, \delta))$ [pues $y = f(x) \in B(0, \delta)$], la cual es una vecindad abierta de 0,

$$f|_{U_0} : U_0 \rightarrow B_E(0, \delta)$$

es una biyección

Lunes, 15 de agosto de 2022

Etapa 3: $f|_{U_0}^{-1}$ es Lipschitz continua.

P.D. $(\exists L > 0) (\forall y_1, y_2 \in V_0) (\|f|_{U_0}^{-1}(y_1) - f|_{U_0}^{-1}(y_2)\|_E < L \|y_1 - y_2\|_E)$

Sean $y_1, y_2 \in V_0$,

$$\|f|_{U_0}^{-1}(y_1) - f|_{U_0}^{-1}(y_2)\| = \|x_1 - x_2\|$$

Pues al ser $f|_{U_0}^{-1}$ biyectiva, se sigue que existen únicos x_1 y x_2 tales que

$$f|_{U_0}^{-1}(y_1) = x_1 \quad \text{y} \quad f|_{U_0}^{-1}(y_2) = x_2$$

Notemos que además, x_1 y x_2 son puntos fijos de $h_{y_1}(x_1)$, luego

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \|h_{y_1}(x_1) - h_{y_2}(x_2)\| \\ &= \|g(x_1) + y_1 - g(x_2) - y_2\| \\ &\leq \|g(x_1) - g(x_2)\| + \|y_1 - y_2\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| \\ &= \frac{1}{2} \|f|_{U_0}^{-1}(y_1) - f|_{U_0}^{-1}(y_2)\| + \|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

$$\therefore \|f|_{U_0}^{-1}(y_1) - f|_{U_0}^{-1}(y_2)\| \leq 2 \|y_1 - y_2\|$$

Tomando $L = 2 > 0$, se sigue el resultado deseado.

Etapa 4: Mostrar que $f|_{U_0}^{-1} \in C^1(U_0, V_0)$

P.D. $f|_{U_0}^{-1}$ es diferenciable en U_0 .

En general si $f: U \rightarrow V$ es un difeomorfismo, entonces

$$\forall u \in U, \quad f'(u) \text{ es un isomorfismo y además } (f^{-1})'(f(u)) = (f'(u))^{-1}$$

f es diferenciable en U y f^{-1} es diferenciable en V , $\text{id}_E = f \circ f^{-1}; V \rightarrow U$.

$$\text{id}_E = f^{-1} \circ f: U \rightarrow U.$$

De la regla de la cadena

$$\forall v \in V \quad (f \circ f^{-1})'(v) \text{ existe en } U$$

$$(f \circ f^{-1})'(v) = f'(f^{-1}(v)) \circ (f^{-1})'(v) = \text{id}_E.$$

$$\therefore (f^{-1})'(v) = f'(f^{-1}(v))^{-1}.$$

$f^{-1} \circ f$ es diferenciable en $U \stackrel{=U}{=} V$.

$$\forall u \in U, \quad (f^{-1} \circ f)'(u) = (f^{-1})'(f(u)) \circ f'(u) = \text{id}_E$$

$$\forall v \in V \quad (f \circ f^{-1})'(v) = f'(f^{-1}(v)) \circ (f^{-1})'(v) = \text{id}_E$$

$$f'(u) \circ (f^{-1})'(f(u)) = \text{id}_E$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Existe } f'(u)^{-1} \quad \forall u \in U. \\ \Rightarrow f'(u)^{-1} = (f^{-1})'(f(u)). \end{aligned}$$

Observación: Sin embargo, en nuestro contexto no conocemos la existencia de $f|_{U_0}'(x)^{-1}$ y mucho menos que $f|_{U_0}$ es un difeomorfismo.

En este sentido, primero se prueba que

$$\forall x \in U_0, \quad f|_{U_0}'(x)^{-1} \text{ existe.}$$

Para ello, como $f \in C^1(U; E)$, entonces $f|_{U_0} \in C^1(U_0, V_0)$ y por lo tanto

$$\|Df|_{U_0}(x) - Df|_{U_0}(0)\| < \frac{1}{2} \quad \mathcal{L}(E, E)$$

$$Df|_{U_0}: U_0 \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$$

$$x \mapsto Df|_{U_0}(x)$$

$$g: U \subseteq E \rightarrow E$$

$$x \mapsto g(x) = x - f(x)$$

$$g \in C^1(U; E), \forall x \in U, g'(x) = id_E - f'(x)$$

$$g'(x) \in \mathcal{B}_{\mathcal{L}(E, E)}(0; 1/2) \quad \forall x \in B(0, \delta)$$

$\forall x \in U_0 = B(0, 2\delta) \cap f^{-1}(B(0, \delta))$, luego

$$\|g'(x) - 0\| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \|id_E - f'(x)\| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \|f'(0) - f'(x)\| < \frac{1}{2}$$

Además, como $\|id_E^{-1}\| = 1$, entonces $\frac{1}{\|id_E^{-1}\|} = 1 > \frac{1}{2}$

Así, $\|Df|_{U_0}(x) - Df|_{U_0}(0)\| < \frac{1}{\|Df|_{U_0}(0)\|}$ y

por lo tanto, $Df|_{U_0}(x) \in \text{Isomorfismos}(E, E) \quad \forall x \in U_0$.

Esto se obtiene al aplicar el siguiente resultado, sean $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $S \in \text{Isom}(E, F)$ tales que

Exposición $\|T - S\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \frac{1}{\|S^{-1}\|} \Rightarrow T \in \text{Isom}(E, F)$

Ahora, mostremos que (Simplificamos la notación al tomar $f^{-1} = f|_{U_0}^{-1}$) para cualquier $y \in U_0$.

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - (f'(x))^{-1}k\|}{\|k\|} = 0 \quad \text{con } x = f^{-1}(y) \in U_0$$

Primero notar que $k \in E$ tal que $y+k \in U_0$ pues $y \in U_0$ y U_0 es abierto. Así, existe $h \in E$ tal que $x+h \in U_0$

$$y+k = f(x+h) \quad (\text{Pues } f \text{ es biyectiva})$$

Además, notar que si $k \rightarrow 0, h \rightarrow 0$

$$x+h = f^{-1}(y+k) \rightarrow f^{-1}(y) = x \quad x+h \rightarrow x \Leftrightarrow h \rightarrow 0$$

$$k \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0$$

$$\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - (f'(x))^{-1}k\| = \|x+h - x - (f'(x))^{-1}(f(x+h) - f(x))\|$$

$$= \|h - (f'(x))^{-1}(f(x+h) - f(x))\| \quad (f'(x)^{-1} \circ f'(x) = id_E)$$

$$= \|id_E(h) - (f'(x))^{-1}(f(x+h) - f(x))\|$$

$$= \|(f'(x))^{-1}(f'(x)h) - (f'(x))^{-1}(f(x+h) - f(x))\|$$

$$\leq \|(f'(x))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E)} \|f'(x)h - (f(x+h) - f(x))\|$$

$$= \|(f'(x))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E)} \|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\|$$

$$\forall k \neq 0 \quad \therefore \|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - (f'(x))^{-1}k\| \leq \frac{\|(f'(x))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E)}}{\|k\|} \|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\|$$

$$= \frac{\|h\|}{\|k\|} \|(f'(x))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E)} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\|}{\|h\|} \rightarrow 0$$

Notar que

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|x+h - x\|}{\|k\|} = \frac{\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)\|}{\|k\|} \leq L \frac{\|y+k - y\|}{\|k\|} = L \frac{\|k\|}{\|k\|} = L$$

Por la etapa 3

Etapa 4 $f|_{U_0}^{-1} \in C^1(U_0; E)$ $f|_{U_0}^{-1}$ es diferenciable en U_0

$$\Phi: \text{Isom}(E, E) \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$$

$$T \mapsto T^{-1}$$

P.D. $Df|_{U_0}^{-1}$ es continua en U_0

$$Df|_{U_0}: U_0 \rightarrow \text{Isom}(E, E)$$

$$Df|_{U_0}^{-1}: U_0 \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$$

$$v \mapsto Df|_{U_0}^{-1}(v) = (Df|_{U_0}(u))^{-1}, \quad u \in U_0 \text{ tal que } f(u) = v$$

$$= (Df|_{U_0}(f|_{U_0}^{-1}(v)))^{-1}$$

$$f|_{U_0}^{-1}: U_0 \rightarrow U_0$$

$$Df|_{U_0}^{-1}(v) = \Phi \circ Df|_{U_0} \circ f|_{U_0}^{-1}(v)$$

Continua por \downarrow $f \in C^1(U; E)$ \downarrow Continua en U_0
 E es un espacio de Banach.

Observación

- Este teorema es frecuentemente usado para conocer información sobre la derivada de la función inversa sin necesidad de conocer explícitamente la función inversa definida localmente.
- En dimensión finita, la hipótesis de que $f'(a) \in \text{Isom}(E, F)$ se reemplaza por la hipótesis de que la matriz asociada a $f'(a)$ posea determinante distinto de cero [Jacobiano de f es distinto de cero].

(Teorema - Función inversa global -) Homeomorfismo diferenciable \Leftrightarrow Difeomorfismo

¿Existe alguna función f tal que f sea biyectiva, de clase C^1 pero su inversa f^{-1} no es diferenciable?

Consideremos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) = x^3$. Notemos que $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ no es diferenciable en $y=0$. $\therefore f$ no es de clase C^1 pero es un homeomorfismo diferenciable.

Teorema - Función inversa global -

Sean E, F espacios de Banach, $U \subseteq E$ abierto, $f \in C^1(U; F)$.

f es un difeomorfismo de clase $C^1 \Leftrightarrow f$ es inyectiva y $\forall x \in U, f'(x) \in \text{Isomorfismo}(E, F)$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = x^3$$

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad x \mapsto f'(x)$$

$$f'(x)h = 3x^2h \quad |f'(x) \cdot h| = |x^3| \cdot |h|$$

$$f'(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad h \mapsto 3x^2h$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \in \text{Isom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad f'(0) = 0$ no es inyectiva.
 $\hat{=}$ operador lineal constante (no es inyectiva).

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y acotada $\Leftrightarrow f(x) = f(1) \cdot x = a \cdot x$.

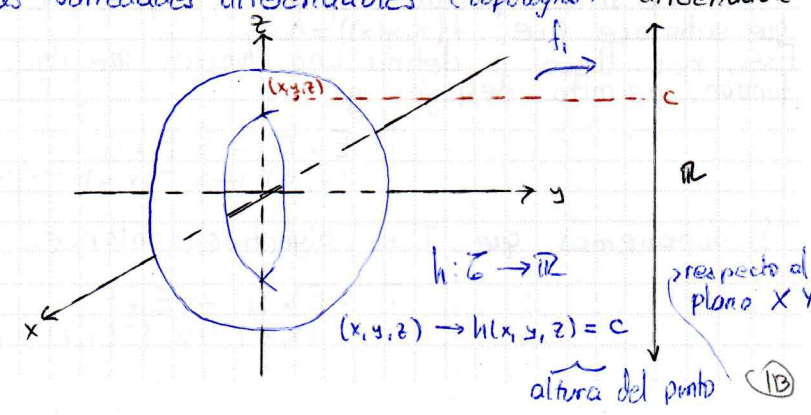
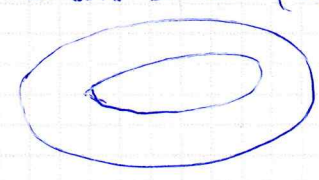
Función implícita.

Frecuentemente, se consideran funciones definidas en abiertos, es decir, $f: U \subseteq E \rightarrow F$ con U un abierto en E para hablar de la diferenciability. Sin embargo, en algunas ocasiones es de interés hablar de la diferenciability de funciones definidas en curvas, en superficies o en general en conjuntos que no son abiertos, sin intentar extender el dominio de la función a un abierto.

Sean \mathcal{C} una curva en \mathbb{R}^2 , S una superficie en \mathbb{R}^3 , definamos $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, f: S \rightarrow \mathbb{R}$.
 ¿ $f|_{\mathcal{C}}$ es diferenciable? ¿ $f|_S$ es diferenciable?

La generalización de curvas y superficies son las variedades diferenciables (espacio topológico) (estructura diferenciable) (equipado)

Consideremos el toro en \mathbb{R}^3 (superficie en \mathbb{R}^3)

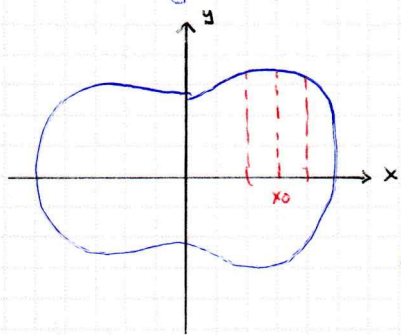


$c \in \text{Im}g(h) \quad h^{-1}(\{c\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{E} : h(x, y, z) = c\}$. Notar que $z=c$

$= \{(x, y, z=c) \in \mathbb{E} : h(x, y, c) = c\}$. La preimagen, visualmente, se obtiene al intersecar el plano a la altura dada con el toro.

Si $c \notin \text{Im}g(h) : h^{-1}(\{c\}) = \emptyset$

Con lo visto, si $c \in \text{Im}g(h)$ es de interés tratar de encontrar una función que represente a dichas curvas



¿Existe $g: \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x)=y$ con $(x,y) \in \mathbb{E}$?

¡No! Gráficamente, no es una función al no ser inyectiva

Localmente, es posible representar dicha curva a través de (una) función(es)

¿En cualquier punto de la curva se puede encontrar una función que represente la curva localmente?

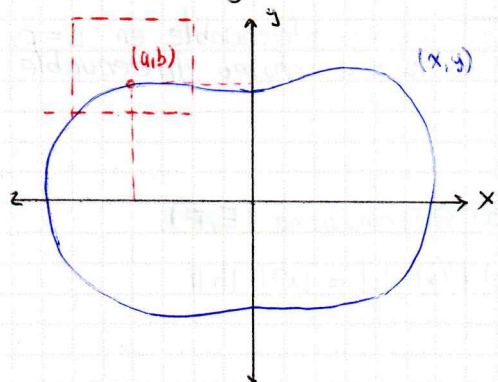
¡No!

La existencia de una función g que describa localmente a la curva, depende del punto en la curva y de la variable que tendrá g como argumento, es decir, $(x,y) \in \mathbb{E}$ ¿Existe $f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$y = f(x) ?$$

¿Existe $\alpha: \text{Dom}(\alpha) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x = \alpha(y)$?

Lunes, 22 de agosto de 2022



$(x,y) \in \mathbb{E}$

¿Existe $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = g(x)$?

¿Existe $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x = h(y)$?

Teorema - Función implícita-

Sean E, F, G espacios de Banach, $\mathcal{U} \subseteq E \times F$ abierto y $f \in C^1(\mathcal{U}; G)$. Sea $(a,b) \in \mathcal{U}$ tal que $f(a,b) = 0$.

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in \text{Isomorfismo}(F, G)$, entonces

- Existe $\mathcal{U}_{(a,b)} \subseteq \mathcal{U}$ vecindad abierta en $E \times F$
- Existe W_a vecindad abierta en E
- Existe $g: W_a \rightarrow F$ tal que $g \in C^1(W_a; F)$, con $b = g(a)$, tales que $(x,y) \in \mathcal{U}_{(a,b)}$ y $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \in W_a$ y $y = g(x)$

Ideas de demostración:

Notar que si fuese posible despejar y a partir de $f(x,y) = 0$, entonces existiría g tal que $y = g(x)$ que satisface que $f(x, g(x)) = 0$. Esto nos lleva a definir una función que deje fija la variable x y que la inversa de dicha función, permita despejar y .

$$T: E \times F \rightarrow E \times G \\ (x,y) \mapsto T(x,y) = (x, f(x,y))$$

Si suponemos que T es biyectiva, entonces

$$T^{-1}: E \times G \rightarrow E \times F \\ (x,z) \mapsto T^{-1}(x,z) = (p(x,z), q(x,z))$$

satisface que

$$\begin{aligned} T \circ T^{-1}(x, z) &= T(p(x, z), q(x, z)) \\ &= (p(x, z), \underbrace{f(p(x, z), q(x, z))}_z) \\ &= (x, z), \end{aligned}$$

luego $p(x, z) = x$ y $f(x, q(x, z)) = z$. Así

$$T^{-1}(x, z) = (x, q(x, z))$$

Como $T(x, y) = (x, z)$, entonces $f(x, y) = z$, lo que implica que $q(x, z) = y$. Además, para (x, y) tales que $f(x, y) = 0$, entonces $z = 0$ y se tiene que

$$y = q(x, 0)$$

Demostración

Sea $T: \mathcal{U} \subseteq E \times F \rightarrow E \times G$
 $(x, y) \mapsto T(x, y) = (x, f(x, y))$

Notar que $E \times F$ y $E \times G$ son espacios de Banach.

Además, $T \in C^1(\mathcal{U}; E \times G)$ pues $T_1(x, y) = x$, $T_2(x, y) = f(x, y)$ son funciones de clase C^1

$T'(a, b) \in \text{Isomorfismo}(E \times F; E \times G)$. En efecto, $\forall (x, y) \in \mathcal{U}$, $\forall (h, k) \in E \times F$,

$$T'(x, y)(h, k) = \begin{pmatrix} \text{id}_E & 0_{\mathcal{Y}(F, E)} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad T'(x, y) \equiv \begin{pmatrix} \text{id}_E & 0_{\mathcal{Y}(F, E)} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

$T'(a, b)$ es lineal pues

$$T'(a, b)(h, k) = \left(h, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k \right)$$

$T'(a, b)$ es continua por definición

$T'(a, b)$ es inyectiva pues $\ker T'(a, b) = \{(0, 0)\}$

$$(h, k) \in \ker T'(a, b) \Rightarrow \left(h, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k \right) = (0, 0)$$

$$\therefore \left(h = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k = 0 \Rightarrow k = 0 \right) \Rightarrow (h, k) = (0, 0)$$

$T'(a, b)$ es sobreyectiva pues $(u, v) \in E \times G$. debemos probar que existen $(h, k) \in E \times F$ tales que

$$T'(a, b)(h, k) = (u, v)$$

$$\left(h, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k \right) = (u, v) \quad \therefore h = u, \quad k = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)^{-1} \left(v - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)u \right)$$

Así, $T'(a, b)$ es lineal, acotada y biyectiva, con lo cual por el Teorema de Isomorfismos de Banach, $T'(a, b)^{-1}$ es acotado.

$$\therefore T'(a, b) \in \text{Isomorfismo}(E \times F; E \times G)$$

Por el teorema de la función inversa, existe $\mathcal{U}_{(a, b)} \subseteq \mathcal{U}$ es una vecindad abierta en $E \times F$ de (a, b) y existe $\mathcal{V}_{(a, b)}$ una vecindad abierta de $T(a, b)$ en $E \times G$ tales que

$$T|_{\mathcal{U}_{(a, b)}} : \mathcal{U}_{(a, b)} \rightarrow \mathcal{V}_{(a, b)}$$

es un difeomorfismo de clase C^1

Por simplicidad, se usará T y T^{-1} en lugar de $T|_{\mathcal{U}_{(a, b)}}$ y $(T|_{\mathcal{U}_{(a, b)}})^{-1}$, la inversa de T, T^{-1} , se representa por

$$T^{-1}(x, z) = (x, q(x, z))$$

para $\varphi: V(a,0) \rightarrow F$ función. Dado que T^{-1} es de clase C^1 , entonces $\varphi \in C^1(V(a,0); F)$. Notar que

$$T^{-1}(a,0) = (a, \varphi(a,0)) = (a,b) \quad (T(a,b) = (a, f(a,b)) = (a,0) \Rightarrow T^{-1}(a,0) = (a,b))$$

$$\therefore \varphi(a,0) = b. \quad [*]$$

Se define $W_a = \{x \in E : (x,0) \in V(a,0)\}$.

- $W_a \neq \emptyset$ pues $a \in W_a$
- W_a es un abierto en E pues $V(a,0)$ es un abierto en $E \times G$.

Se define $g: W_a \rightarrow F$
 $x \mapsto g(x) = \varphi(x,0)$

$\varphi \in C^1(W_a; F)$ pues $\varphi \circ C_1$, donde $C_1: E \rightarrow E \times G$
 $x \mapsto (x,0)$. Más aún $g'(a) = b$
 \uparrow por [*].

Finalmente, vemos que se cumple la equivalencia

$$\begin{aligned} x \in W_a, y = g(x) &\Leftrightarrow (x,0) \in V(a,0), y = \varphi(a,0) \\ &\Leftrightarrow (x,0) \in T(U(a,b)) \quad (x,y) = (x, \varphi(x,0)) \\ &\Leftrightarrow T^{-1}(x,0) \in U(a,b) \quad \wedge \quad (x,y) = T^{-1}(x,0) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in U(a,b) \quad T(x,y) = (x,0) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in U(a,b) \quad T(x,y) = (x, f(x,y)) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in U(a,b) \quad f(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Martes, 23 de agosto de 2022

Observación 1 La función g que define y como función de x es conocida como función implícita, determinada por la ecuación $f(x,y)=0$, se dice que la relación $f(x,y)=0$, define implícitamente a y como función de x .

Del teorema de la función implícita

$$\forall (x,y) \in U(a,b), f(x,y)=0 \Leftrightarrow \forall x \in W_a, y=g(x)$$

2) Notar que como consecuencia de la función implícita conocemos que $\forall x \in W_a, y=g(x)$ y por lo tanto

$$f(x, g(x)) = 0$$

$$H: W_a \subseteq E \rightarrow G$$

$$x \mapsto H(x) = f(x, g(x)) \quad H = f \circ \varphi, \quad \varphi: W_a \rightarrow U(a,b) \subseteq E \times F$$

$$x \mapsto \varphi(x) = (x, g(x)) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$$

Luego φ_1, φ_2 son aplicaciones de clase $C^1 \Rightarrow \varphi$ es de clase C^1

$$U(a,b) = \text{Im}(\varphi) \subseteq \text{Dom}(f) \subseteq U$$

H es diferenciable

$$\begin{aligned} DH(x) &= Df(\varphi(x)) \circ D\varphi(x) & D\varphi(x) &= (D\varphi_1(x), D\varphi_2(x)) = (\text{id}, Dg(x)) \\ &= Df((x, g(x))) \circ (\text{id}, Dg(x)) & \varphi(x) &= (x, g(x)) \\ &= Df(x, g(x)) \circ (\text{id}, Dg(x)) & D\varphi(x)h &= (h, Dg(x)h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DH(x)h &= Df(x, g(x))(h, Dg(x)h) \quad \text{con } h \in E, y \ x \in W_a \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))g'(x)h \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)g'(x)h \end{aligned}$$

Notar que $\forall x \in U_a, H(x) = 0,$

$$H'(x) = 0$$

$$H'(x)h = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)g'(x)h \Rightarrow \underset{\text{operador}}{0} = H'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \circ g'(x)$$

luego, $(a,b) \in U(a,b)$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \circ g'(a) \Rightarrow g'(a) = - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

En EDO

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

$$f(x,y) = 0$$

$$y = g(x)$$

$$\forall (x,y) \in U$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) y'(x) = 0$$

$$y'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

③ ¿Qué hipótesis deberíamos considerar si deseamos conocer si x está dado como función de y ?

Solo se debe modificar la hipótesis de $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \in \text{Isomorf}(E,G)$

Si se cumplen las hipótesis del teorema de la función existen $U(a,b) \subseteq U, \forall b$ abierto en F , existe también

$$h: V_b \rightarrow E \text{ tal que } a = h(b), x = h(y) \forall y \in V_b.$$

Gâteaux Diferenciabilidad

Sean $U \subseteq E$ un abierto, E, F espacios normados y $f: U \rightarrow F$

$$\frac{\|f(x_0 + td) - f(x_0)\|_F}{\|td\|_E} \stackrel{d \in E}{=} \frac{\|f(x_0 + td) - f(x_0)\|_F}{|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}: df(x_0 + td) \text{ está definido?}$$

Si t es suficientemente pequeño $x_0 + td \in U$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + td) - f(x_0)\|_F}{|t|} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}$$

Si el límite existe, se dice que f posee derivada direccional en el punto $x_0 \in U$ en la dirección $d \in E$.

Si el límite existe, entonces existe $v = v(x_0, d) \in F$ tal que

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}$$

Notación $v = f'(x_0; d) \leftarrow$ Derivado direccional de f en x_0 en la dirección d

Definimos $T: E \rightarrow F$
 $d \mapsto Td = f'(x_0; d)$ ¿ T es lineal? ¿ T es acotado?

Para que T exista, deben existir todas las derivadas en x_0 , i.e., existen las derivadas direccionales en toda dirección

Cuando $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces se dice que f es Gâteaux diferenciable en $x_0 \in U$ y se denotará a su derivada $f'_G(x_0)$

Si f es Gâteaux diferenciable en $x_0 \in U$, entonces, para todo $d \in E$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} = f'_G(x_0) d \quad f'_G(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$$

Proposición: Sea $f: U \subseteq E \rightarrow F, U$ un abierto de E con E y F espacios normados. Si f es Fréchet diferenciable en $x_0 \in U$, entonces f es Gâteaux diferenciable en x_0 . Además,

$$f'(x_0) = f'_G(x_0)$$

Demostración

Como f es Fréchet diferenciable, el candidato a derivada de Gateaux, luego basta probar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)d$$

Miércoles 24 de agosto de 2022.

$$\text{P.D. } (\exists T_{x_0} \in \mathcal{L}(E, F)) (\forall d \in E) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} = T_{x_0}d \text{ en } F \right)$$

Tomando $T_{x_0} = f'(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$, se tiene que

$$\bullet \text{ si } d = 0 \quad T_{x_0}d = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0)}{t}$$

\bullet si $d \neq 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)d = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0) - t f'(x_0)d}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0) - f'(x_0)(td)}{t}$$

Notemos que si $t \rightarrow 0$, $td \rightarrow 0$ con $d \neq 0$. Así, tomando $h = td$, entonces $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)(h)}{\|h\|} \cdot \|d\| = 0$$

Usamos el resultado

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ en } F \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \|g(x)\|_F = 0 \text{ en } \mathbb{R}$$

Observación Sean \mathcal{U} un abierto y $f: \mathcal{U} \subseteq E \rightarrow F$

f es diferenciable en el sentido de Fréchet en $x_0 \Rightarrow f$ es Gateaux diferenciable en x_0

$\rightarrow f$ posee todas las derivadas direccionales en x_0 .

En general los recíprocos no son ciertos.

Notemos que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow f'(1, 0); (u, v) = \begin{cases} \frac{2u^2 + v}{2u^2 + v^2} & (u, v) \neq (0, 0) \\ 0 & (u, v) = (0, 0) \end{cases}$$

Si f es Gateaux diferenciable en $x_0 \Rightarrow f$ es continua en x_0

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^8 + (y - x^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calculamos las derivadas direccionales.

$$f'(1, 0); (h, k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1, 0) + t(h, k) - f(1, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t(h, k))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6 h^6}{t^8 h^8 + (tk - t^2 h^2)^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6 h^6}{t^8 h^8 + t^2 k^2 - 2t^3 h^2 k + t^4 h^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5 h^6}{t^8 h^8 + t^2 k^2 + 2t^3 h^2 k + t^4 h^4} = 0$$

Continuidad, (t, t^2)

$$\frac{t^6}{t^8 + (t^2 - t^2)^2} = \frac{t^6}{t^8 + t^4 - 2t^4 + t^4} = \frac{t^6}{t^8} = \frac{1}{t^2} \rightarrow +\infty$$

Teorema. Sea $f: U \subseteq E \rightarrow F$ con U un abierto en E y E, F espacios normados.

Si f es Gateaux diferenciable en una vecindad de x_0 y f'_G es continua en $x_0 \in U$, entonces f es Fréchet diferenciable en x_0 .

Viernes 26 de agosto de 2022

Como f es diferenciable en x_0 , entonces

$$(\exists \delta > 0) (\forall h \in E) (\|h\| < \delta \Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \|h\| \varphi(h), \text{ donde } \varphi(h) \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0$$

• Si $d=0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+td) - f(x_0)}{t} = 0 = f'(x_0)(0)$$

• Si $d \neq 0$, entonces $t \in (-\delta/\|d\|, \delta/\|d\|)$. Notar que $td \in F$ y además

$$\|td\| = |t| \|d\| < \frac{\delta}{\|d\|} \|d\| = \delta \text{ i.e., } \|td\| < \delta$$

Con lo cual, por $[*]$

$$\forall t \in \left(-\frac{\delta}{\|d\|}, \frac{\delta}{\|d\|}\right), f(x_0+td) = f(x_0) + f'(x_0)(td) + \|td\| \varphi(td)$$

Notar que $\forall t \in \left(-\frac{\delta}{\|d\|}, \frac{\delta}{\|d\|}\right) \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+td) - f(x_0)}{t} &= \frac{f'(x_0)(td) + \|td\| \varphi(td)}{t} \\ &= f'(x_0)d + \frac{\|td\|}{t} \varphi(td) \end{aligned}$$

Formalización de la (rigurosa) demostración de que Fréchet implica Gateaux.

Luego, como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|td\|}{t} \varphi(td) = 0;$$

con lo que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+td) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)d$$

(Demostración del teorema)

Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $(\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0) (\forall h \in E)$

$$(\|h\| < \delta \Rightarrow \|f(x_0+h) - f(x_0) - f'_G(x_0)h\|_F \leq \varepsilon \|h\|)$$

Como $f'_G(x_0): V_G \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ es continua en x_0 , entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$(\forall z \in V_G) (\|z - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|f'_G(z) - f'_G(x_0)\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \varepsilon)$$

Por otro lado, definamos la función

$$g: V_{x_0} \rightarrow F$$

$$x \mapsto g(x) = f(x) - f'_G(x_0)(x - x_0)$$

Notar que g es Gateaux diferenciable en V_{x_0} . Sean $d \in E$, y $x \in V_{x_0}$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x+td) - g(x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{f(x+td) - f'_G(x_0)(x+td - x_0) - f(x) + f'_G(x_0)(x - x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x+td) - f(x) - f'_G(x_0)(td)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} - f'_G(x_0)d \\ &= f'_G(x)(d) - f'_G(x_0)(d) \end{aligned}$$

Por lo tanto, g es Gateaux diferenciable en x_0 y más aún

$$g'_G(x) = f'_G(x) - f'_G(x_0)$$

Por el teorema de incrementos finitos para funciones Gateaux diferenciables, se tiene que

$$(\forall u, v \in V_{x_0}, \exists u, v \subseteq V_{x_0})$$

$$(\|g(u) - g(v)\|_F \leq \sup_{z \in \mathcal{I}(u, v)} \|g'_G(z)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|u - v\|_E)$$

[**]

$$g(x_0+h) = f(x_0+h) - f'_G(x_0)h, \quad g(x_0) = f(x_0) \quad \text{¿ } x_0, x_0+h \in V_{x_0}? \quad \text{¿ } \mathcal{I}(x_0, x_0+h) \subseteq V_{x_0}?$$

Como $V_{x_0} \cap B(x_0, \delta_1)$ es abierto que contiene a x_0 ; así, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$B(x_0, \delta_2) \subseteq V_{x_0} \cap B(x_0, \delta_1)$$

Notar que para todo $h \in E$, tal que $\|h\| < \delta_2$ $x_0+h \in V_{x_0}$ y

$$\mathcal{I}(x_0, x_0+h) \subseteq V_{x_0}$$

$$\|x_0+h - x_0\| = \|h\| < \delta_2 \Rightarrow x_0+h \in B(x_0, \delta_2) \subseteq V_{x_0}$$

Notar que $\mathcal{I}(x_0, x_0+h) \subseteq V_{x_0}$ pues $\mathcal{I}(x_0, x_0+h) \subseteq B(x_0, \delta_2)$ y las bolas son convexas. (uego por [**])

$$\|g(x_0+h) - g(x_0)\| \leq \sup_{z \in \mathcal{I}(x_0, x_0+h)} \|g'_G(z)\| \|h\|$$

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'_G(x_0)h\| \leq \sup_{z \in \mathcal{I}(x_0, x_0+h)} \|f'_G(z) - f'_G(x_0)\| \|h\| < \varepsilon \|h\|$$

$$\forall z \in V_{x_0} \quad \|z - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f'_G(z) - f'_G(x_0)\| < \varepsilon$$

Tomando $\delta = \delta_2$ se concluye el resultado.

Observación: Considere $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ funcional. Para conocer si J es Gateaux diferenciable en $x_0 \in E$, se puede considerar la función

$$g(t) = J(x_0 + td)$$

Si g es diferenciable en $t=0$, entonces J es Gateaux diferenciable en x_0 .

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(x_0 + td) - J(x_0)}{t}$$

como dicho límite existe, entonces J es derivable direccionalmente en x_0 , para cualquier dirección d .

$$J: (C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}) \\ t \mapsto J(f) = \int_0^1 p(s) f(s) ds \quad \text{con } p \in \mathcal{P}([0,1])$$

Sean $f_0 \in C([0,1])$, cualquiera, y $d \in C([0,1])$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(f_0 + td) - J(f_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 p(s) (f_0 + td)(s) ds - \int_0^1 p(s) f_0(s) ds}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 p(s) f_0(s) ds + t \int_0^1 p(s) d(s) ds - \int_0^1 p(s) f_0(s) ds}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 p(s) d(s) ds = \int_0^1 p(s) d(s) ds = J(d)$$

Donde, conocemos que $J \in \mathcal{L}(C([0,1]), \mathbb{R})$. En efecto, claramente es lineal por la linealidad de la derivada y además

$$\|J(f)\| = \left| \int_0^1 p(t) f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |p(t)| |f(t)| dt \leq \|p\|_\infty \|f\|_\infty.$$

$$S'(f, g) = S(g)$$

$$J'_g(f) = J$$

$$h(t) = S(f+gt)$$

$$\left. \frac{d}{dt} S(f+gt) \right|_{t=0} = J(f, g)$$

Notación utilizada en cálculo de variaciones

Observación 2: Analizar la Fréchet diferenciable de una función cualquiera

$$f: U \subseteq E \rightarrow F$$

Calcular

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+td) - f(x_0)}{t} = F(d).$$

Viernes, 2 de septiembre de 2022.

Derivadas de orden superior

E, F espacios normados, $U \subseteq E$ abierto y $f: U \rightarrow F$.

• Si f es diferenciable en U , $\Rightarrow \exists Df: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$
 $u \mapsto f'(u)$

En este caso se dice que f posee derivada de primer orden en U .

• Df es diferenciable en $U \Rightarrow \exists D(Df): U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$
 $x \mapsto (f'')'(x)$

En este caso, se dice que f posee derivada de segundo orden en U .

Denotaremos $D^2f = D(Df)$, $f''(x) = (f'')'(x)$ para todo $x \in U$

función segunda derivada de f / segunda derivada de f en x .

• D^2f es diferenciable en $U \Rightarrow \exists D(D^2f): U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)))$
 $x \mapsto f'''(x)$

Nuevamente, se dice que f posee derivada de tercer orden en U .

D^3f : función tercera derivada de f
 $f'''(x)$: función tercera derivada de f en x .

Recursivamente, si $(f^{(n)})' = D^n f$ (función n -ésima derivada de f) y esta es diferenciable en U , con $n \in \mathbb{N}$, entonces existe la derivada $D(D^n f) = D^{n+1} f$ y además

$$D^{n+1} f: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F_n),$$

donde F_n se define de la siguiente manera:

$$F_0 = F, \quad F_n = \mathcal{L}(E, F_{n-1}) \text{ con } n \geq 1$$

Así, $D^{n+1} f$ es la función $(n+1)$ -ésima de f y notamos

$$\forall x \in U: (f^{(n)})'(x) = f^{(n+1)}(x) = \text{Derivada } (n+1)\text{-ésima derivada en } x$$

Por otro lado, se dice que f es de clase C^n , $n \geq 1$ si f posee derivadas n -ésima $[D^n f]$ y esta hasta el orden n y todas ellas continuas en U .

En este caso, se dice que f es n -veces continuamente diferenciable en U , y se define

$$C^n(U, F) = \{ f: U \subseteq E \rightarrow F : f \text{ es de clase } C^n \}$$

Se dice que f es de clase C^∞ si f es de clase C^n para todo $n \geq 1$.

$$C^\infty(U, F) = \bigcap_{n \geq 1} C^n(U, F)$$

Se dice entonces que f es suave o smooth

Proposición: Para todo $n \in \mathbb{N}$: F_n (definido recursivamente) $F_n = \mathcal{L}(E, F_{n-1})$ es isomorfo a $\mathcal{ML}(E^n, F)$, i.e.

$$\mathcal{L}(E, F^n) \cong \mathcal{ML}\left(\prod_{i=1}^n E_i, F\right)$$

Demostración

Por inducción: sobre $n \in \mathbb{N}$

① Base de la inducción:

$$n=1 \quad F_1 = \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{ML}(E, F) \quad \text{pues } \mathcal{ML}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$$

② Paso inductivo:

$$\text{Hipótesis inductiva: } F_n \cong \mathcal{ML}(E^n, F)$$

$$\text{P.D. } F_{n+1} \cong \mathcal{ML}(E^{n+1}, F)$$

Notemos que $\mathcal{ML}(E^{n+1}, F) = \mathcal{ML}(E \times E^n, F)$, luego consideremos el siguiente resultado

$$\underbrace{E_1, E_2, \dots, E_m, F}_{\text{espacios normados}}$$

Entonces, para todo $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$

$$\mathcal{ML}(E_1 \times \dots \times E_k, \mathcal{ML}(E_{k+1} \times \dots \times E_m, F)) = \mathcal{ML}(E_1 \times \dots \times E_m, F)$$

$$\mathcal{ML}(E_1 \times \dots \times E_k, \mathcal{ML}(E_{k+1} \times \dots \times E_m, F)) \xrightarrow[\mapsto \Psi(T)]{\xrightarrow{T}} \mathcal{ML}(E_1 \times \dots \times E_m, F)$$

Con este resultado

$$\mathcal{ML}(E^{n+1}, F) = \mathcal{ML}(E \times E^n, F) \cong \mathcal{ML}(E, \mathcal{ML}(E^n, F)) = \mathcal{L}(E, \mathcal{ML}(E^n, F)) \cong \mathcal{L}(E, F_n) = F_{n+1}$$

lo que completa la demostración.

$$\text{Lema } F_1 \cong F_2 \Rightarrow \mathcal{L}(E, F_1) \cong \mathcal{L}(E, F_2)$$

$$\text{Definamos } \Phi: \mathcal{L}(E, F_1) \rightarrow \mathcal{L}(E, F_2) \quad \Phi(T)(x) = \varphi(Tx)$$

$$T \mapsto \bar{\Phi}(T)$$

donde $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ es el isomorfismo isométrico entre F_1 y F_2 .

> Φ es lineal: Sean $\alpha \in \mathbb{K}$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F_1)$, para cualquier $x \in E$

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha T_1 + T_2)(x) &= \varphi(\alpha T_1 + T_2)(x) = \varphi(\alpha T_1(x) + T_2(x)) = \alpha \varphi(T_1(x)) + \varphi(T_2(x)) \\ &= \alpha \varphi(T_1)(x) + \varphi(T_2)(x) \\ &= \alpha \bar{\Phi}(T_1)(x) + \bar{\Phi}(T_2)(x) \\ &= \alpha (\bar{\Phi}(T_1) + \bar{\Phi}(T_2))(x) \end{aligned}$$

Por definición de igualdad de funciones $\therefore \bar{\Phi}(\alpha T_1 + T_2) = \alpha \bar{\Phi}(T_1) + \bar{\Phi}(T_2)$

> $\bar{\Phi}$ es una isometría: P.D. $\|\bar{\Phi}(T)\|_{\mathcal{L}(E, F_2)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E, F_1)}$

$$\begin{aligned} \|\bar{\Phi}(T)\|_{\mathcal{L}(E, F_2)} &= \sup_{\|x\|=1} \|\varphi(Tx)\|_{F_2} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_{F_1} = \|T\|_{\mathcal{L}(E, F_1)} \end{aligned}$$

$\therefore \bar{\Phi}$ es una isometría y es inyectivo

> $\bar{\Phi}$ es sobreyectivo. Sea $S \in \mathcal{L}(E, F_2)$, definamos

$$T: E \rightarrow E$$

$$x \mapsto Tx = \varphi^{-1}(Sx)$$

Notar que $T \in \mathcal{L}(E, F_1)$

Además

$$\Phi(T)(x) = \varphi(Tx) = \varphi(\varphi^{-1}(Sx)) = Sx \quad \forall x \in E$$

Por lo tanto, Φ es un isomorfismo isométrico.

Observación Sea $f: U \subseteq E \rightarrow F$ una función dos veces diferenciable en U

$$D^2f: U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) = \mathcal{L}(E, F) = F_2 \cong \mathcal{M}_2(E^2, F)$$

$$D^2f: U \rightarrow \mathcal{M}_2(E^2, F) = \mathcal{B}_2(E^2, F)$$

Esto se puede generalizar para las derivadas de orden n

$$D^n f: U \rightarrow \mathcal{M}_n(E^n, F)$$

2) Si $f: U \rightarrow F$ es una función que posee derivada n -ésima en el punto $x_0 \in U$, entonces existe $V_{x_0} \subseteq U$ vecindad abierta de x_0 tal que f posee derivada $n-1$ en V_{x_0}

3) Para $n > m$ $C^n(U, F) \subseteq C^m(U, F)$

4) El conjunto $C^n(U, F)$ es subespacio vectorial de $C^0(U, F)$ y además

$$D^n(\alpha f + \beta g) = \alpha D^n f + \beta D^n g$$

Lunes, 5 de septiembre de 2022.

Teorema - Teorema de Schwarz -

Sean E, F espacios normados, $U \subseteq E$ un abierto y $f: U \rightarrow F$. Si f es dos veces diferenciable en $x_0 \in U$, entonces

$$\forall (h, k) \in E \times E, \quad f''(x_0)(h, k) = f''(x_0)(k, h)$$

Demostración - Ideas -

Sabemos que

$$\textcircled{1} \quad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(\|h\|)$$

Pues f es diferenciable en x_0

$$\textcircled{2} \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(\|h\|)$$

$\forall x \in V_{x_0}$ (Una vecindad de puntos, pues f es dos veces diferenciable)

$$\textcircled{3} \quad f'(x_0+k) = f'(x_0) + f''(x_0)k + o(\|k\|)$$

La idea es obtener lo siguiente

$$\forall \epsilon > 0 \quad 0 \leq \|f''(x_0)(h, k) - f''(x_0)(k, h)\| < \epsilon$$

Notemos que

$$\frac{\|f'(x_0+k) - f'(x_0) - f''(x_0)k\|}{\|k\|_E} \mathcal{L}(E, F) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$$

$$\sup_{h \neq 0} \frac{\|f'(x_0+k)h - f'(x_0)h - (f''(x_0)k)h\|_F}{\|h\|_E \|k\|_E} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0+k)h - f'(x_0)h - (f''(x_0)k)h = o(\|k\|) \quad \textcircled{4}$$

$$\text{De } \textcircled{2} \quad f(x_0+h+k) = f(x_0+k) + f''(x_0+k)h + o(\|h\|) \quad \textcircled{5}$$

$$\text{Reemplazando } \textcircled{5} \text{ en } \textcircled{4} : f(x_0+h+k) - f(x_0+h) + o(\|h\|) - f(x_0+h) + f(x_0) + o(\|h\|) - (f''(x_0)k)h = o(\|k\|)$$

En esto, podemos escribir que

$$\underbrace{f(x_0+h+k) - f(x_0+k) - f(x_0+h) + f(x_0)}_{F(k, h)} - (f''(x_0)k)h = o(\|h\|) + o(\|k\|)$$

Así,

$$F(k, h) - (f''(x_0)k)h = o(\|h\| + \|k\|) \quad \textcircled{6}$$

Hay que notar que

$$F(k, h) = F(h, k)$$

De esta manera, intercambiando h y k

$$F(h, k) - (f''(x_0)h)k = o(\|h\| + \|k\|) \quad \textcircled{7}$$

Con lo hecho previamente

$$\| \underbrace{f''(x_0)h}_k - \underbrace{f''(x_0)k}_h \| \leq \| f''(x_0)(h,k) - F(h,k) \| + \| F(h,k) - f''(x_0)(k,h) \|$$

$$\therefore \frac{\| f''(x_0)(k,h) - f''(x_0)(h,k) \|}{\|h\| + \|k\|} \leq \frac{\| f''(x_0)(k,k) - F(h,k) \|}{\|h\| + \|k\|} + \frac{\| F(k,h) - f''(x_0)(k,h) \|}{\|h\| + \|k\|} \xrightarrow{h,k \rightarrow 0} 0$$

Esto nos dice que para todo $\varepsilon > 0$

$$\| f''(x_0)(h,k) - f''(x_0)(k,h) \| < \varepsilon (\|h\| + \|k\|) \quad \text{siempre y cuando } h, k \text{ sean suficientemente pequeñas.}$$

Gracias a la bilinealidad de $f''(x_0)$ a través de la técnica del escalamiento, podemos extender el resultado a todo el espacio.

► **Tareas por abordar.**

- 1) Encontrar una estimación para $\| F(h,k) - f''(x_0)(h,k) \|$ dependiente de $\varepsilon > 0$.
- 2) De 1), hallar una estimación de

$$\| f''(x_0)(h,k) - f''(x_0)(k,h) \| \quad \text{dependiente de } \varepsilon > 0 \text{ y para } h, k \text{ suficientemente pequeños.}$$

- 3) Hacer uso de la técnica de escalamiento para tener 2) sobre todo el espacio.

- **Demostración Rigurosa.**

Sea $\varepsilon > 0$, cual quiera. Como f es dos veces diferenciable en $x_0 \in \mathcal{U}$, entonces existe $r > 0$ tal que

$$f \text{ es diferenciable en } B(x_0, r) \subseteq \mathcal{U}$$

Definamos, $F(u,v) = f(x_0+u+v) - f(x_0+u) - f(x_0+v) + f(x_0)$, con $u,v \in E$ tales que $u,v \in B(0, 1/2)$.

Notar que F es simétrica y para todo $u \in B(0, 1/2)$, $x_0+u \in B(x_0, r)$ y existe $f'(x_0+u)$, con lo cual

$$\begin{aligned} F(u,v) - f''(x_0)(u,v) &= f(x_0+u+v) - f(x_0+u) - f(x_0+v) + f(x_0) - f''(x_0)(u,v) + f'(x_0+u)(v) - f'(x_0+u)(v) + f'(x_0)v - f'(x_0)(v) \\ &= \left[f(x_0+u+v) - f(x_0+v) - f'(x_0+u)(v) + f'(x_0)(v) \right] - \left[f(x_0+u) - f(x_0) \right] \\ &\quad + \left[f'(x_0+u)v - f'(x_0)v - f'(x_0)(u,v) \right] \end{aligned}$$

Definamos para $u \in B(0, 1/2)$ arbitrario pero fijo.

$$g(x) = f(x_0+u+x) - f(x_0+x) - f'(x_0+u)x + f'(x_0)x \quad \text{con } x \in B(0, 1/2)$$

Así.

$$F(u,v) - f''(x_0)(u,v) = g(v) - g(0) + \left[f'(x_0+u)v - f'(x_0)v - f'(x_0)(u,v) \right]$$

luego

$$\| F(u,v) - f''(x_0)(u,v) \| \leq \underbrace{\| g(v) - g(0) \|}_{N_1} + \underbrace{\| f'(x_0+u)v - f'(x_0)v - f'(x_0)(u,v) \|}_{N_2}$$

Estimación de N_1

$$g: B(0, 1/2) \rightarrow F$$

$$x \mapsto g(x) = f(x_0+u+x) - f(x_0+x) - f'(x_0+u)x + f'(x_0)x$$

y es diferenciable en $B(0, 1/2)$ y $g'(x) = f'(x_0+u+x) - f'(x_0+x) - f'(x_0+u) + f'(x_0)$

Dado que $]u, v[\subseteq B(0, 1/2)$, entonces por el TIFG

$$\| g(v) - g(0) \| \leq \sup_{\xi \in]u, v[} \| g'(\xi) \|_{\mathcal{L}(E,F)} \|v\|_E$$

como $\xi \in]u, v[$, entonces $\xi = \lambda v$ con $\lambda \in]0, 1[$

$$g'(\xi) = g'(\lambda v) = f'(x_0+u+\lambda v) - f'(x_0+\lambda v) - f'(x_0+u) + f'(x_0)$$

$$\frac{1}{\|h\| \|k\|} \frac{\varepsilon^2}{4} \|f'(x_0)(h, k) - f'(x_0)(k, h)\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \varepsilon^2$$

$$\therefore \|f''(x_0)(h, k) - f''(x_0)(k, h)\| \leq \varepsilon \|h\| \|k\|$$

Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario

$$\therefore f''(x_0)(h, k) = f''(x_0)(k, h).$$

Fin :=

Martes, 6 de septiembre de 2022.

Fórmulas de Taylor

Teorema - Fórmula de Taylor asintótica o Taylor-Young

Sean E, F espacios normados, $\mathcal{U} \subseteq E$ abierto y $f: \mathcal{U} \rightarrow F$. Si f es n -veces diferenciable en $x_0 \in \mathcal{U}$, entonces

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(h^k) + o(\|h\|^n)$$

Notación: $h^k = \underbrace{(h_1, \dots, h)}_{k\text{-veces}}$

Por lo tanto,

$$f^{(k)}(x_0)(h^k) = f^{(k)}(x_0)(\underbrace{h_1, \dots, h}_{k\text{-veces}})$$

En otras palabras, por la notación $(\cdot)^k$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(h^k)}{\|h\|^n} = 0.$$

Para $n=2$, tenemos

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2)$$

Consideremos $h=td$, con $t \in \mathbb{R}$

$$= f(x_0) + t f'(x_0)d + \frac{t^2}{2} f''(x_0)(d, d) + o(\|td\|^2)$$

Demostración (Por inducción sobre n)

→ Base de la inducción

Para $n=1$, si f es diferenciable en x_0 , entonces

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(\|h\|)$$

→ Paso de la inducción

Supongamos que g es $m-1$ veces diferenciable en x_0 , entonces

$$g(x_0+h) = g(x_0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(x_0)(h^k) + o(\|h\|^{m-1})$$

Supongamos que f es m veces diferenciable en $x_0 \in \mathcal{U}$

$$\text{P.D. } (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0) (\forall h \in E) (\|h\| < \delta \Rightarrow \|f(x_0+h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(h^k)\| < \varepsilon \|h\|^m)$$

Sea $\varepsilon > 0$, como f es diferenciable en $x_0 \in \mathcal{U}$, existe una vecindad abierta de x_0 , $\forall x_0 \in \mathcal{U}$ tal que f es diferenciable en $\forall x_0$. Así, podemos definir

$$\begin{aligned} Df: \forall x_0 &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x &\mapsto Df(x) = f'(x) \end{aligned}$$

Como f es m veces diferenciable en x_0 , entonces Df es $m-1$ veces diferenciable en x_0 . Por lo tanto, existe $\eta = \eta(x_0, \varepsilon) > 0$, para todo $h \in E$ tal que

Como f es dos veces diferenciable en x_0 , existe $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\forall z \in E \left(\|z - x_0\| < \eta \Rightarrow \|f'(z) - f'(x_0) - f''(x_0)(z - x_0)\| < \frac{\epsilon}{16} \|z - x_0\| \right)$$

Notar que

$$\textcircled{1} \|f'(x_0 + u + \xi) - f'(x_0) - f''(x_0)(u + \xi)\| < \frac{\epsilon}{16} \|u + \xi\| \quad \text{si } \|u + \xi\| < \eta$$

$$\textcircled{2} \|f'(x_0 + \xi) - f'(x_0) - f''(x_0)\xi\| < \frac{\epsilon}{16} \|\xi\| \quad \text{si } \|\xi\| < \eta$$

$$\textcircled{3} \|f'(x_0 + u) - f'(x_0) - f''(x_0)u\| < \frac{\epsilon}{16} \|u\| \quad \text{si } \|u\| < \eta$$

Ahora, como

$$g'(x) = f'(x_0 + u + x) - f'(x_0 + x) - f'(x_0 + h) + f'(x_0) - f'(x_0)(u + \xi) + f''(x_0)u + f''(x_0)\xi - f'(x_0)u + f'(x_0)$$

Por lo tanto

$$\|g'(\xi)\| \leq \frac{\epsilon}{16} \|u + \xi\| + \frac{\epsilon}{16} \|\xi\| + \frac{\epsilon}{16} \|u\| \quad \text{si } \|u\| < \frac{\eta}{2} \text{ y } \|\xi\| < \frac{\eta}{2}$$

Dado que $\xi \in]0, 2r[$, $\|\xi\| = \|2v\| \leq \|v\| < r/2$.

Tomando $\delta = \min\{\eta/2, r/2\} > 0$, se sigue que si $u \in B(0, \delta)$ y $v \in B(0, \delta)$, entonces

$$\begin{aligned} \|g(v) - g(0)\| &\leq \sup_{\xi \in]0, v[} \|g'(\xi)\| \|v\| \\ &\leq \sup_{\xi \in]0, v[} \left[\frac{\epsilon}{8} \|u\| + \frac{\epsilon}{8} \|\xi\| \right] \|v\| \\ &\leq \sup_{\lambda \in]0, 1[} \left[\frac{\epsilon}{8} \|u\| + \frac{\epsilon}{8} \lambda \|v\| \right] \|v\| \\ &\leq \left(\frac{\epsilon}{8} \|u\| + \frac{\epsilon}{8} \|v\| \right) \|v\| = \frac{\epsilon}{8} (\|u\| + \|v\|) \|v\| \quad [A] \end{aligned}$$

∴, por [3]

$$\|f'(x_0 + h) - f'(x_0) - f''(x_0)h\| < \frac{\epsilon}{16} \|h\| \quad \text{con } \|h\| < \delta \quad [B]$$

Así, por [A] y [B]

$$\begin{aligned} \forall u, v \in B(0, \delta) \quad \|F(u, v) - f''(x_0)(u, v)\| &\leq \frac{\epsilon}{8} (\|u\| + \|v\|) \|v\| + \frac{\epsilon}{16} \|u\| \|v\| \\ &= \frac{\epsilon}{16} [3 \|u\| \|v\|] + \frac{\epsilon}{8} \|v\|^2 \\ &= \frac{\epsilon}{8} \left(\frac{3}{2} \|u\| \|v\| + \|v\|^2 \right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{8} (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Intercambiando los roles de u y v , se tiene que

$$\forall u, v \in B(0, \delta) \quad \|F(u, v) - f''(x_0)(v, u)\| \leq \frac{\epsilon}{8} (\|u\| + \|v\|)^2$$

Así,

$$\|f''(x_0)(u, v) - f''(x_0)(v, u)\| \leq \frac{\epsilon}{4} (\|u\| + \|v\|)^2 \quad \forall u, v \in B(0, \delta)$$

Finalmente, notar que si $h=0$ o $v=0$, la igualdad se cumple. Así, supongamos $h, k \in E$ son no nulos.

$$\text{Considerando } u = \frac{h}{\|h\|} \cdot \frac{\delta}{2} \text{ y } v = \frac{k}{\|k\|} \cdot \frac{\delta}{2}$$

Así, en la última estimación, se sigue que

$$\left\| f''(x_0) \left(\frac{h}{\|h\|} \cdot \frac{\delta}{2}, \frac{k}{\|k\|} \cdot \frac{\delta}{2} \right) - f''(x_0) \left(\frac{k}{\|k\|} \cdot \frac{\delta}{2}, \frac{h}{\|h\|} \cdot \frac{\delta}{2} \right) \right\| \leq \frac{\epsilon}{4} \left(\left\| \frac{h}{\|h\|} \cdot \frac{\delta}{2} \right\| + \left\| \frac{k}{\|k\|} \cdot \frac{\delta}{2} \right\| \right)^2 \leq \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \right)^2$$

$$\|w\| < \eta \Rightarrow \|Df(x_0+w) - Df(x_0) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} (Df)^{(k)}(x_0)(w^k)\| < \varepsilon \|w\|^{m-1}$$

Notar además que para $t \in]0,1[$ y $h \in E$ tal que

$$\|th\| < \eta \Rightarrow \|Df(x_0+th) - Df(x_0) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^k}{k!} D^k f(x_0)(h^k)\| < \varepsilon t^{m-1} \|h\|^{m-1}$$

Definamos

$$\varphi: [0,1] \rightarrow F$$

$$t \mapsto \varphi(t) = f(x_0+th) - \sum_{k=1}^m \frac{t^k}{k!} D^k f(x_0)(h^k)$$

luego, φ es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $]0,1[$, entonces

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \sup_{t \in]0,1[} \|\varphi'(t)\|$$

Por otro lado

$$\varphi(t) = f(x_0+th) - t f'(x_0)h - \frac{t^2}{2!} f''(x_0)(h,h) - \dots - \frac{t^m}{m!} f^{(m)}(x_0)(h^m)$$

derivando

$$\varphi'(t) = f'(x_0+th)h - f'(x_0)h - \dots - \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(x_0)(h^m)$$

$$= f'(x_0+th)h - f'(x_0)h - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k+1)}(x_0)(h^m)$$

luego, por el teorema de incrementos finitos

$$\|f(x_0+th) - f(x_0) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(h^k)\| \leq \sup_{t \in]0,1[} \|Df(x_0+th)th - Df(x_0)th - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_0)(th)^{k+1}\|$$

$$\leq \sup_{t \in]0,1[} \varepsilon \|th\|^n$$

$$< \varepsilon \|h\|^n$$

Tomando $\delta = \eta$, se sigue el resultado.

Teorema - Formula de Taylor Lagrange -

Sean E, F espacios normados, $\mathcal{U} \subseteq E$ un abierto y $f: \mathcal{U} \rightarrow F$ una función $n+1$ veces diferenciable en \mathcal{U} .
Si $[x_0, x_0+th] \subseteq \mathcal{U}$, con $x_0 \in \mathcal{U}$, entonces

$$\|f(x_0+th) - f(x_0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(h^k)\| \leq \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,1]} \|f^{(n+1)}(x_0+th)\|$$

Demostración

Sea:

$$\Psi: [0,1] \rightarrow F$$

$$t \mapsto \Psi(t) = f(x_0+th) - \sum_{k=1}^n \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k)}(x_0+th)(h^k)$$

Ψ es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $]0,1[$ y además

$$\Psi'(t) = f'(x_0+th)h + \sum_{k=1}^n -\frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0+th)(h^k) + \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(x_0+th)(h^{k+1})$$

$$= f'(x_0+th)h + \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+th)(h^{n+1}) - f'(x_0+th)h$$

$$= \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+th)(h^{n+1})$$

Definamos $M = \sup_{t \in [0,1]} \|f^{(n+1)}(x_0+th)\| \|h\|^{n+1}$

Así, notemos que

$$\|\Psi'(t)\| \leq M \frac{(1-t)^n}{n!}$$

Teorema: Sean $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow F$ y $g: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f y g son continuas en $[a,b]$ y diferenciables en $]a,b[$ y además

$$\|f'(t)\| \leq g'(t), \quad \forall t \in]a,b[$$

entonces

$$\|f(a) - f(b)\| \leq g(a) - g(b)$$

Definamos

$$g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto g(t) = M \int_0^t \frac{(1-t)^n}{n!} dt$$

g es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $]0,1[$. De donde, se sigue que

$$\|g(1) - g(0)\| \leq g(1) - g(0)$$

Por lo tanto,

$$\left\| f(x_0+h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(h^k) \right\| \leq M \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} ds$$

$$= M \frac{(1-s)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_0^1 = \frac{M}{(n+1)!}$$

$$= \sup_{t \in [0,1]} \|f^{(n+1)}(x_0+th)\| \|h\|^{n+1}$$

Ahora sí, fin ω